جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

المعادلات التفاضليه الاعتياديه من المرتبه الاولى

بحث تقدمت به الطالبة زهراء صادق جاسم الى ادارة قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة بابل وهو جزء من اكمال متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اشراف الدكتور

مي علاء عبد الخالق

٢٠٢٣م

١٤٤٤هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُوْلُوا الْأَلْبَابِ) (الزمر: ٩)

صدق الله العلي العظيم

الإهداء

وهنا اختم رحلتي في طلب العلم بهذاء الاهداء ولو وضعت قلمي لم انتهي من كلمات التعبير عن هذا الشعور المريب والمفرح في نفس الوقت:

وصلت رحلتي الجامعية الى نهايتها بعد تعب ومشقة وها انا اختم بحث تخرجي بكل همة ونشاط وامتن لكل من كان له الفضل في مسيرتي الدراسيه،سواء كان من الاهل او الاصدقاء او الاساتذه من الابتدائيه الى الجامعه وساعدني بكل همة ولو باليسر.

إلى من وضعوني على طريق الحياة، ؛ من كان لهم بالغ الأثر في كثير من العقبات والصعاب إلى جميع أساتذتي الكرام في رحلتي الجامعيه ممن لم يتوانوا في مد يد العون لي أهدي اليكم بحثي.

نتمنى من الله التوفيق في حياتنا القادمه.

الشكر والتقدير

من لا يشكر الناس لا يشكر الخالق،أزكى التحيّات وأجملها وأنداها أرسلها لكي بكلّ الودّ والحب والإخلاص شاكراً لكي على كل ما قدمت، وكل ما نصحت لي به.أقدم لكم أجمل عبارات الشكر والامتنان من قلب فاض بالمحبة والمودة والاحترام والتقدير لكم.شكراً لكي من أعماق قلبي على مساعدتكِ لي .

دكتورة: مي علاء عبد الخالق .

الفهرست

الفصل الاول

Chpater one

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

[1-1] مقدمة.

[1-2] حل المعادلة التفاضلية.

[1-3] الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

[1-4] المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى.

[1-5] طرق حل المعادلات التفاضلية.

[1-1] المقدمة

في الرياضيات، بشكل عام المعادلات التفاضلية هي المعادلات التي يكون فيها المتغير هو دالة، حيث المعادلة تظهر العلاقة بين الدالة ومشتقاتها. حل المعادلات التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة، ومجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة (عائلة حلول)، كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة.

المعادلات التفاضلية مهمة جداً في تفسير الظواهر العلمية الفيزيائية والكيميائية. السبب في ذلك أننا نستطيع كتابة معادلات بمتغيرات كثيرة كدالة للمشتقات مثل سرعة وموقع الأجسام المختلفة، لذلك يلزم معرفة حل هذه المعدلات وكيفية التعامل معها. ويجدر التنويه أنه في حالات كثيرة لا يمكن حل المعادلة بصورة جبرية تامة.

لماذا المعادلات التفاضلية مفيدة؟

نحن نعيش في عالم تتغير فيه الظواهر باستمرار. ومع ذلك، يمكن وصف معظم هذه التحولات باستخدام المعادلات التفاضلية. على سبيل المثال، استخدم ألبرت أينشتاين معادلات تفاضلية لوصف قوة الجاذبية. بمساعدة هذه المعادلات، شرح هذه القوة وأثبت أنه من الممكن السفر إلى المستقبل.

مثال: العلاقة بين تعداد الأرانب والمعادلة التفاضلية

كلما زاد عدد الأرانب، زاد عدد الأرانب الصغيرة. سوف تنمو هذه الأرانب الصغيرة أيضًا وتتكاثر. لذلك، مع مرور الوقت، سيزداد عدد الأرانب أكثر فأكثر.

تعريف [1-1] Definition

المعادلة التفاضلية (Differential Equation) هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة اي للمتغير التابع في المعادلة .

ملاحظه

المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغير مستقل (independt variable) وليكن (x) ودالته غير المعروفة (dependt variable) (y) وبعض مشتقات (y) بالنسبة الى (x) ويرمز لها .OD.E والتي هي مختصر الى (Ordinary Differential Equation) .

مثلا

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $y' + x^2 y + x = y$

3) $x^2 y'' + 5xy' - x^3 y = 0$

4) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

5) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2 y\, y' = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتيادية لان المتغير y يعتمد فقط على المتغير x

تعريف [1-2] Definition

الدرجة: تعرف درجة المعادلة التفاضلية بأنها : اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية

المرتبة او (الرتبة) : تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بانها رتبة اعلى مشتقة.

مثلاً:

1) $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

2) $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

3) $y''' + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

4) $y'' + 2y(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

5) $\frac{dy}{dx} = x^3 - 5$ من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

6) $x^2\frac{dy}{dx} + (\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية.

ملاحظه

درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة التفاضلية : $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')^2}$
من الرتبة الثانية لان اعلى مشتقة فيها y''

حيث يمكن ازالة الجذور او الاسس الكسرية ونحصل على: $(y'')^4 = 1 + (y')^2$
وبذلك تكون درجة المعادلة التفاضلية الرابعة

[1-2] حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية.

(Solution of an Ordinary Differential Equation)

ان الغاية من دراسة المعادلات التفاضلية هي كيفية أيجاد حلولاً لها، ويتم ذلك بايجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) y والمتغير المستقل x بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وان تحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض.

تعريف[1-3] Definition

حل المعادلة التفاضلية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

أ) خالية من المشتقة

ب) معرفة على فترة معينة

جـ) تحقق المعادلة التفاضلية

اي ان الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو أي دالة لمجهول (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال -١-

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

الحل:

$y = x^2 + 3x$ نجد y' فيكون :

$$(1).y= x^2+3x \quad \text{so} \quad (2)\ \ y' =2x+3$$

نعوض (1) و (2) في الطرف الايمن والأيسر للمعادلة التفاضلية وكما يلي :

$$LHS = xy'$$

$$= x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$RHS = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x$$
$$= 2x^2 + 3x \quad = LHS$$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه

[1-3] الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما اسلفنا هو اي علاقة بين X، تحقق المعادلة ، غير ان الحل العام لاي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساو لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب ان يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى . اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا ....

فعلى سبيل المثال : $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويحققها الحل الخاص $y = e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية الى ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابت اختياري واحد c ، فيكون $y = ce^{5x}$ اما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ فهى من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة : $y = \sin x, y = \cos x$ غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين، كان يكونا A,B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y = A \sin x + B \cos X$

مثال -2- اثبت ان $y = x \ln x - x$ احد حلول المعادلة :

$$x \frac{dy}{dx} = x + y \, , \, x > 0 \; ....(1)$$

الحل : ان المعادلة $y = x \ln x - x$ خالية من المشتقات ومعرفة في $x > 0$ ولكي نثبت انها

احد حلول المعادلة التفاضلية (1) نقوم بالتعويض المباشر في (1)

$$LHS = x \frac{dy}{dx} = x.(x. \frac{1}{x} + \ln x.1-1)$$

$$= x.(1 + \ln x - 1) = x \ln x$$

$$RHS = x + y = x + x \ln x - x = x.\ln x$$

$$\rightarrow LHS = RHS$$

اذن الدالة المعطاة هي احد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال - 3-

, a € R $\ln y^2 = x + a$ حلا للمعادلة $2y' - y = 0$

الحل:

$$\ln y^2 = x + a \Rightarrow 2\ln y = x + a \Rightarrow 2\frac{1}{y}(y') = 1$$
$$\Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

, so $\ln y^2 = x + a$ حلا للمعادلة اعلاه

مثال - 4 -

هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل:

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^3 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

وعليه $y = x^3 + x - 2$ هو حلا للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

مثال - 5 -

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

الحل

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \quad ...... \quad (1)$$

$$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \quad ..... \quad (2)$$

بالتعويض عن(1) , (2)، في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية ينتج :

$$LHS = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x \quad = 0$$

هو حلا للمعادلة اعلاه.

مثال - 6 -

هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة $yy'' + (y) - 3x = 5$ ؟

الحل:

$$y^2 = 3x^2 + x^2 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow$$

$$2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x$$

بالقسمه على 2

الطرف الايمن $yy'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow LHS = yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$

$$\neq RHS$$

وعليه فان $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلا للمعادلة اعلاه.

[1-4] المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الاولى.

مقدمة :

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل، أي يقوم على عمليات التكامل ، ومن المعروف انه لا يمكن ايجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة . أي لا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة . وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى انواع متعددة

حسب طريقة الحصول على حلها العام.

وفي هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بمتغيرين yx .
ومع ان هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لاي منها بصورة عامة ، ولا توجد طريقة عامة للحل . وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن ايجاد حلها

بطريقة مباشرة الى عدة انواع ، اهمها :

1- المعادلات التي تنفصل متغيراتها .
2- معادلات تفاضلية من النوع المتجانس.
3- معادلات تفاضلية تامة
4- معادلات تفاضلية خطية - معادلة برنولي .
وفي هذا الفصل سنقتصر على النوعين (1) و (2) وطرائق حليهما .

فمثلاً تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى الشكلين الاتيين:

1) $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$

2) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

حيث $N(x,y) \neq 0 , M(x, y) \neq 0$

فالمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{x+y}$ مثلا

يمكن ان تكتب بالشكل

$$(3xy)\, dx = (x+y)\, dy$$
$$(3xy)\, .dx - (x+y)\, .dy = 0$$

حيث ان $M = 3xy , \quad N= (x+y)$

سندرس في البند الاحق بعض طرق حل المعادله التفاضليه

[1-5] طرق حل المعادلات التفاضلية

اولا : المعادلات التي تنفصل متغيراتها (Separation of Variables)
في هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع ان نعزل كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y فقط مع dy في الجانب الآخر فتحصل على :

$f(x).dx = g(y)dy$ ...(1)

ثم نكامل طرفي المعادلة (١) فيكون

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث ثابت اختياري (**Arbitrary Constant**)

مثال - ١ - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = (2x+5)$

الحل

$\frac{dy}{dx} = 2x+5 \Rightarrow dy = (2x+5)\,dx$

$\int dy = \int (2x+5)\,dx \Rightarrow y=x^2 + 5x + c$

مثال - 2 - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل

نجعل المعادلة بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

اي : $ydy = (x-1)dx$

باخذ التكامل للطرفين : $\int ydy = \int (x-1)\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$

$y^2 = x^2-2x+2c \Rightarrow y = \pm(x^2-2x+2c)^{\frac{1}{2}}$

$= \pm(x^2-2x+2c)^{\frac{1}{2}}$

لكون C ثابت اختياري فان 2c ثابت اختياري ايضاً اسميناه C1.

الفصل الثانى

Chpater two

تطبيقات المعادلات التفاضلية
الاعتيادية من الرتبه الاولى

[2-1] **مقدمة.**

[2-2] **تطبيقات في الكيمياء (Application in chemistry).**

[2-3] **تطبيقات في الكهربائية - الدارات الكهربائية (Electric circuits) .**

(Application to first order differential equations)

[2-1] مقدمة:

تتسم المعادلات التفاضلية بأهميتها الكبيرة في تطبيقاتها التي تشمل مجالات العلوم والمعرفة كافة فهي حلقة وصل بين الرياضيات والعلوم الأخرى، مثل: الهندسة التحليلية والفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء، والهندسة ... الخ. فهي تساعد على فهم القوانين والظواهر الطبيعية والحياتية وتساعد في حل مشكلاتها.
ولتطبيق المعادلات التفاضلية على المجالات المذكورة سابقاً، نلاحظ أن ذلك يمر في أربع مراحل :

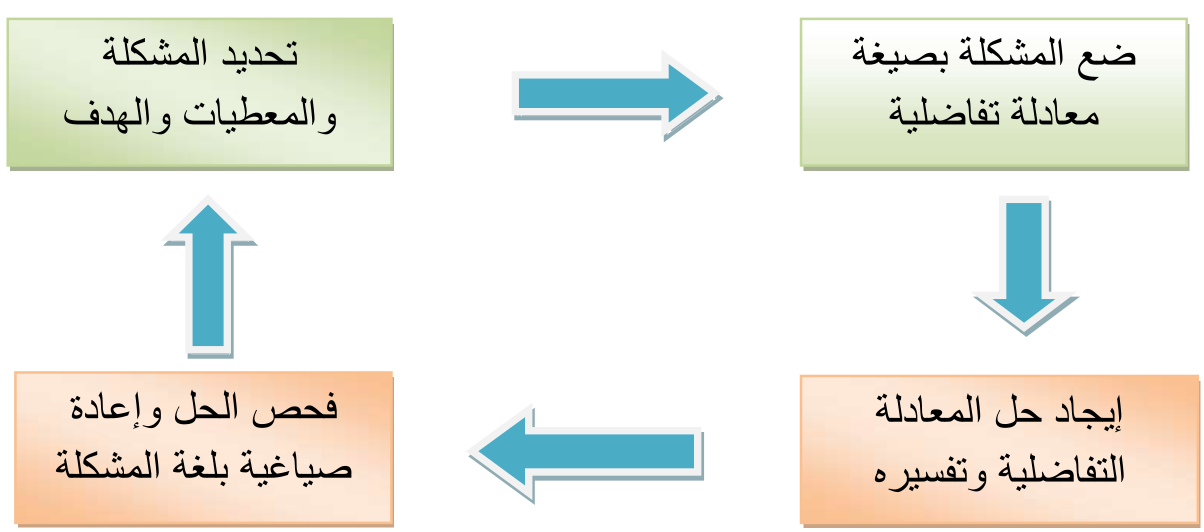
١- تحديد المشكلة والمعطيات والهدف ووضعها بصيغة رياضية باستخدام المنطق الرمزي

٢- تشكيل معادلة تفاضلية من هذه المعطيات تمثل المشكلة.

٣- إيجاد حل المعادلة التفاضلية بإحدى الطرائق التي تناولناها في الفصل الثاني ودراسة خواصه.

٤- فحص الحل وترجمته إلى لغة المشكلة والحصول على الجواب.

يمكن تلخيص الخطوات السابقة بالمخطط الانسيابي الآتي:



[2-2] تطبيقات في الكيمياء (Application in Chemistry)

نتناول في هذا البند بعض تطبيقات الكيمياء سوف نركز على مسائل الخلط (Mixture problems) بين محلولين مختلفين في التركيز ومسائل البرودة (Cooling problems). سنبدأ بالمسألة المتعلقة بـ "قانون نيوتن في التبريد": ليكن لدينا جسم درجة حرارته هي $T(\mathrm{t})$ درجة فهرنهايت ($T(\mathrm{t})°F$) عند زمن معين t، بالطبع إن معدل تغير درجة حرارة الجسم $T(\mathrm{t})$ بالنسبة للزمن t هو $\frac{dT}{\mathrm{dt}}$. نفرض أن درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم هي الثابت $T°_1\ F$ (درجة فهرنهايت). إن قانون نيوتن في التبريد ينص على : معدل تغير درجة حرارة الجسم $T(\mathrm{t})$ بالنسبة للزمن t يتناسب مع حاصل الفرق بين درجة حرارة الجسم $T(\mathrm{t})$ ودرجة حرارة الوسط المحيط بالجسم. أي أن :

$$\frac{dT}{\mathrm{dt}} = \mathrm{k}(\mathrm{T} - T_1)$$

حيث k ثابت التناسب.

المعادلة السابقة من الرتبة الأولى ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما هو موضح:

$$\frac{dt}{(\mathrm{T} - T_1)} = \mathrm{kdt}$$

بإجراء عملية التكامل نحصل على: $Ln|T + T_1| = \mathrm{Kt} + c_1$ حيث إن c_1 ثابت التكامل. ومنها نحصل **على:**

$$T = T_1 + \mathrm{c}e^{k\,t} \quad ....(1)$$

حيث إن $\mathrm{c} = e^{c_1}$ هي ثابت.

المثال (1): لتكن درجة حرارة غرفة عند البدء، أي عندما t = 0 ، هي $66°\ F$. بعد ساعتين اثنتين أصبحت درجة الغرفة $63°\ F$. كم تصبح درجة الحرارة بعد 10 ساعات من البدء، إذا علمت إن درجة حرارة الوسط المحيط هي $32°\ F$ ؟

الحل: نبدأ من المعادلة (1) ، وبالتعويض بالمعطيات نجد أن الحل هو : $T = 32 + \mathrm{c}e^{k\,t}$ وبالتعويض بالشرط الابتدائي T(0) = 66 ، نحصل على $66 = 32 + \mathrm{c}e^{k\,(0)}$ أي أن الثابت: c = 34 ، ومنها يصبح الحل: $T = 32 + 34e^{k\,t}$.

الآن عندما t= 2 ، إن T = 63 ، ومنها نحصل على: $63 = 32 + 34e^{2k}$ وبحلها

نحصل على قيمة الثابت $k = \frac{1}{2}\ln\frac{31}{34} = \frac{1}{2}\,ln\,0.911765 = -0.046187$

إذا الحل هو

$$T = 32 + 34e^{-0.046\,187\ \mathrm{t}}$$

وبعد ١٠ ساعات تكون درجة الحرارة:

$$T = 32 + 34e^{-0.046\,187\,(10)} = 53.4°\boldsymbol{F}\ .$$

نتناول الآن مسائل الخلط بين محلولين مختلفين في التركيز.

المثال (2): برميل يحتوي على 200 جالون من ماء مذاب فيه 40 رطلاً من الملح ، عند لحظة معينة سمحنا لمحلول آخر من المادة الكيمياوية نفسها ولكن بتركيز يساوي رطلين اثنين لكل غالون بأن يتدفق الى البرميل من الأعلى بمعدل 5 غالونات في الدقيقة. خلط المحلولان جيداً وسمحنا للخليط بالخروج من الجهة السفلى للبرميل بمعدل خروج يساوي معدل الدخول. احسب كمية الملح في المحلول عند آية لحظة t . ما كمية الملح بعد 20 دقيقة ؟ وما كمية الملح بعد زمن طويل جداً؟ فسر ذلك مع الرسم.

الحل : لتبسيط المسألة وتحويلها الى صيغة معادلة تفاضلية لاحظ الشكل (2.1)

نفرض أن كمية الملح في المحلول عند أية لحظة t ، تساوي A(t). فعليه يكون:

- تركيز المحلول الأصلي (قبل بدء التجربة) = $\frac{40}{200} = \frac{1}{5}$ رطل / غالون.

- تركيز المحلول الداخل = 2 رطل / غالون وهو اكبر من تركيز المحلول الأصلي.

- معدل دخول المحلول = معدل خروج المحلول = 5 غالونات / دقيقة.

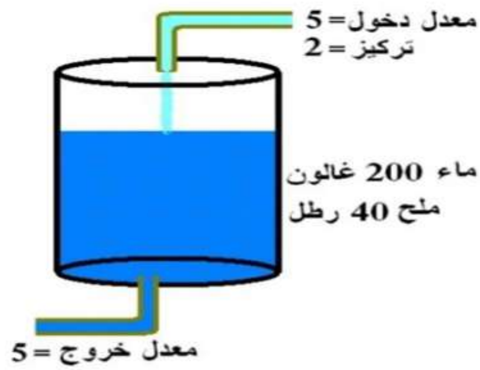
- تركيز المحلول عند الخروج هو متغير ويعتمد على الزمن t ، ويساوي $\frac{A(t)}{200}$ رطل / غالون.

- معدل تغير كمية الملح في البرميل بالنسبة للزمن t يساوي $\frac{dA}{dt}$.

- معدل دخول كمية الملح = معدل دخول المحلول × التركيز = 5 × 2 = 10 أرطال.

- معدل خروج كمية الملح = معدل خروج المحلول × التركيز = 5 × $\frac{A(t)}{200}$ رطل

- معدل تغير كمية الملح في البرميل = معدل دخول كمية الملح - معدل خروج كمية الملح



الشكل (1-2)

إذاً:

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{5A}{200} = 10 - 0.025A$$

أي أن :

$$\frac{dA}{dt} + 0.025A = 10$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، فيها مُعامل المكامل هو : $\mu\ (t) = e^{0.025\,t}$

وعندئذ يكون: $(e^{0.025\,t}A)' = 10\ e^{0.025\,t}$.

- إذا الحل العام هو : . $A(t) = 400 + ce^{0.025\,t}$

الآن عندما t = 0 إن A(0) = 40 ، ومنها نحصل على قيمة الثابت: c = -360 .

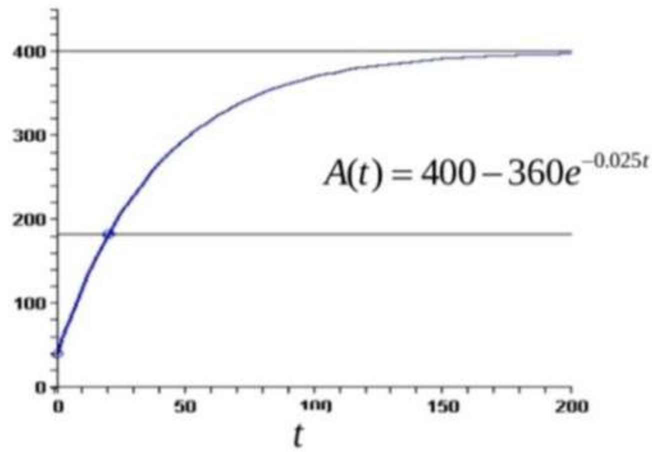
إذا كمية الملح عند أي زمن t هي:

$$A(t) = 400 - 360e^{0.025\,t}$$

و كمية الملح بعد 20 دقيقة هي:

$$A(t) = 400 - 360e^{0.025\,(20)} = 400 - 360(e^{-0.5}) = 182.438$$

الآن، عندما $t \to \infty$ ، إن $e^{-0.025\,t}$. فعليه إن كمية الملح بعد زمن طويل جداً هو 400 رطل. وهذا الجواب منطقي لإنّ البرميل يحتوي على 200 غالون ماء، وبعد زمن طويل يكون التركيز 2 رطلي ملح لكل غالون، أي أنّ الجواب مطابق. انظر الشكل (2-2):



الشكل (2-2)

نناقش فيما يأتي مسائل الخلط في حالة كون معدل دخول المحلول لا يساوي معدل خروج المحلول.

المثال (3) : أعد حل المثال (2) بالمعطيات نفسها ولكن معدل دخول المحلول 5.5 غالون / دقيقة يزيد عن معدل خروجه بمقدار $\frac{1}{2}$ غالون / دقيقة. ثم احسب كمية الملح بعد 50 دقيقة، وبعد 200 دقيقة.

الحل:

معدل دخول المحلول = 5.5 غالون / دقيقة. ومعدل خروج المحلول = 5 غالون / دقيقة.

تركيز المحلول عند الخروج هو متغير ويعتمد على الزمن t يساوي $\frac{A(t)}{200+0.5t}$ رطل / غالون ٢٠٠+ ٠.٥t

معدل دخول كمية الملح = معدل دخول المحلول × التركيز = 5.5 × 2 = 11 رطلاً

معدل خروج كمية الملح = معدل خروج المحلول × التركيز = 5 x $\frac{A(t)}{200+0.5t}$ رطل

معدل تغير كمية الملح في البرميل = معدل دخول كمية الملح - معدل خروج كمية الملح

اذا: $\frac{dA}{dt} = 11 - \frac{10}{400+t}$

$$\frac{10A}{400+t} + \frac{dA}{dt} = 11$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى، فيها مُعامل المكامل هو :

$$\mu(t) = (\ (400 + t)^{10}$$

وعندئذ يكون: $((400 + t)^{10} A)' = 11\,(400 + t)^{10}$

إذا الحل العام هو:

$$A(t) = 400 + t + c\,(400 + t)^{-1} .$$

الآن عندما $t = 0$ إن $A(0) = 40$ ، ومنها نحصل على قيمة الثابت: $c = -144000$

إذا كمية الملح عند أي زمن t هي : $A(t) = 400 + t - \frac{144000}{400+t}$.

كمية الملح بعد 50 دقيقة هي : $A(t) = 400 + 50 - \frac{144000}{450} = 130$ رطل.

أما كمية الملح بعد 200 دقيقة هي : $A(t) = 400+200 - \frac{144000}{600} = 360$ رطل.

[2-3] تطبيقات في الكهربائية - الدارات الكهربائية (Electric circuits):

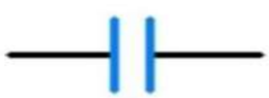
سنتناول في هذا البند المعادلات التفاضلية الخطية التي تخدم سريان التيار الكهربائي داخل دارة كهربائية بسيطة. يعود الفضل في تناول هذه التطبيقات الى كل من العالمين الالمانيين:

- جورج أوم George Ohm : عالم فيزيائي الماني عاش خلال الفترة (١٧٨٧- ١٨٥٤م) اشتهر بوضع قوانين التيار الكهربائي التي سنستخدمها لاحقاً زامل الرياضي الشهير در شلي (Dirichlet). في بدء الأمر لم يصدق زملاؤه وأقرانه اكتشافاته مما جعله يقدم استقالته من كرسي الأستاذية وينعزل، لكن فيما بعد أيقن زملاؤه عظمة اكتشافاته فعززوه وكرموه.
-
- كوستاف كيرتشوف (Gustav Kirchhoff) عالم فيزيائي الماني أيضاً عاش خلال الفترة (١٨٤٢- ١٨٨٧م) اشتهر بقوانينه في الكهربائية، وهو معروف لكل طلبة الفيزياء من خلال قانونيه القانون الثاني (قانون) (الحلقة) الذي سنستخدمه لاحقاً. كما اشتهر في تحليل الطيف الذي استخدمه في دراسته للنجوم.

ليكن لدينا الآن دارة كهربائية بسيطة (أحياناً نختصر ونقول دارة) تحتوي على:

- محاثة أو ملف (Inductor) حثها الذاتي L هنري

- مقاومة (Resistor) مقدارها R أوم



- متسعة أو مكثف (**Capacitor**) سعتها C فراد
- قوة دافعة كهربائية emf (**Electromotive force**)

التي جهدها$E(t)$ فولت. ومن أهم مصادرها بطاريات ، مولدات، وخلاية شمسية

الشكل (2-3)

حيث إنّ C و R ، L و ثوابت، وإنّ E(t) تعتمد على الزمن t ، كما مبين في الشكل (2-3).

ليكنi(t) أمبيراً يرمز للتيار المار بالدارة الكهربائية عند أي زمن t ، وليكن q(t) كولوماً يمثل dq كمية الشحنة عند أي زمن t. إنّ العلاقة بين التيار وكمية الشحنة هي $i(\mathrm{t}) = \frac{dq}{\mathrm{dt}}$

حسب قانون أوم الذي ينص على إن:

- فرق الجهد على طرفي الملف هو : $E_{\mathrm{L}} = L\frac{di}{\mathrm{dt}} = L\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{q}}{\mathrm{dt}^2}$
- فرق الجهد على طرفي المقاومة هو: $E_{\mathrm{R}} = Ri(t) = R\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}$
- فرق الجهد على طرفي المتسعة هو : $E_{\mathrm{C}} = q(t)\frac{1}{\mathrm{C}}$

قاعدة كير تشوف الثانية - قاعدة الحلقة (**Loop rule**) :

تنص قاعدة كيرتشوف الثانية على أنّ المجموع الجبري لفروق الجهد حول جميع عناصر دارة كهربائية مغلقة هو صفر. هذا يعني:

$$E(t) - E_R - E_L - E_C = 0$$

أي أن :

$$E(t) = E_R + E_L + E_C$$

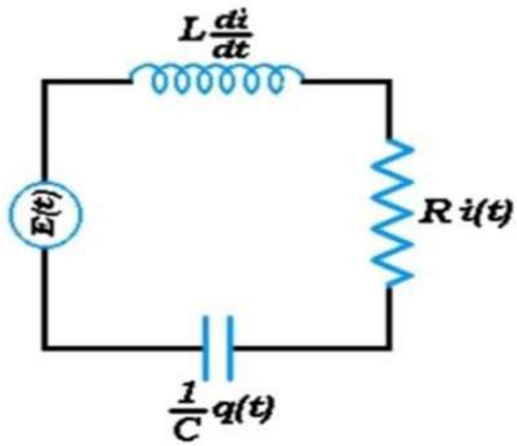
التي يمكن كتابتها بالصيغة:

$$\boxed{E(t) = L\frac{di}{\mathrm{dt}} + Ri(t) + q(t)\frac{1}{\mathrm{C}}} \quad ....(1)$$

أي أن:

$$\boxed{E(t) = L\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{q}}{\mathrm{dt}^2} + R\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} + q(t)\frac{1}{\mathrm{C}}} \quad ....(2)$$

المعادلة (1) تعني أنّ فرق الجهد عند طرفي القوة الدافعة الكهربائية في دارة كهربائية مغلقة يساوي مجموع فروق الجهد عند طرفي العناصر الأخرى المارة في الدارة، كما مبين في الشكل (4 -2)

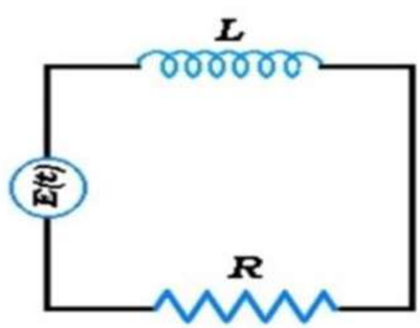


الشكل (4 -2)

نلاحظ أنّ المعادلة (1) هي معادلة خطية من الرتبة الثانية، عليه سنتناول نوعين من الدارات:

1) دارة كهربائية (مقاومة ـ ملف) :

تحتوي هذه الدارة المغلقة على: قوة دافعة كهربائية ومقاومة، ومحاثة فقط، كما مبين في الشكل (5 -2)



الشكل (5 -2)

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل هذه العناصر الثلاثة هي:

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t) \qquad .....(3)$$

و يمكن حلها على أساس معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى أو بطريقة فصل المتغيرات كما يأتي باعتبار أن المعادلة:

$$\frac{dt}{L} = \frac{di}{E(t) - Ri(t)}$$

وبإجراء التكامل نحصل على: $\frac{t}{L} + c = -\frac{1}{R}\ln|E(t) - Ri(t)|$ حيث إنّ c ثابت يمكن حسابه من الشرط الابتدائي: عندما t = 0 ان i= 0 والقوة الدافعة الكهربائية هي ثابتة ولتكن E_0،

فبالتعويض نحصل على: $c = -\frac{1}{R}\ln E_0$ ومنها نحصل على:

$$-\frac{tR}{L} = \frac{|E_0 - Ri|}{E_0} \quad \text{: اي ان الحل} \quad e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{|E_0 - Ri|}{E_0}$$

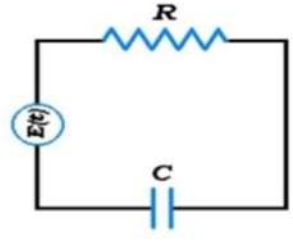
ومنه نحصل على معادلة التيار:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \dots\dots \quad (4)$$

عندما $t \to \infty$ ، فإن المعادلة (4) تصبح $Ri(t) = E_0$ وهو ما يعرف بقانون أوم.

2) دارة كهربائية (مقاومة - متسعة)

تحتوي هذه الدارة المغلقة على: قوة دافعة كهربائية ومقاومة، ومتسعة فقط، كما مبين في الشكل



الشكل (6 -2)

عندئذ تكون المعادلة التفاضلية التي تقابل هذه العناصر الثلاثة هي:

$$(5)\ldots\ldots \quad E(t) = R\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}} + q(t)\frac{1}{\mathrm{C}}$$

المعادلة (5) هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى ، أو اعتبارها متجانسة ، وحلها كما في الحالة الأولى.

المثال (1): في دارة بسيطة تتألف من مقاومة 10 أوم ومحاثة حثها $(\frac{1}{2})$ هنري مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية 12 فولت احسب التيار المار إذا علمت أن التيار الابتدائي هو صفر.

الحل من المعادلة (3) نحصل على المعادلة الخطية:

$$12 = \frac{1}{2}\frac{di}{\mathrm{dt}} + 10i(t), \qquad i(0) = 0$$

نجد عامل المكامل: u(t) = e e^{20t} ، **ونضرب طرفي المعادلة التفاضلية فنحصل على:**

$\frac{d}{\mathrm{dt}}(i\ e^{20\mathrm{t}})$ **. بإجراء عملية التكامل نحصل على التيار:** , $i(\boldsymbol{t}) = \frac{6}{5} + ce^{-20}$

وبالتعويض في الشرط الابتدائي $i(0) = 0$ ، **نحصل على الثابت** $\boldsymbol{c} = -\frac{6}{5}$

$$i(\boldsymbol{t}) = \frac{6}{5}(1 - e^{-20\mathrm{t}})$$

المثال (2) في دارة بسيطة تتألف من مقاومة 200 أوم ومتسعة سعتها 10^{-4} فراد مربوطة على التوالي مع بطارية قوتها الدافعة الكهربائية 200 فولت احسب كمية الشحنة الكهربائية $q(t)$ في أية لحظة t، إذا علمت أنّ $q(0) = 0$. ثم احسب شدة التيار الكهربائي بعد مضي 0.02 ثانية.

الحل من المعادلة (5) نحصل على المعادلة الخطية:

$$200 = 200\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{10^{-4}}\,q(t)$$

وبالقسمه على 200 والتبسيط نحصل على: $\frac{dq}{dt} + 50\,q(t) = 1$ وهي عبارة عن معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها (حقق ذلك): $\boldsymbol{q(t)} = \frac{1}{50} + ce^{-50t}$. وبالتعويض في الشرط الابتدائي $q(0) = 0$ نحصل على قيمة الثابت $c = -\frac{1}{50}$، أي أنّ كمية الشحنة هي:

$$q(t) = \frac{1}{50}\left(1 - e^{-50t}\right).$$

وبالاشتقاق نحصل على التيار: $\boldsymbol{i(t)} = \frac{dq}{dt} = e^{-50t}$. وعليه يكون التيار بعد 0.02 ثانية هو $i = e^{-1}$ أمبير.

المصادر

1) https://www.stadiraq.com/book-math-6aheai/

2) https://www.nagwa.com/ar/lessons/676150215904/

3) https://docs.google.com/document/d/1-2J57ZXqH8595GyZ2KwPYmX_ttp1EROB/edit?usp=drivesdk&ouid=112009484190529859534&rtpof=true&sd=true

4) https://baytalkitab.weebly.com/uploads/2/0/5/3/20530602/ch_3.pdf

5) https://drive.google.com/file/d/1-Fx6wGwOseU0m-NiXjNr7-frhCMb67Zn/view?usp=drivesdk