جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم رياضيات

مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية

بحث مقدم من قبل الطالب **(فؤاد فليح مهدي)** الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة بابل كجزء نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

بأشراف

م.م عدي حاتم صاحب

1444 ٢٠٢٣

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴾

صدق الله العظيم

«سورة المجادلة: الآية ١١»

الإهداء

الى من بلغ الرسالة وأدى الامانة، ونصح الامة، الى نبي الرحمة والنور سيدنا

محمد (صلي الله علٌيه واله وسلم)

الى من علمني العطاء بدون انتظار، الى من احمل اسمه بكل افتخار

(والدي العزٌيز)

الى معنى الحنان والتفاني , الى بسمة الحٌياة وسر الوجود . الى من كان وعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي

(امي الحبٌيبة)

الى من حبهم يجري في عروقي يٌلهج بذكراهم فؤادي

(اخوتي)

الى من سرنا سوٌيا ونحن نشق الطريق معا نحو النجاح والابداع

(زملائي)

الى الذٌين امدوني بالعلم والمعرفة والثقافة على مر اربع سنوات

(اساتذتي الاعزاء جميعا)

الشكر والتقدير

الحمد الله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد (صلى الله عليه واله وسلم) ، وبعد فاني احمد الله كثيرا واشكره شكرا وفيرا لما وفقني له واعانني في اتمام بحثي هذا وان اسجل اجلالا وعرفانا عظيم شكري وامتناني لأستاذي الفاضل الدكتور (م.م. عدي حاتم صاحب) المشرف على هذا البحث لما بذله من جهد علمي صادق ، ولما غمرني به من خلق علمي وتوجيهات رشيدة كما ان شكري موجه الادارة كلية التربية للعلوم الصرفة بجامعة بابل قسم الرياضيات

للمجهودات المبذولة من قبل اساتذتنا الكرام في الجامعة لتوفير أفضل بيئة للتدريس في أفضل الاحوال التي تلائم طلبة العلم

كذلك شكري وحبي الى اسرتي وبالأخص ابي وامي واخوتي لما قدموه من تعاون ومشقة وصبر اثناء الانشغال بالدراسة.

الفهرست

الخلاصة

ناقش هذا البحث المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها وتطبيقاتها، حيث يتضمن البحث بعض المفاهيم الاساسية في المعادلات التفاضلية الجزئية، وكذلك سنتطرق الى اهم الحلول في المعادلات التفاضلية الجزئية والتعرف على بعض التطبيقات الموجودة في مختلف المجالات الهندسة والفيزيائية والكيميائية وغيرها.

المقدمة

المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط دالة واحدة او اكثر مشتقاتها [1]تمثل الدوال عموما كميات مادية وتمثل مشتقات معدلات التغير الخاصة بها وتعرف المعادلة التفاضلية العلاقة بين الاثنين [2]ان دراسة المعادلات التفاضلية في مجال واسع في الرياضيات البحتة والتطبيقية والفيزياء والهندسة جميع هذا التخصصات معنية بخصائص المعادلات التفاضلية بأنواعها المختلفة تركز الرياضيات البحتة على وجود الحلول وتفردها بينما تركز الرياضيات البحتة على وجود الحلول وتفردها بينما تؤكد الرياضيات التطبيقية على التبرير الصارم لاساليب تقريب الحلول تلعب المعادلات التفاضلية دورا مهما في نمذجة كل عملية فيزيائية او تقنية او بولوجية تقريبا بدءأ من الحركة السماوية او تصميم الجسور وحتى وحتى التفاعلات بين الخلايا العصبية قد لاتكون المعادلات التفاضلية مثل تلك المستخدمة في حل المشاكل الحياة الحقيقية بالضرورة قابلة للحل بشكل مباشر على سبيل المثال لايوجد لدينا حلول شكل مغلقة بدلا من ذلك يمكن تقريب الحلول باستخدام طرق عددية.

يمكن صياغة العديد من القوانين الاساسية للفيزياء والكيمياء كمعادلات تفاضلية في علم الاحياء والاقتصاد تستخدم المعادلات التفاضلية لنمذجة السلوك النظم العقدية تطورات نظرية الرياضية للمعادلات التفاضلية اولا مع العلوم التي نشأ في بعض الاحيان في مجالات علمية متميزة تماما قد تؤدي الى معادلات تفاضلية متطابقة كما حدث هذا يمكن اعتبار النظرية الرياضية وراء المعادلات مبدا موحد وراء الظواهر المتنوعة على سبيل المثال انتشار الضوء والصوت في الجو والامواج على سطح البركة يمكن وصفها جميعا من خلال نفس المعادلة الموجة [3]

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x} = y$$

وفي علام ١٦٩٥ اقرح ياكوب بيرنولي معادلة برنولي التفاضلية [4]معادلة تفاضلية عادية في شكلها التالي

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Qy^n$$

يتضمن هذا المشروع ثلاث فصول بحيث الفصل الاول يشمل مقدمة واساسيات حول معادلات التفاضلية الجزئية اما الفصل الثاني يتضمن طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية والفصل الثالث يتضمن بعض التطبيقات التي تخص المعادلات الجزئية

الفصل الاول

((مقدمة عن المعادلات

التفاضلية الجزئية))

مقدمة عن المعادلات التفاضلية الجزئية

١-١ المقدمة

المعادلات التفاضلية الجزئية هي نوع من المعادلات التفاضلية التي تحتوي على دالة واحدة او اكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية او علاقة تتضمن تابعا او توابع مجهولة لها عدة متحولات مستقلة بالإضافة الى مشتقات الجزئية لهذا المتحولات [5]

والفرق الاساس بين المعادلة التفاضلية الاعتيادية والمعادلة التفاضلية الجزئية هو ان عدد المتغيرات المستقلة في الاخيرة يزيد على متغير واحد اما حلول المعادلات التفاضلية الجزئية فانها تتضمن دوال اختيارية بدلا من الثوابت الاختيارية التي تحصل في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية [4]

2-1انواع المعادلات التفاضلية الجزئية

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الى تصنيفات مختلفة وهذا التصنيف لة مفهوم هام لان النظرية العامة وطرق الحل تطبق فقط على كل معادلة مصنفة

والتصنيفات الاساسية هي [3]

١-٢-١ رتبة المعادلة

رتبة المعادلة التفاضلية هي اعلى معامل تفاضلي في المعادلة

امثلة

$z_t = z_{xx}$ من الرتبة الثانية

$z_t = z_{yy}$ من الرتبة الاولى

$z_t = z_{xxx} + sinx$ من الرتبة الثالثة

١-٢-٢ عدد المتغيرات

عدد المتغيرات المستقلة فمثلا

$z_t = z_{xx}$ متغيرات هما x,t

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_w$ المتغيرات هي r.t.w

3-2-1 المعادلة الخطية

قد تكون المعادلة خطية او خطية ففي المعادلات التفاضلية الخطية يكون المتغير التابع u مثلا وكل مشتقاتة الجزئية تظهر في الصورة الخطية (أي انها غير مضروبة في بعضها او مرفوعة لاس خلاف الواحد الصحيح) وبايجاز فان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثالثة في المتغيرين لها الصورة الاتية

$$Au_{xx} + Bu_{yy} + cu_{yy} + Du_x + Eu_y + fu = G \dots .(1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G اما تكون الثوابت او دوال متصلة في المتغيرين X, Y فمثلا

$u_{tt} = e^{-1}u_{xx} + \sin t = 0$ خطية

$\mathrm{uu_{xx}} + u_1 = 0$ غير خطية

$u_{xx} + yu_{yy} = 0$خطية

١-٢-٤ المعادلة التجانس

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة اذا كانت $g(x, y) = 0$وتسمى غير متجانسة اذا كانت $g(x, y) \neq 0$

$xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ متجانسة

$sinx\, u_x + cosx\, u_y = \ln_x$ غير متجانسة

$$g(x,y) = \ln$$

5-2-1انواع المعاملات

اذا كانت المعاملات A, B, C, D, E, F, G في المعادلة (١) ثوابت فان المعادلة (١) تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات ثابتة واما اذا كان واحد من المعاملات او اكثر دالة في *x,y* وكلاهما ذات معاملات متغيرة

٣-١ الانواع الثلاثة الاساسية للمعادلات الخطية

المعادلات التفاضلية الخطية التي على الصورة (١) لها ثلاثة انواع [3]

١-النوع المكافئ(parabolic) اذا كانت

$$B^2 - 4AC = 0$$

٢- النوع التزايدي(Hyperbolic):اذا كانت

$$B^2 - 4AC > 0$$

٣- النوع التناقصي(elliptic): اذا كانت

$$B^2 - 4AC < 0$$

ومن الامثلة ذلك

(I)$u_t = u_{xx}$

نجد ان $A = 1$

$$B = 0$$

$$C = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0$$

أي انها PARBOLIC(تكافئ)

$$(II)u_{tt} = u_{xx}$$

نجد ان $A = -C = B = 0$

$$B^2 - 4AC = 4 > 0$$

أي انها hyperbolic

$$(III)u_{xy} = 0$$

نجد ان $A = C = 0, B = 1$

$$B^2 - 4AC = 1 > 0$$

أي انها hyperbolic

$$(iv)au_{xx} + u_{yy} = 0$$

نجد ان $A = \alpha , B = 0 \ , C = 1$

$$B^2 - 4AC = -4\alpha$$

فتكون من النوع التناقضي اذا كان $0 < \alpha$من النوع المكافئ اذا كان $\alpha = 0$من النوع الزائدي اذا كان$\alpha > 0$

ويجب ملاحظة انة حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات المتغيرة فان نوع المعادلة قد يتغير من نقطة الى اخرى

١-٤ تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية

تتكون المعادلة التفاضلية [3]

١-بحذف الثوابت الاختيارية

٢-بحذف الدوال الاختيارية

اولا:حذف الثوابت الاختيارية

مثال١ / احذف الثوابت الاختيارية من المعادلة

$$Z = ax + (1 - a)y + b$$

$$z_x = a = p, z_y = 1 - a = q$$

$$p + q = 1$$

$$z_x + z_y = 1$$

ملاحظة: اذا كانت عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عدد المتغيرات المستقلة فان رتبة المعادلة (او المعادلات)التفاضلية الجزئية الناتجة اعلى من الرتبة الاولى كما يتضح ذلك في المثال التالي

مثال٢ /احذف الثوابت a,b,c من المعادلة

$$z = ax + by + cxy$$

الحل:

$$z_x = p = a + cy \ , z_y = q = b + cx$$

ولكن هاتين المعادلتين بالاضافة الى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت وبذلك نشتق p بالنسبة الى xفنحصل على المعادلة من الرتبة الثانية

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ويمكن اشتقاق q بالنسبة y لنحصل على

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

يمكن ايضا اشتقاق p بالنسبة الى y او q بالنسبة x لنحصل على

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

وعلية يكون

$$b = q - xs \quad , a = p - ys$$

وبالتعويض a,b,c في المعادلة المفروضة نجد ان

$$z = (p - sy)x + (q - sx) + xys$$

$$= xp + yq - xys$$

وعلية يكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية وهي

$$r = 0 \, , t = 0 \ \ , z = xp + yq - xys$$

وهي معادلات من الرتبة الثانية

الفصل الثاني

((طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية))

<u>**طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية**</u>

٢-١: طرائق حل المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية

١-الطريقة المباشرة

يمكن تعيين الحل العام لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية بالمكاملة بالنسبة لأحد متحولاتها المستقلة.

نوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال: عيّن الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^{٢} U}{\partial X} - Xe^{y}$ والحل الخاص المحقق للشرطين: [6]

$$u(l,y) - siny\,, u(\cdot,y) - y^{٢}$$

الحل: بمكاملة طرفي المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ بالنسبة ليx نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{١}{٢}x^{٢}e^{y} + g_{١}(y)$$

حيث أن $g_{١}(y)$تابع اختياري للمتحول y فقط (لماذا)وبمكاملة طرفيي المعادلة الناتجة مرة أخرى بالنسبة ليx نحصل على:

$$u(x,y) - \frac{١}{٦}x^{٣}e^{y} + xg_{١}(y) + g_{٢}(y)$$

حيث أن $g_{٢}(y)$تابع اختياري للمتحول y فقط.

لتعيين الحل الخاص المحقق للشرطين الإضافيين لدينا:

$$u(\cdot,y) - y^{٢} - \cdot + \cdot + g_{٢}(y)$$

$$g_{٢}(y) - y^{٢}$$

$$u(١,y) - \sin y - \frac{١}{٦}e^{y} + g_{١} + y^{٢}$$

$$g_{١}(y) - \sin y - y^{٢} - \frac{١}{٦}e^{y}$$

وبالتالي يكون الحل الخاص الذي يحقق الشرطين هو:

$$u(x,y) - \frac{١}{٦}x^{٣}e^{y} + x\sin y - xy^{٢} - \frac{١}{٦}xe^{y} + y^{٢}$$

٢- طريقة فصل المتحولات ومبدأ التركيب الخطي

إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية متجانسة وذات أمثال ثابتة فيمكن إيجاد حلها بطريقة فصيل المتحولات ومبدأ التركيب الخطي الذي ينص علي أن: التركيب الخطي لعدد من حلول معادلة تفاضلية خطية متجانسة هو أيضا حل لها أما طريقة فصل المتحولات فتتلخص بما يلي[7]

١--نفرض أن متغير المعادلة (تابعها)مساوي لحاصل ضرب عدد مين التوابع حيث أن كل منها تابع لمتحول واحد فقط من المتحولات المستقلة التي يتبع لها هذا المتغير.

٢-نعوض عبارة الحل المفترضة في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة فنحصل بعد إجراء الفصل بين المتحولات على تناسب، كل نسبة من نسبه عبارة عن تيبع لمتحول مستقل واحد وبالتالي كل نسية من هذه النسب يجب أن تساوي مقدا أَر ثابتاً .

٣-من كل نسبة من النسب والثابت نحصل علي معادلة تفاضلية عادية بحيث أن عدد المعادلات التفاضلية العادية التي يمكن الحصول عليها يساوي عدد متحولات المعادلة المعطاة.

٤-نعيّن الحل العام لكل معادلة من المعادلات التفاضلية العادية التي حصلنا عليها.

٥-إذا أرفقت المعادلة التفاضلية بشرط إضافي أو أكثر فيمكن استخدامها في تعيين الثوابت وحل المسألة المؤلفة من المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الإضافية.

مثال: حل بطريقة فصل المتحولات المسألة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - ٠ \quad ; u(٠, y) - e^{٢y}$$

الحل: بما أن متغير المعادلة u تابع للمتحولين المستقلين x , y، أي$u - u(x, y)$ (لذا نضع

$u - u(x, y) - X(x).Y(y)$حيث أن $Y(y), X(x)$تابعين يطلب تعيينهما.

إن $\frac{\partial u}{\partial y} - X(x)Y`(y), \frac{\partial u}{\partial x} - X`(x)Y(y)$نعوض في المعادلة فنحصل على:

$$X`Y - XY` - 0$$

$$\frac{X`}{X} - \frac{Y`}{Y}$$

الطرف الأيسر في هذا التناسب تابع لـx فقط والطرف الأيمن تابع لـy فقط وهذا لا يتحقق مع كل x وكل y إلا إذا كان الطرفان مساويين لثابت ما وليكن λ، أي:

$$\frac{X`}{X} - \frac{Y`}{Y} - \boldsymbol{\lambda}$$

ينتج من هذا التناسب المعادلتين التفاضليتين العاديتين

التاليتين:المعادلة الاولى [6]

$$X` - \boldsymbol{\lambda x} = \mathbf{0}$$

لحلها نكتبها بالشكل:

$$\frac{dx}{X} - \boldsymbol{\lambda dx} = \mathbf{0}$$

وبالتالي

$$\ln X - \lambda x + \ln A$$

$$X = Ae^{٢x}$$

حيث أن A ثابت كيفي.

المعادلة الثانية:

$$y` - \boldsymbol{\lambda y} = \mathbf{0}$$

بحلها نحصل على:

$$Y = Be^{\boldsymbol{\lambda y}}$$

حيث أن B ثابت كيفي.

ينتج مما سبق أن:

$$u(X,Y) = X(x).Y(y)$$

$$= AB^{\lambda(x+y)}$$

$$= ce^{\lambda(x+y)}$$

$$u(٠,y) = e^{٢y} = ce^{٣y}$$

بالمطابقة نجد أن $\lambda - ٢, c - 1$

وبالتالي فا ن الحل المطلوب هو:

$$u(x,y) = e^{٢(x+y)}$$

٢-٢ايجاد حلول المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الاولى[8]

ستناول عددا من طرق في ايجاد الحلول معادلات المرتبة الاولى

٢-٢-١ طريقه لاكرانج

تستخدم هذا الطريقة لحل معادلة لاكرانج وهي من الصيغة

$$p(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\ \frac{\partial z}{\partial y}=R(X,Y,Z)\ \dots\dots(1)$$

واذا فرضنا ان $q=\frac{\partial z}{\partial y},p=\partial z/\partial x$ فتصبح المعادلة

بالصيغة الاتية

$$Pp+Qq=R\ \dots\dots.(2)$$

$$u(x,y,z)=a\ \dots\dots(3)$$

حيث aعدد ثابت باشتقاق (٣) باشتقاق بالنسبة ل x نحصل على ان

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\quad\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\ \ \frac{\partial z}{\partial x}\dots\dots.(4)$$

أي ان

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\ \dots\dots(5)$$

وبالطريقه نفسها اشتقاق (٣) بالنسبة الى y يتبع ان

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\ \dots\dots\dots\dots\dots.(6)$$

ويحل (٥) و(٦) بالنسبة الى q و p وبقيمتها اعلاه في معادلة (٢) نحصل على ان

$$p\ \frac{\partial u}{\partial x} + Q\ \frac{\partial u}{\partial y} + R\ \ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ldots\ldots..(7)$$

وبما ان

U(x,y,z)=0 فان

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\ dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \ldots\ldots\ldots.(8)$$

وبمقارنة معادلتي (٧) و (٨) نحصل على ان

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(9)$$

وهاتان المعادلتان تعرفان بمعادلتي لاكرانج التابعتين وتستخدم التحويل لمعادلة الاصلية (١) الى المعادلتين التفاضلتين اعتياديتين نجد *u=a* ثابت احدهما و *v=b*

ثابت الاخر ويكون الحل المعادلة الاصلية أي من الصيغ $u = \varphi$او

$v = \varphi$ و $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ حيث φ دالة اختيارية لاحظ المثال التالي

مثال /

حل المعادلة

$$x^2\ \frac{\partial z}{\partial x} + y^2\ \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

الحل

ان هذه المعادلة هي من صيغة معادلة لاكرانج وعلية يتبيع حلها من حل المعادلتين التابعتين لها أي من حل المعادلتين

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

حيث $R=Z^2, Q=Y^2, P=X^2$ أي ان

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{\partial y}{y^2}=\frac{\partial z}{z^2}$$

نجد $u=a$ من حل المعادلة الاولى $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$ الذي يساوي

$$x^{-1}=y^{-1}+a$$

أي ان $u=a=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$

نجد $v=b$ من حل المعادلة الثانية $\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}$ الذي يساوي

$$y^{-1}=z^{-1}+b$$

أي ان $v=b=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$

عندئذ يكون حل المعادلة الاصلية $u=\varphi$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$$

حيث φ دالة اختيارية يكون

$$\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-\frac{1}{y},\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=0$$

حيث φ دالة اختيارية

٢-٢-٢ معادلات من الصيغة $f(b,q)=0$

لحل المعادلات من الصيغة $\boldsymbol{f(b,q)=0}$ نفترض ان $z=ax+by+c$

عندئذ

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=a\ ,q=\frac{\partial z}{\partial y}=b$$

وبما ان $f(b,q)=0$ فان $f(a,b)=0$ وعلية فان

و الحل الكامل للمعادلة $f(b,q)=0$ هو

$z-ax+by+c$ بحيث ان $f(b,q)=0$

مثال:

حل المعادلة

$$p^2+p=q^2$$

الحل :

$f(p,q)=p^2+p-q^2$ اي ان $p^2+p-q^2=0$

نفترض ان

$$z=qx+by+c$$

بما ان a,b ويحققان المعادلة $f(a,b)=0$ فان

$$a^2+a-b^2=0$$

لذا فان $b^2 = a^2 + a$ وعلية يكون الحل الكامل للمعادلة الاصلية هو

$$z = ax \pm (a^2 + a)^{\frac{1}{2}} y + c$$

حيث a,c ثابتان اختياريان

الفصل الثالث

((تطبيقات المعادلات التفاضلية

الجزئية))

تطبيقات المعادلات التفاضلية الجزئية

٣-١ المقدمة

خلال سنوات الاخيرة ازدادت اهمية دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية لدورها في حل العديد من المسائل المختلفة وفي مختلف المجالات فمعظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل سريان الموائع الكهربائيات البصريات او سريان الحرارة يمكن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية وفي الحقيقة ان معظم فيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية

وعلى رغم تبسيطات تحول معادلات قيد الدرس الى معادلات تفاضلية اعتيادية الا ان الوصف الكامل لهذا المنومات يقع ضمن المجال العام للمعادلات التفاضلية الجزئية تستخدم المعادلات التفاضلية عاده في مسائل التطبيقية التالية

يتضمن هذا الفصل اهم تطبيقات حول المعادلات التفاضلية الجزئية لمعادلة الموجة وجريان الحرارة خلال الاجسام مع بعض الامثلة التطبيقية

٢-١-١ معادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

احادية البعد

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{c^2}\right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ثنائية البعد

٣-١-٢ معادلة سريان الحرارة

$$\frac{\partial^2 u}{d x^2} = \left[\frac{1}{k}\right] \ \frac{du}{dt}$$

احادية البعد

$$\nabla u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{k}\right] \frac{\partial u}{dt}$$

ثنائية البعد

٣-١-٣ معادلة لابلاس

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\partial^2 u}}{\boldsymbol{\partial x^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2 u}}{\boldsymbol{\partial y^2}} = \boldsymbol{0}$$

4-1-3 معادلة يوسوان

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x)$$

5-1-3معادلة البث

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = l \ \frac{\partial l}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{x} = c\frac{\partial v}{\partial t}$$

حيث ان v هو الجهد و i هو التيار و l هو معامل الحث

٣-٢استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية [9]

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عاده في المسائل التطبيقية التالية-:

١/معادلة الموجة

تطبيق -:

خيط طوله L مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل واعلي لمسافتين متساويين من نقطتين علي بعد متساوي من الطرفين كما في الشكل إستنتج تعبير عن إزاحة الخيط عند أي زمن t واثبت أن الإزاحة صفر عند نقطه المنتصف.

الحل :

عند أي نقطه تحقق المعادلة(1)................... $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

الازاحة y(x,t)

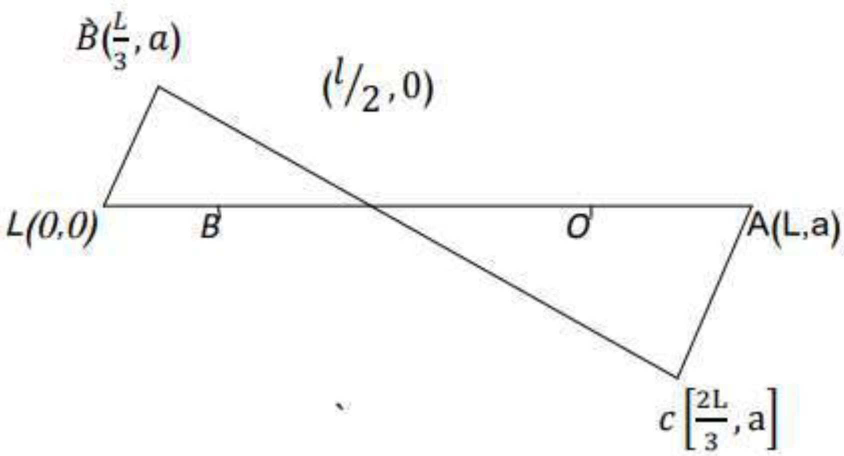
والشروط الحدية

$$y(0,t) = 0 \qquad , y(l,t) = 0 \ldots \ldots .(2)$$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} \dots\dots\dots(3)$$

باقي الشروط عنده t=0 يكون الخيط هو مبين بالشكل `B`C`A`معادلة

OB` هي



معادلة `B`C هي

$$Y=\frac{3a}{t}x$$

معادلة `c`A هي

$$\frac{y-0}{x-\frac{l}{3}}=\frac{0-(-a)}{\frac{l}{3}-\frac{2l}{3}}$$

$$y=\frac{3a}{l}(l-2x)$$

وعلية يكون

$$y(x,0) =$$

$$\frac{3a}{l}\begin{bmatrix} x & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ (l-2x) & \frac{1}{3}l \le x \le \frac{2}{3}l \\ (x-l) & \frac{2}{3}l \le x \le l \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

حل المعادلة (١) تحت الشروط الحدية (٢) و (٣) هي

$$y(x,0) = \frac{3a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} B_N \sin\,(\,n\pi/l\,)\cos(\frac{n\pi c}{l}\,t)$$

$$y(x,0) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

باستخدام متسلسلة فورية تحصل على

$$B_n = \frac{2}{l}\left\{\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{1}{3}} x \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\right.$$

$$+\int_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}} (l-2x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$+\int_{\frac{2l}{3}}^{l}(x-l)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\}\left(\frac{3a}{l}\right)$$

نلاحظ ان

$$\int xsin(mx)dx=-\frac{1}{m}xcos(mx)+\frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(l-2x)\sin(mx)\,dx$$

$$=-\frac{1}{m}(l-2x)\cos(mx)-\frac{2}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(x-l)\sin(mx)\,dx=-\frac{1}{m}(x-l)\cos(mx)+\frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

وعلي ذلك فان

$$\frac{l^2}{6a}-B_n=\left\{\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)-\frac{l}{n\pi}xcos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}_0^{\frac{l}{3}}$$

$$\left\{-\frac{2l^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)-\frac{l}{n\pi}(1-2x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}}$$

$$+\left\{-\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{N}^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi\pi x}{l}\right)-\frac{l}{n\pi}(x-1)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}_{\frac{2l}{3}}^{\frac{l}{3}}$$

$$=\frac{\mathrm{l}^2}{\mathrm{n}^2\pi^2}\left\{\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{2\mathrm{n}\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\mathrm{n}\pi}{3}\right)\right\}-$$

$$\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{n}\pi}\left[\frac{\mathrm{l}}{3}\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{3}\right)-\frac{\mathrm{l}}{3}\cos(2\mathrm{n}\pi)-\frac{\mathrm{l}}{3}\cos\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{3}\right)+\frac{\mathrm{l}}{3}\cos\left(\frac{2\mathrm{n}\pi}{3}\right)\right]$$

$$B_n = \frac{18a}{n^2\pi^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{18a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)[1+(-1)^n]$$

$$B_N = \left[\begin{array}{c} \frac{36a}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \\ 0 \end{array}\right.$$

$$y = (x,t) = \sum_{n=2,3} \frac{36a}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

$$m = 1,2,3,\ldots\ldots, n = 2m$$

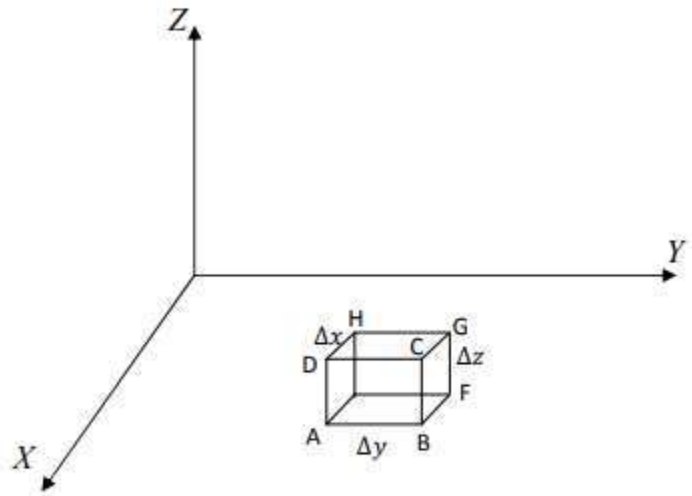
$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9a}{m^2\pi^2}\sin\left(\frac{2m\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2m\pi}{l}x\right)\cos\frac{2m\pi ct}{l}$$

بوضع $x = \frac{1}{2}l$ نجد ان

$$y(x,t) = 0 \rightarrow y\left(\frac{1}{2}l, t\right) = 0$$

٢ / جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ

ان أفضل مثال لتكوين المعادلات التفاضلية الجزئية هو في تصور جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ كما يوضح ذلك الشكل أدناه ويجب الأخذ بعين الاعتبار الحقائق التالية:



.1إن جريان الحرارة يحدث باتجاه تناقص الحرارة .

2. معدل جريان الحرارة خلال مساحة معينة يتناسب مع إنحدار الحرارة بالدرجات لوحدة المساحة وفي اتجاه عمودي علي تلك المساحة .

.3كميه الحرارة المكتسبة من قبل النظام المفقود من الجسم تتناسب مع كتله الجسم درجة الحرارة.

إن ثابت التناسب في نقطه (٢)يسمي بمعامل التوصل الحراري(k) يسمي الحرارة النوعية للمادة(c)

وآلات تغير الظروف الحرارية في مقطع محدد من معدن موصل للحرارة كما في الشكل أعلاه إذا كانت كتله المعدن لوحده الحجم أو ا يعرف فيزيائيا بالكثافة (p) فان تغير كتله المقطع هو

$$\Delta m = p\Delta xyz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(5)$$

ومن جهة أخري إذا كانت t هي درجه الحرارة عند أي زمن و إذا كانت يب Δهي التغير بدرجه الحرارة الذي يحدث خلال مقطع في فتره زمنيه معينه محدده هي Δθ فإن كميه الحراره المحفوظه في المقطع عن الفترة الزمنية هي:

$$\Delta H = C.\Delta M\Delta.\Delta T = C.P(\Delta X.\Delta Y.\Delta Z) \ldots\ldots\ldots..(6)$$

أما معدل الحرارة التي يكتسبها النظام هي

$$P\ \frac{\Delta H}{\Delta\theta} = c\Delta x\Delta y\Delta z$$

حيث إن θ هو الزمن التي تسمي أيضا الحرارة المتراكمة أو المتجمعة في الجسم .

إن الحرارة التي تتولد نتيجة التغير في يب Δtتاتي من مصدرين هما:-

المصدر الأول:-

يمكن توليد الحرارة خلال الجسم بواسطة وسائل كهربائية أو كيميائية لحظية عند معدل معلوم مثل

$f(x,y,z,\theta)$وان المعدل الذي تصل فيه الحرارة إلي المقطع من هذا المصدر سيكون:

$$f(x,y,z,\theta)\Delta x\Delta y\Delta z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

المصدر الثاني :

هو الحرارة المكتسبة من انتقال الحرارة المفترد خلال أوجه المقطع المختلفة

.إن الصيغة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال مساحه معينه يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$-kA\ \frac{dT}{dx} \dots\dots\dots\dots. (7)$$

وعلي هذا الأساس فإن كميه الحرارة المنتقلة خلال المقطع $X(ADHL)$

هي ولذا فإن صافي التدفق الحراري

$$-K\Delta Y\Delta Z \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}}$$

وخلال نهاية المقطع $X + \Delta X$

هي |

$$-K\Delta Y\Delta Z\ \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\mathrm{x+\Delta x}}$$

ولذا فان الصافي التدفق الحراري

$$-K\Delta Y\Delta Z\ \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{\mathrm{y}}\quad - \left[-K\Delta Y\Delta Z\ \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{\mathrm{y+\Delta y}}\right.$$

$$= K\Delta Y\Delta Z\ \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{\mathrm{y}} - K\Delta Y\Delta Z\ \left[\frac{\partial \mathrm{t}}{\partial \mathrm{x}}\right]_{\mathrm{x+\Delta x}} - \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\mathrm{x}} \dots.. (8)$$

إن الاشاره السالبة تعني أن التدفق الحراري يحدث باتجاه نقصان درجه الحرارة ويمكن تكوين معادلات تفاضلية بنفس الحالة في اتجاهين y وz

$$-K\Delta Y\Delta Z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}-\left[K\Delta Y\Delta Z\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y+\Delta y}$$

$$=k\Delta x\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-k\Delta x\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}\right]\ \ldots.(9)$$

وفي اتجاه z يكون التدفق الحراري بصيغته النهاية علي الصورة التالية:

$$-k\Delta x\Delta zy\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}-\left[-k\Delta x\Delta y\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right]$$

$$=k\Delta x\Delta y\left[\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-k\Delta x\Delta y\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right]\ldots\ldots..(10)$$

وبموجب قانون حفظ الكتلة الطاقة فإن (الدخل - الخارج = المتراكم)

(in-out =Accnmulation) نجد ان

صافي تدفق الحرارة في مقطع الجسم + الحرارة المتولدة في المقطع = المتراكم الحراري .

بالتعويض عن كل صيغه بما يساويها من المعادلات أعلاه ينتج أن:

$$k\Delta y\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x+\Delta x\Delta}-\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x}\right]+k\Delta x\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y+\Delta y\Delta}-\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}\right]$$

$$+k\Delta x\Delta y\left[\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right]+f(x,y,z,\theta)$$

$$=pc\Delta x\Delta yz\frac{\partial t}{\partial \theta}\ldots..(11)$$

إن الرمز $f(x,y,z,\theta)$ سيتم يغيره إلي q^0 إي كميه الحرارة المتولدة من الجسم وستصبح المعادلة (١١)بعد قسمه جميع الحدود علي المقدارΔ xΔ yΔz بالشكل التالي:

$$k\left[\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{X+\Delta x}-\left.\frac{\partial T}{\partial X}\right|_{X}}{\Delta X}+\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y+\Delta Y}-\left.\frac{\partial T}{\partial Y}\right|_{Y}}{\Delta Y}+\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{Z+\Delta Z}-\left.\frac{\partial T}{\partial Z}\right|_{Z}}{\Delta Z}\right]+q^0$$

$$=cp\frac{\partial t}{\partial \theta}\ldots\ldots(13)$$

وباخذ النهايات $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من الصفر ومن تعريف المشتقة نستنتج ان عندما تقترب كل

$$k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}\right]+q^2=pc\frac{\partial T}{\partial \theta}\ldots\ldots..(13)$$

وبقسمة طرفي المعادلة علي الثابت k نحصل علي

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}+\frac{q^0}{k}=\frac{1\partial T}{\alpha\partial 0}\ldots\ldots\ldots\ldots.(14)$$

حيث ان

$$\alpha=\frac{K}{PC}$$

أو بما يعرف بمعامل الانتشار الحراري. وتمثل المعادلة (١٤)المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية الثلاثية الإبعاد.

References

1-Dennis G.zill (15 march 2012)A first course in differential Equations with modeling cengage

2-cannon ,john .T.Dostrovsky ,sigalia (1981)the evolution of dynamics ,vibration theory from 1687 to 1742

المصادر العربية

٣-حسن العويضي و معادلات تفاضلية وبيروت –مكتبة الرشيد –الجزء الثاني

٤- د.حسن مصطفى العويضي -معادلات تفاضلية –الجزء الثاني –مكتبة الرشيد –بيروت - ٢٠٠٥م

٥-د.عطا لله العاني –مقدمة معادلات التفاضلية الجزئية –وزارة التعليم العالي والبحث العلمي –جامعة بغداد – كلية التربية ابن هيثم (١٩٩٠)

٦-بوقفة ,اسماعيل ,عائش الهنداوي ,٢٠٠١-معادلات التفاضلية العادية وحلول تطبيقاتها

٧- ريشتاد برتسون,٢٠٠١ –سلسة شوم في المعادلات التفاضلية –ترجمه فائزة فوق العائدة ,الطبعة الاولى ,القاهرة

٨-الدكتور عطاالله ثامر العاني –مقدمة الى معادلات تفاضلية الجزئية -جامعة بغداد –كلية التربية الثانية ابن هيثم -١٩٩٠

٩-الاستاذ عمر الخليل عثمان اسحق –مبادى المعادلات التفاضلية الجزئية –جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيه كلية التربية قسم العلوم -٢٠١٥ م