وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

العزوم والدوال المولدة للعزوم

بحث تخرج مقدم لمجلس كليه التربية للعلوم الصرفة / قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل شهاده البكالوريوس في الرياضيات

اعداد

حوراء غازي مجهول

أشراف

م م.حيدر فيصل غازي

١٤٤٥هـ ٢٠٢٤م

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

((وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا))

صدق الله العلي العظيم

الإهداء

الى...

امين الله وشمس الهدى أمام الخلق وبحر الندى الامام المهدي (عج)

إلى من سعى واشقى لأنعم بالراحة والهناء الذي لم يبخل عليه بشيء من أجل دفعي إلى طريق العلم والنجاح إلى (والدي العزيز)

إلى الينبوع الذي لا يمل العطاء إلى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها الى (أمي العزيزة)

إلى من علموني حروف وكلمات من درر وعبارات من أسمى واجل عبارات العلم (أساتذتي الكرام)

إلى من سرنا سويا ونحن نشق الطرق معا نحو النجاح والابداع إلى من تكاتفنا يدا بيد ونحن نقطف ثمرة هذا العمل اصدقائي وزملائي.

شكر وتقدير

نحمد الله عز وجل الذي وفقنا في اتمام البحث العلمي الذي الهمنا الصحة والعافية والعزيمة.

واتقدم بالشكر والتقدير إلى استاذي الفاضل حيدر فيصل الذي تفضل بأشرافه على هذا البحث وكل ما قدمه لي من دعم وتوجيه وإرشاد لإتمام هذا العمل على ما هو عليه فله اسم عبارات الثناء والتقدير.

والشكر إلى جميع اساتذة كلية التربية للعلوم الصرفة

المحتويات

المقدمة

الإحصاء علم ذو أهمية بالغة له طرائقه العلمية المتطورة وقوانينه ونظرياته المتطورة التي تجعله أساس لكثير من العلوم الأخرى وقاعدة متينة لتطورها الإحصاء علم له العديد من الوظائف المتطورة التي تساهم في التقدم والرقي ، فهو يشكل في إطاره العام أدق وأفضل أسلوب للبحث العلمي الخلاق

الهدف من دراسة مادة الاحصاء

يهتم علم الإحصاء بجمع وتلخيص وتمثيل وإيجاد استنتاجات من مجموعة البيانات المتوفرة، محاولا التغلب على مشاكل مثل عدم تجانس البيانات وتباعدها. كل هذا يجعله ذا أهمية تطبيقية واسعة في شتى مجالات العلوم

من الفيزياء إلى العلوم الاجتماعية وحتى الإنسانية، كما يلعب دورًا في السياسة والأعمال.

اول من اخترع الاحصاء

وضع الكندي أول استخدام معروف للاستدلال الإحصائي، وطور الأساليب الإحصائية المبكرة لفك تشفير الرسائل المشفرة. كانت مساهمة ابن عدلان (1187 - 1268) في حجم العينة مهمة لاستخدام تحليل التردد .

وقد ارتبط مفهم الإحصاء في بداية ظهوره بداية القرن الثامن عشر - بالمجموعات المنهجية الديموغرافية والبيانات الاقتصادية للدول، وبعد ذلك توسع ليشمل كل المجالات التي تحتوي على بيانات أو معلومات؛ بحيث يساعد علم الإحصاء في جمع هذه البيانات وتحليلها وترتيبها .

يتم استخدام نوعين من أنواع علم الإحصاء في تحليل البيانات: الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستنتاجي.

أنواع وفروع علم الإحصاء:

يُصنف علم الإحصاء إلى نوعين رئيسين، أو فرعين أساسيين، هما:

١. الإحصاء الوصفي:

ويُعرف هذا النوع من الإحصاء على أنه الطريقة التي يتم استخدامها في عرض وتفسير وتنظيم ووصف وتبويب البيانات عن طريق الجداول والمخططات والرسوم البيانية، بأساليب ونماذج سهلة وبسيطة تراعي الحدود المعرفية لعقل الإنسان واستيعابه.

ويعتمد على المقاييس الإحصائية المتعددة، مثل مقاييس التشتت، ومقاييس النزعة المركزية، وأي أسلوب آخر

توصل إليه المختصون في هذا المجال، من أجل وصف الميزات والخصائص.

ومن المجالات التي يستخدم فيها الإحصاء الوصفي الدراسات الأكاديمية، والأعمال الميدانية، وتقييم البحوث العلمية، وفي البحوث العلمية الخاصة بالقطاع الحكومي.

وفي إطار الحديث عن أقسام علم الإحصاء وتعريف الإحصاء الوصفي، من الجدير بالذكر أن هذا النوع من الإحصاء يهدف إلى:

إعطاء وصف دقيق ومحدد للبيانات والمعلومات التي تكون عينات عشوائية.

تمثيل البيانات والمعلومات بقيم عددية ذات مدلولات هامة مثل المتوسط الحسابي، والوسيط والانحراف المعياري.

الوصول إلى تحديد طبيعة العينة المأخوذ منها تلك البيانات والمعلومات، والممثلة بتلك القيم، بعد تحليلها وتجميعها.

٢. الإحصاء الاستدلالي:

قد يُسمى هذا النوع من الإحصاء بالإحصاء الاستنتاجي، أو الإحصاء التحليلي، ويعرف بأنه مجموعة من العمليات الإحصائية التي تهدف إلى الوصول إلى الخصائص والصفات التي يتميز بها البحث موضع الدراسة أو أفراد مجتمع الدراسة.

ويتم ذلك بتطبيق الدراسة الإحصائية على عينة تمثل مجتمع الدراسة؛ وذلك بسبب عدم إمكان دراسة وحصر هذا المجتمع كاملاً إذا كان تعداد أفراده هائلاً.

وهكذا يتم استخدام الإحصاء الاستدلالي، للاستدلال عن هذا المجتمع المدروس، من أجل الوصول إلى قيم عددية تعبر عن صفاته إلى حد ما، وذلك باستخدام بيانات العينة المأخوذة عشوائياً.

يقوم الإحصاء الاستدلالي على تحليل المعطيات (بيانات أو معلومات)، ليقوم بعد ذلك بتفسيرها بناءً على دراسة أسباب تأثيراتها ومناقشة هذه التأثيرات والعوامل الإيجابية والسلبية المتعلقة بها، وبذلك يتيح الإحصاء الاستدلالي للباحث فرصة لإصدار أحكامه، كما يمكنه من التنبؤ، وغير ذلك من الأمور.

علاوة على أن الطرائق المتبعة في الإحصاء الاستدلالي، تعطي القدرة على تحديد أثر كل عامل من العوامل المختلفة، في سلوك أفراد المجتمع الإحصائي موضع الدراسة، كما يمكن التحكم بهذه العوامل وضبطها أيضاً.

ثم إن الإحصاء الاستدلالي، كأحد أقسام علم الإحصاء، ينقسم بدوره أيضاً إلى قسمين أساسيين هما:

التقدير الإحصائي: يشير إلى طرائق التعرف إلى المجتمع المجهول المختص بالدراسة، والتي تكون ذات علاقة متينة مع مشكلة البحث.

الفروض الإحصائية: تقوم على وضع افتراضات من قبل الباحث، ثم يتم فحص مدى صحة هذه الافتراضات إحصائياً.

وللإحصاء الاستدلالي ميزة مهمة، ألا وهي أنه يمنح الباحث أدوات تسهل عليه مهمته البحثية، وسعيه إلى إيجاد
كل المعلومات المطلوبة.

الفصل الاول

١-١ المقدمة

في جميع الدراسات والبحوث الإحصائية يتحتم علينا التعرف على سلوك المتغير العشوائي وفي كل من التوزيعات المتقطعة والمستمرة ولذلك لزاماً علينا التعرف أو استخراج العزوم الأربعة التي ممكن الحصول عليها إما من خلال معرفة التوزيع الاحتمالي Probability distribution أو من خلال الدوال المولدة للعزوم. والعزوم هي:

1. **الوسط الحسابي أو التوقع.**
2. **التباين.**
3. **معامل الالتواء.**
4. **معامل التفلطح.**

١-٢ العزوم The moment

تعتبر طريقة العزوم من اقدم طرق التقدير. وتتلخص في استبدال عزوم المجتمع بعزوم معينة. فإذا كان X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي $f(X, \Phi)$ تعتمد على K محصلة مجهولة $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_k$ ، فإنه يمكن التعبير عن عزوم المجتمع K الاول بدلالة هذه المعالم فنحن نعلم ان $Mr = E(x^r)$ $r = 1,2,3,\ldots\ldots,k$

وعادة تكون هذه العزوم دوال في المعالم Θ اين ان $Mr' = Mr'(\Theta)$ واذا كانت $(X_1,X_2,\ldots..,X_k)$ عينة عشوائية مختاره من هذا التوزيع فإن عزوم العينة K الاول هي Mr'

$= 1/n \sum_X r$; $r = 1,2,3,\ldots\ldots,K$

وبمساواة عزوم المجتمع بما ناظرها من عزوم العينة فإننا نحمل على المعادلات $Mr' = Mr'(\Theta)$

, $r = 1,2,3,\ldots,K$

وهذه K معادلة في مجهول $\Phi_1, \Phi_2\ldots.. \Phi_k$ وبحل هذه المعادلات نحصل على المقدرات $\Phi =$ $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots \Phi_k)$ والتي يطلق عليها مقدرات العزوم للمعالم .

ان طريقة العزوم تؤدي الى مقدرات بسيطة نسبياً. وواضح ان المعدلات التي نحصل عليها من هذه الطريقة هي دوال في عزوم العينة.

١-٣ التوقع الرياضي

كتسلسل علمي توجد عدة مفاهيم لها علاقة وطيدة بدراسة العمليات العشوائية (التصادفية) ومنها:

1. الاحتمال الشرطي.
2. دالة التوزيع الشرطي.
3. التوقع وبالأخص التوقع الشرطي، وبالعودة للسؤال (ماذا يعني التوقع) فهو القيمة المتوقعة لقيمة المتوسط النظري μ للمجتمع قيد الدراسة.

ويعرف التوقع رياضياً بأنه إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ القيم $X_n, \ldots, X_2, X_1$ ولقيم احتمالية مناظرة $P(x_n), \ldots, P(x_2), P(x_1)$ على التوالي، ولذلك تكون القيمة المتوقعة:

$$E(X) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \cdots + x_n P(x_n)$$

وبصيغة مختصرة:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

والصيغة أعلاه تمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتقطع X.

أما إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي مستمراً فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X وفقاً للصيغة الآتية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

ويجب أن لا ننسى فضل التوقع لأي متغير عشوائي والتباين (الذي ممكن الوصول لاستخراج قيمته عند معرفة القيمة المتوقعة لأي متغير عشوائي). ففي أي عمل إحصائي وعندما يتطلب الأمر معرفة سلوك المتغير العشوائي أو اقتفاء أثر أي متغير عشوائي، فذلك لا يتم إلا بالتعرف على هذين المقياسين (التوقع والتباين)، ويمكن إيجاد التباين وبواسطة العلاقة الآتية:

$$Var\,(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

ويتم استخراج الحد الأول من العلاقة أعلاه كما يلي:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x)$$

إذ كان المتغير العشوائي متقطع.

أما إذا كان التوزيع مستمر للمتغير العشوائي فيكون كما يلي:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2\, f(x)dx$$

وللتوقع صفات ندرج منها ما يلي:

نظرية: إذا كان y ، x متغيرين عشوائيين مستقلين، لنفس فضاء العينة و k عدد حقيقي فيكون:

1. $E[kX] = k\,.E(X)$
2. $E[X+k] = E(X) + k$
3. $E[X+Y] = E(X) + E(Y)$
4. $E[g(y)] = \sum g(y).f(y)$

نتيجة: افترض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغيرات عشوائية ولنفس فضاء العينة فيكون:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

١ – ٤ التوقع الشرطي Conditional Expectation

مفهوم التوقع الشرطي له استخدامات إحصائية مهمة منها:

أولاً: إن للتوقع الشرطي دوراً مهماً في الإجابة على كثير من مشاكل التنبؤ وبصورة عامة في تحليل السلاسل الزمنية وفي نظرية اتخاذ القرارات الإحصائية عندما يتم توقع المتغير العشوائي في ظل تأثير متغيرات شرطية أخرى.

ثانياً: تكمن أهمية التوقع الشرطي في توفر الأساليب المطلوبة لتحليل المتغيرات العشوائية التابعة في سلسلة من الخطوات، وبشكل عام تأتي أهمية التوقع الشرطي من الخصائص الأساسية الآتية:

١. نفرض X ، Y عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين توزيعاً مشتركاً وأن الدالة تمثلها g(x,y) وهي عبارة عن دالة ذات متغيرين. نفترض أن E(Y) محدود وأن X ذا توزيع متقطع كما نفترض أن $E[Y|X=x]$ تمثل توقع Y. إذا علمت أن X=x (يعرف هذا المفهوم في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة المشتركة وفقاً للصيغة الآتية):

$$E[Y|X=x] = \sum y\, P_{y|x}\,(y|x)$$

وبصورة عامة يمكن تمثيل $E[Y]$ كما يلي:

$$E[Y] = \sum_{over\ x} E[Y|X = x]\ P_x\ (x)$$

وبعبارة ثانية يمكن الحصول على متوسط Y غير المشروط من خلال معرفة توقع X المشروط، إذا علمت قيم Y لجميع قيم x في حالة $P_x(x) > 0$.

٢. إذا كان كل من X، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فيكون التوقع بالصيغة الآتية:

$$E[Y|X = x] = E[Y]$$

وبعبارة أخرى فالتوقع الشرطي $E[Y|X = x]$ لا يعتمد على قيم x ويساوي المتوسط غير الشرطي $E[Y]$ إذا كان كلاً من $X\ , Y$ مستقلين ولجميع قيم x بحيث يكون $P_x\ (x) > 0$.

٣. لإيجاد دالة مثل $g(.\ ,\ .)$ بحيث يكون التوقع $E[g(x,y)]$ ذو قيمة حقيقية وكما في المعادلة التالية:

$$E[g(x,y)|X = x] = E[g(x,y)|X = x]^{-} \quad ....(a)$$

ولحل المعادلة في a نفرض أن $U = g(x,y)$ ، $V = g(x,y)$ وأن $g(x,y)$ عبارة عن دالة لـ Y فقط (لأي عدد حقيقي معلوم x).

ومعنى الدالة a هو المتوسط الشرطي لـ U إذا علمت أن X=x يساوي المتوسط الشرطي لـ V إذا علمت أن X=x ونلخص ما تقدم في محورين:

أولاً: التوزيعات المتقطعة: بشكل عام يمكن تلخيص ما تقدم وخاصة بالتوزيعات المتقطعة المعادلة الآتية:

$$E[g(x,y)] = \sum_{i=1}^{\infty} E[g(x,y)|X = x]\, P_r(Y = y_i)$$

ثانياً: التوزيعات المستمرة: التوقع الشرطي (المتوسط الشرطي) للدالة بين (X,Y) للفرضية التي تؤكد وجود قيم المتغير X=x فيكون كما يلي:

$$E[g(x,y)|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{y/x}(y|x)\ dy$$

$$E[g(x,y)|X=x] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ f(x,y)\ dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy}$$

$$E[g(x,y)|X=x] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\ f(x,y)\ dy}{f_1(x)}$$

بشرط أن التكامل للجانب الأيمن يمكن تحقيقه.

ويمكن صياغة المعادلات لحساب التوقع الشرطي والتباين الشرطي لقيم معطاة للمتغير $X = x$ كما يلي:

$$E[Y|X=x] = m_2(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\ f(x,y)\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy}$$

$$E[Y|X=x] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y\ f(x,y)\, dy}{f_1(x)}$$

ولهذا تكون معادلة التباين الشرطي كما يلي:

$$Var[Y|X=x] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [y - m_2(x)]^2\, f(x,y)\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy}$$

$$Var[Y|X=x] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [y - m_2(x)]^2\, f(x,y)\, dy}{f_1(x)}$$

١-٥ الدوال المولدة للعزوم Moment generating function

إذا كان X متغير عشوائي ويأخذ قيم صحيحة (Integer value) موجبة ضمن الدالة الآتية:

$$g(x) = \ t^x \quad , t \in [0,1]$$

وبأخذ التوقع للطرفين:

$$E[g(x)] = \ E[t^x]$$

وهذه المعادلة تمثل عدد الحوادث بين (٠) ، (١) وهي دالة إلى (t) وبافتراض أن:

$$G(t) = \ E[t^x] \quad \dots (b)$$

وبعد ذلك سوف نطلق على $G(t)$ بالدالة المولدة إلى X. وعندما t=1:

$$G(1) = \ E[1^x] = E(1) = 1$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمعادلة (b)

$$G'(t) = \ E[x\, t^{x-1}]$$

وعندما t=1

$$G'(1) = \ E(X) = mean = \ \mu$$

وعندما نحصل على المشتقة الثانية للمعادلة (b):

$$G''(t) = \ E[x(x-1)\ t^{x-2}]$$

وعند التعويض عن t=1:

$$G''(1) = \ E[x(x-1)] = E(X^2) - \ E(X)$$

وعند الحصول على المشتقة الثالثة من المشتقة الثانية:

$$G'''(t) = \ E[x(x-1)(x-2)\ t^{x-3}]$$

$$G'''(1) = \ E[x(x-1)(x-2)]$$

.

.

.

$$G^r(t) = \ E[x(x-1)(x-2) \dots .(x-r+1)t^{x-r}]$$

إذن نستنتج بعد ذلك أن:

$$E(X) = G'(1)$$

$$E(X^2) = G''(1) - G'(1)$$

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

مثال١: افترض عدد الواصلين إلى أحد المخازن لغرض التبضع خلال فترة زمنية محدد هو متغير عشوائي ولنفترضه (X) وتمثله دالة الكتلة الاحتمالية الآتية:

$$P(X = x) = \frac{e^{-8}\, 8^x}{x!} \qquad , x = 0,1,2, \ldots.$$

المطلوب: أوجد الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير ثم أوجد التوقع (الوسط الحسابي) والتباين له.

الحل:

$$P(X = x) = \frac{e^{-8}\, 8^x}{x!}$$

$$G(t) = E[t^x]$$

$$G(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \, \frac{e^{-8}\, 8^x}{x!}$$

$$G(t) = e^{-8} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(8t)^x}{x!}$$

$$G(t) = e^{-8}\, e^{8t} = e^{-8(1-t)}$$

يجب التأكد من أن $G(1) = 1$

$$G'(t) = 8\, e^{-8(1-t)} \qquad G'(t)|_{t=1} = 8 = \mu$$

$$G''(t) = 64\, e^{-8(1-t)} \qquad G''(t)|_{t=1} = 64$$

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$Var(X) = 64 + 8 - 64 = 8 = \sigma^2$$

وهذه هي إحدى خواص توزيع بواسون Poisson إذ يتساوى عنده الوسط الحسابي والتباين.

مثال٢: إذا كان X متغير عشوائي ويأخذ التوزيع الثنائي (binomial) وبمعلمتين p, n ويملك دالة التوزيع الاحتمالية الآتية:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad , x = 0, 1, 2, \dots, n$$

المطلوب: باستخدام الدالة المولدة للعزوم أوجد الوسط الحسابي والتباين.

الحل:

$$G(t) = E[t^x]$$

$$G(t) = \sum t^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$G(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pt)^x (1-p)^{n-x}$$

وباستخدام صيغة ثنائي الحدين الآتية:

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (a)^x (b)^{n-x}$$

$$\therefore G(t) = (pt + 1 - p)^n$$

$$\therefore G(t) = (pt + q)^n \qquad \dots..(k)$$

وللتأكد يجب أن نتحقق من:

$$G(1) = (p + q) \quad = 1$$

وبعد ذلك نأخذ المشتقة الأولى للمعادلة k لنحصل على E(X) أو μ

$$G'(t) = np(pt + q)^{n-1}$$

$$G'(1) = np = E(X) = \mu$$

وعند إيجاد المشتقة الثانية:

$$G''(t) = n(n-1)p^2[pt+q]^{n-2}$$

$$G''(1) = n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2$$

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

١-٦ انواع الدوال المولدة للعزوم :-

١-٦-١ الدالة المميزة **Characteristic Function**:-

هي دالة يمكن عن طريقها الحصول على جميع العزوم للمتغير و تختلف عن الدالة المولدة للعزوم من ناحية الدالة المميزة توجد دائماً من الناحية الرياضية بينما الدالة المولدة للعزوم قد لا توجد دائماً

فإذا كانت $\Phi(\Theta) = E(e^{-x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \; f(x)dx$

هي الدالة المولدة للعزوم للمتغير X الذي كثافته احتماله f(x)

$i=\sqrt{-1}$ ووضعنا $i\Theta$ بدلاً من Θ فإن :

$$E(e^{i\theta x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \quad f(x)dx = \Phi(\Theta)$$

تسمى الدالة المميزة وهذه الدالة تكون دائماً موجبة.

بعض خواص الدالة المميزة:

يمكن إدراج بعض خواص الدالة المميزة كما يلي:

$$\Psi_x(0) = 1 \qquad (1)$$

$$\Psi_x(-t) = \Psi_x(t) \qquad (2)$$

$$|\Psi_x(t)| \leq 1 \qquad (3)$$

(٤) يجب أن تكون مستمرة في t، $\Psi_x(t)$.

$$E(X^r) = \frac{1}{i^r}.\frac{\partial^r}{\partial t^r}\,\Psi_x(t)]_{t=0} \qquad (5)$$

(٦) يمكن تحديد دالة الكثافة الإحتمالية f(x) للمتغير العشوائي X الذي يمتلك الدالة المميزة $\Psi_x(t)$ بالشكل الآتي:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, \Psi_x(t)\, dt$$

كما يمكن تحديد نوع التوزيع الاحتمالي (متقطع أم مستمر) وفق الاختيار التالي:

يقال بأن التوزيع الاحتمالي مستمر إذا كان $\boldsymbol{Lim}_{c \to \infty} \frac{L\,c}{2\,c} = \mathbf{0}$ ، حيث أن:

$$Lc = \int_{-c}^{c} e^{itx}\ \Psi_x(t)\, dt$$

كما أن الفترة [-c,c] هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R.

وإلا فإنه يقال بأن التوزيع الاحتمالي متقطع.

مثال٣: ليكن X متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع بواسون بدالة الكتلة الاحتمالية:

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots}$$

فإن الدالة المميزة لهذا المتغير ستكون:

$$\boldsymbol{P(x) = E\left(e^{itx}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx}\, \lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!}}$$

$$\boldsymbol{= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!}}$$

وباستخدام المتساوية $\boldsymbol{e^{-k} = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{k^b}{b!}}$

$$\boldsymbol{\Psi_x(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})} \qquad \ldots (B)}$$

كما ويمكن استخراج الدالة المميزة من خلال العلاقة ما بين الدالة المميزة والدالة المولدة الاحتمالية لهذا المتغير، حيث أن الدالة المولدة الاحتمالية لتوزيع بواسون كما يلي:

$$\boldsymbol{G_x(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

وتبعاً لذلك تكون الدالة المميزة بالشكل:

$$\boldsymbol{\Psi_x(t) = e^{-\lambda(e^{it}-1)} = e^{-\lambda(1-e^{it})}}$$

وهي نفس الصيغة التي تم استخراجها آنفاً في المعادلة B.

مثال ٤ : ليكن X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الأسي بدالة كثافة إحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , x > 0$$

إن الدالة المميزة لهذا المتغير ستكون:

$$\Psi_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_0^\infty \lambda e^{itx} e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} \, dx$$

$$\Psi_x(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - it)}$$

كما يمكن استخدام العلاقة أعلاه ما بين الدالة المولدة والدالة المميزة

١-٦-٢ الدالة المولدة الاحتمالية probability Generating Function:-

ان مفهوم هذه الدالة المولدة يقترن بحالة المتغيرات العشوائية المتقطعة وهي لا تختلف بشيء عن الدالة المولدة للعزوم العاملية سوى انها ممكنة الاستخدام لتوليد عزوم التوزيعات المتقطعة كأسلوب بديل للدالة المولدة للعزوم حول نقطة الأصل . وعلى فرض ان .. , a_2 , a_1 , 1_0 تمثل سلسلة من الأعداد الحقيقية وان (t) دالة بدلالة بحيث ان :

$$A(t)= \sum_{x=0}^{\infty} a^k.t^k -h<t<h, h>0$$

عندئذ يقال أن (t)، هي دالة مولدة للسلسلة $)_k$ اذا كانت (t) ، متقاربة لجميع قيم المعرفة في الفترة | h h: واذا كان متغيراً عشوائياً غير سالب يسلك وفق دالة كتلة احتمالية) x = k . عندئذ اذا تم اختيار) x=k k=p فان

$$A(t)= \sum_{x=0}^{\infty} P(X).t^x=E(t^x)$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة (t) ، بالدالة المولدة الاحتمالية للمتغير :

ويلاحظ أن $(t = 1)$ طالما ان (x) ه   ي دالة كتلة احتمالية. وهذا يعني أن $A(t)$ متقاربة لجميع قيم المعرفة في الفترة (1) ويمكن الملاحظة و بسهولة العلاقة التي تربط ما بين)، $(t)\ M_x\ (t)$ وهي :

$$M_x(t)=Ee^{tx}=E(e^t)^x=A(e^t)$$

كذلك فأن

$$\left[\frac{d^r A(t)}{dt^r}\right] = A(r)\ (1) = M(r)\ (1) = E \prod_{j=1}^{r}(X-j+1)$$

١-٦-٣ الدالة المولدة للعزوم العاملية Factorial moment generating function:-

في حالة اختبار الدالة $0= (t)$, $(X) = \frac{tnlX}{t}$ عندئذٍ يمكن توليد العزم العاملي ذي المرتبة من خلال التعويض

عن (X) بـ — في

فأذا رمزنا للدالة المولدة للعزوم العاملية بالرمز (t) فذلك يعني ان

$$M(t)=Ee^{t.g(x)}=Ee^{\ t\frac{Xlnt}{t}} \quad .M(t)=1$$

x

$$Ee^{Xint}=Ee^{lnt}=Et^X=M_x(Int)$$

وباستخدام سلسلة مكلورين (ووفق الصيغة *) يمكن البيان ان :

$$M(t)=M_x\ (Int)=1+(lnt)\ EX+\frac{(lnt)2}{2i}\ EX^2\ (Int)2+\frac{(lnt)3}{3i}\ EX3+\ldots$$

و من خلال هذه السلسلة يمكن توضيح عملية توليد العزوم العاملية للتوزيع وعلى النحو الآتي:

بإيجاد المشتقة الأولى للدالة (t) نسبة الى نحصل على :

$$M'(t)=\frac{1}{t^2}EX+\frac{1-lnt}{t^2}EX^2+\frac{2lnt-(lnt)^2}{2!t^2}EX^3+o''(Int)$$

حيث (lnt) تشير إلى حدود لاحقة تمثل مشتقات من المرتبة الأولى تتضمن 1 بقوى عليا.

وبجعل ١ = نحصل على t= XE وبأيجاد المشتقة الثانية للدالة (t) نسبة الى نحصل على:

$$M(t)=\frac{1}{t^2}EX+\frac{1-Int}{t^2}EX^2+\frac{2lnt\ \ (lnt)^2}{2!t^2}EX^3+o''(Int)$$

حيث (lnt) تشير الى حدود لاحقة تمثل مشتقات من المرتبة الثانية تتضمن (1) بقوى عليا . وبجعل ١ = نحصل على :

$$M''(1)=-EX+EX^2=E X^2-EX$$

$$¿EX (X-1)$$

ووفق نفس الاجراء الموضح أعلاه يمكن البيان ايضا أن :

$$M''(1)=EX^3 - 3EX^2+2EX$$

$$¿EX (X-1)(X-2)$$

وهذا يعني أن العزم العاملي ذو المرتبة هو

$$M^r(1)=E \prod_{j=1}^{r}(x-j+1), r=1,2,3,\ldots$$

١-٧ العزوم حول الصفر Moments around the origin

يعرف العزم الرائي moments حول الصفر للمتغير x و يرمز له بالرمز M

اذا كان المتغير العشوائي متقطع

$$\mu'_r(x) = \sum_{i=1} x\, f(x) = E(x^r) \quad >>(1)$$

واذا كان المتغير مستمر >> (١) فاذا كان ١٠ فان

$$\mu'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f(x)dx = E(x) \quad >>(1)$$

فاذا كان r=0 فان:

$$\mu'_0(x) = \sum f(x) = 1$$

$$\mu'_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$\mu'_0 (x) = E(x^0) = 1 >>(2)$

هذا عن ان العزم الرائي حول الصفر يساوي واحد صحيح اما اذا كان r=١ فان :

$\mu'_1(x) = \sum_{i=1} x\, f(x)$

$\mu'_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$\mu'_1(x) = E(x) = \mu >>(3)$

اي ان العزم الأول حول الصفر ما هو الا القيمة المتوقعة او مما هو الا الوسط الحساب (القيمة المتوسطة) و هذه نتيجة مهمة .

وعموما فان العزم الرائي حول الصفر او (نقطة الاصل) بدلاله التوقع هو :

$\mu'_r(x) = E(x) >>(4)$

اي ان العزم الصفري حول الصفر ساوي العزم الصفري حول الوسط يساوي واحدا صحيحا

اذا كانت r=0 :

$\mu_1 (x) = 0 \;\; >>(11)$

لدينا نتيجة مهمة (وهي ان العزم الأول حول الوسط ساوي صفر).

وهذه النتيجة تتفق في مبادئ الاحصاء من ان مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحساب يساوي صفر

و يمكن توضيحها في الاتي

$\mu_1(x) = E(x - \mu)^1$

$= E(x) - E(\mu)$

$= E(x) - \mu$

$= \mu - \mu$

$= 0$

اما اذا كانت r=2 فان:

$\mu_2(x) = E[x - E(x)]^2 = \sigma^2 x \qquad >> (12)$

اي ان العزم الثاني حول الوسط هوه التباين . وهذه نتيجة مهمة ويمكن أن نكتب $\mu_2(x)$ بدلالة العزوم حول الصفر كما لي :

$\mu_2(x) = E(x - \mu'_1)^2$

$= E[x^2 - 2\mu_1 x + (\mu'_1)^2]$

$= E(x^2) - 2\mu'_1 E(x) + \mu'_1$

$= E(x^2) - 2\mu'^{\,2}_1 + \mu'^{\,2}_1$

$= E(x^2) - \mu'^{\,2}_1$

$= \mu'_2(x) - \mu_1^2(x) \quad >> (13)$

١-٨ العزوم حول الوسط Moments around the origin

يعرف العزم الرائي حول الوسط الحساب لمتغير عشوائي X الذي رمز له

بالرمز $\mu'_r(X)$ كما يلي.

$r(x) = \sum (x - \mu'_1)^r f(x) \quad >> (5)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^r f(x)\, dx \quad >> (5)$

اي ان العزوم حول الوسط الحساب بدلاله التوقع هي :

$$\mu_r(x) = E[x - \mu'_1]^r \quad >> (6)$$

و يمكن ان تكتب بالطريقة الاتيه:

$$\mu_r(x)= E[x - E(x)]^r \quad >> (7)$$

وبالإمكان كتابتها بطريقه ثالثة

$$\mu_r(x)= E[x - \mu]^r >>8$$

وذلك لان

$$\mu'_1(x) = E(x) = \mu$$

اذا كانت $r=٠$ فان:

$$\mu_0 (x) = 1 \quad >>> (9)$$

لذلك نستنتج ان:

$$\mu_0 (x) = \mu'_0 (x) = 1 \quad >>(10)$$

١-٩ معامل الالتواء Skewness Coefficient

عرف معامل الالتواء الذي رمز له بالرمز β_1 كما يلي:

$$\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$$

اي ان معامل الالتواء يساوي خارج قسمة مربع العزم الثالث حول الوسط على مكعب العزم الثاني حول الوسط (مكعب التباين) ويلاحظ ان معامل الالتواء حسب التعريف السابق كون موجب

الاشارة دائما ، اي ان لن يميز بين الالتواء الموجب والسالب . وذلك لان البسط هو مربع العزم الثالث حول الوسط سيكون موجب دائما . والمقام هو مكعب التباين الذي لا كون سالبا ابد حيث ان اقل قيمة للتباين هي صفر عندما لا يوجد اختلاف بين القيم (اي لا يوجد تباين بينهما) لذلك عدل هذا المعامل حتى ظهر ما اذا كان الالتواء موجبا أو سالبا، وذلك باخذ الجذر التربيعي ل β_1 و صبح معامل الالتواء المعدل الذي يرمز له بالرمز γ_1 كما يلي:

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \mu_3 \big/ \mu_2^{3/2} \qquad >>(20)$$

ومن هذا تضح ان إشارة γ_1 تتوقف على إشارة μ_3 (العزم الثالث حول الوسط) فاذا كانت موجبة كان الالتواء موجبا واذا كانت سالبة كان الالتواء سالبا (لاحظ ان معامل الالتواء للتوزيع الطبيعي يساوي صفر)

١-١٠ معامل التفرطح Kurtosis Coefficient

يعرف معامل التفرطح الذي يرمز له β_2

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \gg (21)$$

أي ان معامل التفرطح هوه خارج قسمه العزم الرابع حول الوسط على مربع العزم الثاني حول الوسط أي مربع التباين ويمكن ان عدل هذا المقياس باعتبار مدى التفرطح او (تدبب) التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي . بحيث معامل التفرطح للتوزيع الطبيعي يساوي ٣ فيكون معامل التفرطح المعدل الذي يرمز له بالرمز γ_2هو :

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 \gg (22)$$

فاذا كانت ٣ > β_2 تكون γ_2 موجبه . ويكون التوزيع تفرطح اما اذا كانت ٣ < β_2 تكون γ_2 سالبه . ويكون التوزيع مدبب

الفصل الثاني

١. جـد التوزيــع الاحتمــالي للمتغيــر العشــوائي الــذي يمتلــك الدالــة المميــزة $\varphi_x(t) =$ $e^{-t^2/2}$.

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it} \quad e^{t^2/2}\, dt = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itx)}\ dt$$

وبإكمال المربع للقوس فوق الأس داخل التكامل، فإنه يكون:

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+2ix)^2}\ \ dt$$

وباستخدام التحويل $Z = t + ix$ حيث أن $dZ = dt$

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}}\ \ dZ$$

وحيث أن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}}\ \ dZ = \sqrt{2\,\pi}$ فإن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}$ ولغرض تحديد نـوع التوزيـع الاحتمالي فإن $\frac{Lc}{2c} = \frac{1}{2c}.\frac{1}{2\,\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}}\ \ dZ$:

$$\lim_{c\to\infty} \frac{Lc}{2c} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{4\,\pi}.\lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{c}\right)\ \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad dZ = 0$$

وهـذا يعنـي بـأن الد\الــة f(x) هـي مسـتمرة التوزيـع عنـد أي قيمـة مـن قـيم X ضـمن الفتـرة $(-\infty,\infty)$ كما أن الدالة f(x) هي دالة محددة لأن:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \ dx \ \le\ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \ dx\ = 1$$

وبالنتيجة فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير X ستكون:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad\qquad -\infty < X < \infty$$

وهي دالة التوزيع الطبيعي بالمتوسط صفر والتباين واحد.

٢. أوجـد الوسـط الحسـابي والتبـاين للتوزيـع الأسـي المعـرف بالدالـة الإحتماليـة الآتيـة باستخدام الدالة المولدة العاملية$G_x(t)$.

$$f(x;\lambda) = f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

$$G_x(t) = E[t^x] = \int_{\forall x} t^x f(x;\lambda)\, d\{x\}$$

$$G_x(t) = \int_0^\infty t^x \lambda e^{-\lambda}\ \ d\{x\} = \lambda \int_0^\infty t^x\ e^{-\lambda x}\, d\{x\}$$

$$t^x = e^{x\, Ln\, t}$$

$$G_x(t) = \lambda \int_0^\infty e^{xLn\, t}\ e^{-\lambda x}\, d\{x\} = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - Ln\, t)}\ \ d\{x\}$$

$$G_x(t) = \frac{-\lambda}{\lambda - Ln\, t} \int_0^\infty e^{-x(\lambda - Ln\, t)}\ \ [-(\lambda - Ln\, t)]\, d\{x\}$$

$$G_x(t) = \frac{-\lambda}{\lambda - Ln\, t}\left[e^{-x(\lambda - Ln\, t)}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - Ln\, t}$$

$$G'_x(t) = \frac{\partial\, G_x(t)}{\partial\, t} = \frac{(\lambda - Ln\, t)(0) - \lambda\left(0 - \frac{1}{t}\right)}{(\lambda - Ln\, t)^2}$$

$$G'_x(t) = \frac{\frac{\lambda}{t}}{(\lambda - Ln\, t)^2}$$

$$G'_x(1) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$G''_x(t) = \frac{(\lambda - Ln\, t)^2 . \left(-\frac{\lambda}{t^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{t}\right). 2(\lambda - Ln\, t)\left(0 - \frac{1}{t}\right)}{(\lambda - Ln\, t)^4}$$

$$G''_x(t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{t^2}\right)[-\lambda + Ln\, t + 2]}{(\lambda - Ln\, t)^3}$$

$$G''_x(1) = \frac{\lambda(-\lambda + 2)}{\lambda^3}$$

$$G''_x(1) = \frac{-\lambda + 2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = G''_x(1) + G'_x(1) - [G_x(1)]^2$$

$$Var(X) = \frac{-\lambda + 2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

٣-احسب القيمة المتوقعة للمتغير x ذي الحدين كثافه احتمالية

$P(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

X=0,1,2,.......n

$$E(x)=\sum_{x=0}^{n} xp(x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{x.n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=np\sum_{(x-1)=0}^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$=np(p+1-p)^{n-1}=np$$

٤.افرض لديك متغير عشوائي x وداله الكثافه الاحتماليه له كالاتي

$$F(x)=4x^3 \qquad 0<x<1$$

جد القيمة المتوقعة والتباين لل x

الحل

$$dxE(x)=\int_0^1 x4x^3$$

$$=4\int_0^1 x^4dx$$

$$=4\left[\frac{x^5}{5}\right]\begin{matrix}1\\4\end{matrix}$$

$$=4\left[\frac{1^5}{5}-0\right]=\frac{4}{5}=0.8$$

$$E(x^2)=4\int_0^1 x^2x^3dx = \left[4\,\frac{x^6}{6}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$$=\frac{4}{6}=0.67$$

اذا تباين :

$$V(x)=\frac{4}{6}-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0.67-0.64=0.03$$

٥.اوجد العزوم الاربعة حول الوسط الحسابي وجد معامل الالتواء والتغرطح للمتغير اذا كانت داله الاحتمالية تأخذ الشكل التالي (توزيع بواسون)

f(x)=$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$,x=0,1,2,......,

الحل/نحصل اولا على العزوم الاربعه حول العنصر ثم على العزوم حول الوسط

$$\mu_1' = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) \Rightarrow = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$=\lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda$

(هوه الوسط الحسابي لتوزيع بواسون)

$$\mu_2' = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$=\lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + x$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \Rightarrow \mu_2' = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_3' = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x\}$$

$$\mu_3' = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_4^{'} = \sum_{x=0}^{\infty} x^4 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2)$$
$$+ 7x(x-1+x\} f(x)$$

$$\mu_4^{'} = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

ومن العلاقة بين العزوم حول الوسط والعزوم حول العنصر نحصل على :

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu$$

$$\mu_2 = \lambda$$

٦. اوجد الدالة المولدة حول العنصر لمتغير عشوائي x داله كثافه احتماله هي (توزيع طبيعي)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, 2^{\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث ان $-\infty \le x \le \infty$

ثم اوجد العزم الاول حول العنصر وكذلك الدالة المولدة حول الوسط

الحل/الدالة المولدة للعزوم حول العنصر

$$\therefore \varphi_x(\theta) = E(e^{\theta x})$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e - \frac{1}{2\sigma} (x-\mu)^2 dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma}[x^2-2\mu x+\ \ ^2-2\sigma^2\theta x]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2x(\mu+\theta\ \ ^2)+\mu^2-(\mu+\theta\sigma^2)^2\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2x(\mu+\theta\sigma^2)+\mu^2-(\mu+\theta\sigma^2)^2\right]} dx$$

$$e^{\pi\theta\ \ \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(x+\theta\sigma^2)]^2} dx$$

$$\therefore \varphi x(\theta) = e^{\mu\theta} + \frac{1}{2} e^2\theta^2$$

وهذه هيه الدالة المولدة للعزوم حول العنصر للتوزيع الطبيعي

٧.افرض ان $M_x(lnt) = e^{1/2(lnt)}$ تمثل الداله المولده للعزوم حول نقطه الاصل جد الداله المولده للعزوم العاليه ثم جد العزم العاملي الاول والثاني

$$M(t) = M_x(lnt) = e^{1/2(lnt)}$$

لاحظ ان t=1 الان

$$M'(t) = e^{1/2(lnt)} . \frac{lnt}{t} = M(t). \frac{lnt}{t}$$

$$M''(t) = M(t). \left(\frac{1 - lnt + (lnt)^2}{t^2}\right)$$

$$M''(1) = EX(X-1) = 1$$

٨.افترض أن الدالة الاحتمالية الآتية تمثل عمر الحياة للمتغير العشوائي X:

$$P(X=x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \qquad , x = 1, 2, ...$$

أوجد ١) الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X.

٢) E(X).

٣) Var(X).

الحل:

$$G(t) = \sum_{x=1}^{\infty} t^x \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$$

$$G(t) = \frac{1}{4}\sum_{x=1}^{\infty} t^x \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$$

$$G(t) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{3t}{4}\right)^x = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}t}{1-\frac{3}{4}t}\right]$$

عندما t=1

$$G(1) = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right] = 1$$

باستخراج المشتقة الأولى:

$$G'(t) = \frac{1}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}t\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}t\right)}{\left(1-\frac{3}{4}t\right)^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}-\frac{9}{16}t+\frac{9}{16}t}{\left(1-\frac{3}{4}t\right)^2}\right]$$

$$G'(t) = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}t\right)^2}\right]$$

$$G'(1) = \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}\right] = \frac{1}{3}\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$G'(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{1}$$

$$\therefore E(X) = 4$$

وبإيجاد المشتقة الثانية:

$$G''(t) = \frac{1}{3}\,\frac{\left(1-\frac{3}{4}\,t\right)^{2}.(0)+\frac{3}{2}\,(2)\left(1-\frac{3}{4}\,t\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}\,t\right)^{4}}$$

$$G''(t) = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{4}t\right)\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\,t\right)^{4}}$$

$$G''(1) = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4}} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^{4}} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{9}{32}}{\frac{1}{256}} = 24$$

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)] = 12$$

٩.افترض أن المتغير العشوائي X له توزيع بواسون المقطوع بالنقطة صفر وله الدالة الاحتمالية:

$$\boldsymbol{P_k = P_r\,(X = k) = \frac{(e^{a}-1)^{-1}a^{k}}{k!} \qquad , k = 1, 2, \ldots.}$$

أثبت أن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X تكون بالشكل الآتي:

$$\boldsymbol{P_x(s) = (e^{a}-1)^{-1}(e^{as}-1)}$$

وأثبت أن $\boldsymbol{E(X) = \frac{a\,e^{a}}{(e^{a}-1)}}$

الحل:

$$P_x = E(S^k) = \sum S^k\,P(X = k)$$

$$P_x(S) = \sum_{k=1}^{\infty} S^k\,\frac{(e^{a}-1)^{-1}a^{k}}{k!}$$

$$P_x(S) = (e^{a}-1)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S^k a^k}{k!}$$

$$P_x(S) = (e^{a}-1)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aS)^k}{k!}$$

$$P_x(S) = (e^a - 1)^{-1}\left[as + \frac{(as)^2}{2!} + \frac{(as)^3}{3!} + \frac{(as)^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$P_x(S) = (e^a - 1)^{-1}(e^{as} - 1)$$

$$P'_x(S) = \frac{\partial P(s)}{\partial S} = (e^a - 1)^{-1} a\, e^{as} = 0$$

$$When\ S = 1 \quad , \qquad E(X) = (e^a - 1)^{-1} a\, e^a = \frac{a\, e^a}{e^a - 1}$$

$$Note\colon \left.\frac{\partial P(s)}{\partial S}\right|_{S=1} = E(X)$$

$$P_x(1) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1 \sum_{k=1}^{\infty} (e^a - 1)^{-1} \frac{a^k}{k!} = (e^a - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

$$P_x(1) = (e^a - 1)^{-1}\left[a + \frac{(a)^2}{2!} + \frac{(a)^3}{3!} + \frac{(a)^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$P_x(1) = (e^a - 1)^{-1}(e^a - 1) = 1$$

المصادر

١-د. هرمز- امير حنة الاحصاء الرياضي ،قسم الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة الموصل (١٩٩٠)

٢-د. عبد اللطيف عبد الفتاح /د. رضا عبد الفتاح الاحصاء الاستنتاجي، كلية الزراعة، جامعة المنصورة

٣- George R terrell, Mathematical statistics,Department of statistics Virginia polytechnic Institute Blacksburg, V A 24061 USA

٤_ https://www.twink1.come

٥_ https://ar.m.wikipedia.org