وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

نظام حل المعادلات الخطية جبرياً وعددياً

بحث تقدم به الطالب

حسين علي هادي

الى مجلس كليه التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات/جامعه بابل

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

بأشراف أ.م.د. حسناء حسن شهيد

١٤٤٥هـ   ٢٠٢٤م

الاية

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

(وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِي آدَمَ وَحَمَلْنَاهُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ وَرَزَقْنَاهُمْ مِنَ الطَّيِّبَاتِ وَفَضَّلْنَاهُمْ عَلَىٰ كَثِيرٍ مِمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلًا ﴿٧٠﴾)

صدق الله العلي العظيم

سورة الاسراء اية 70

الاهداء

قال تعالى: (قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ... ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

الله ﷻ

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم

اهديك هذا الانجاز الذي لولا تضحياتك لما كان له وجود الى من دعمني بلا حدود واعطاني بلا مقابل إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار ..

إلى من أحمل أسمه بكل افتخار "والدي العزيز"

إلى ملاكي في الحياة .. وقوتي بعد الله إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني .. إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

"أمي الحبيبة"

الى ارضي الصلبة وجداري المتين إلى من مدت أياديهم في أوقات الضعف إلى من راهنوا على نجاحي.... وذكروني بمدى قوتي واستطاعتي، الذين لا يحبطوني ويؤمنوا بنجاحي وشجاعتي مهما ضعفت و ارتخيت واقفين خلفي..

"اخواني واختي"

إلى استاذتي ومشرفتي " حسناء حسن شهيد " على كل ما قدمته لي من توجيهات ومعلومات قيمه ساهمت في اتمام هذا البحث

الشكر والتقدير

لحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتد لو لا ان هدانا الله، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى إله وأصحابه الطاهرين.

لا يسعني وأنا أنهي هذا الجهد العلمي إلا أن اتقدم بفائق الشكر والامتنان إلى كل من مد لي يد العون وساعدني في انجار هذا البحث، وأخص منهم بالذكر المشرفة "الدكتورة حسناء حسن شهيد" التي اشرفت بعناية فائقة على البحث. ولما بذلته بإخلاص من صبر وجهد، وما قدمته من توجيهات سديدة لإخراج البحث بالمستوى المطلوب، جزاها الله عنا خير الجزاء وحفظها من كل مكروه.

وشكر خاص الى رئيس القسم ((الدكتور علي حسين العبيدي))

المحتويات

المقدمة

في عالم الرياضيات، تعتبر أنظمة المعادلات الخطية أحد الأسس التي ترتكز عليها العديد من الفروع العلمية والهندسية. تتألف هذه الأنظمة من مجموعة معادلات تحتوي على متغيرين أو أكثر، حيث يتم البحث عن قيم المتغيرات التي تحقق الصدق في جميع المعادلات في آن واحد. هذا البحث يهدف إلى استكشاف الأساليب المختلفة لحل هذه المعادلات، سواء كانت بالطرق الجبرية مثل طريقة الحذف أو التعويض، أو من كاوس وكاوس جوردن وجاكوبي وكاوس سيدل وكذلك استخدام برنامج الماتلاب في حل هذه المعادلات.

الأهمية الكبيرة لفهم وإتقان حل أنظمة المعادلات الخطية لا تنبع فقط من كونها جزءاً لا يتجزأ من العلوم الرياضية، بل إن تطبيقاتها تمتد لتشمل مجالات متعددة مثل الهندسة، الاقتصاد، علوم الكمبيوتر، والفيزياء. فهي تلعب دورًا حاسمًا في تصميم الأنظمة الهندسية، تحليل الأسواق الاقتصادية، برمجة الألعاب الإلكترونية، وحتى في معالجة الصور والبيانات.

في بحثنا هذا تم دراسة نظام المعادلات الخطية إذا أن المعادلات الخطية أهمية في معظم العلوم والأنشطة إن لم نقل كلها حيث نستخدم اكثر من طريقة الايجاد حلول نظام المعادلات الخطية حيث يتضمن

الفصل الأول تناولنا مقدمة عن أنظمة المعادلات الخطية ومفاهيم عامه عن المعادلات الخطية و المفهوم الهندسي لنظام المعادلات الخطية وطريقة حل انظمة المعادلات الخطية ونظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة وبعض التطبيقات حول معادلات الخطية.

ويتضمن الفصل الثاني مقدمة بسيطة عن طرق الحل وكذلك طرق حل نظام المعادلات الخطية (المباشرة وغير المباشرة) جبرياً مع برمجتها على برنامج الماتلاب

الفصل الاول:

نظام المعادلات الخطية

1.1 المقدمة:

لقد تناول التميمي (2009) دراسة المعادلات الخطية وحلولها من المواضيع المهمة في الرياضيات وخصوصاً في الجبر الخطي إضافة لاستخداماتها في العلوم التطبيقية الاخرى. سوف نقدم في هذا البند بعض العلاقات الرياضية الأساسية ومناقشة طرق حل تلك الأنظمة.

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى -xy بالصيغة:

$ax + by = c$

تمثيل هذه الصيغة معادلة خطية بمتغيرين هما x و y ويمكن كتابة الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات، تسمى في بعض الأحيان المجاهيل، بالصيغة.

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$

حيث $c, a_n, \ldots, a_2, a_1$ ثوابت حقيقة . إن حل المعادلة

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$ هي الأعداد $s_n, \ldots, s_2, s_1$ بحيث تتحقق المعادلة عندما نعوض

$x_n = s_n, \ldots, x_2 = s_2, x_1 = s_1$

2.1مفاهيم عامة عن المعادلات الخطية [4]

وقد بين التميمي، (2009) مفهوم المعادلات الخطية كما يلي

المعادلة الخطية : التي لها n - من المتغيرات $x_1,.......,x_n$ وهي التي يمكن ان يعبر عنها بالصيغة

$$b = a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

حيث $(a_1,.....a_n)$ ثوابت تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية R

حل المعادلة الخطية: $b= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ هو متتابعة(sequence) من n من الاعداد

$(s_1,s_2,...,s_n)$بحيث ان تلك المعادلة تحقق عندما نعوض $x_1=s_1,x_2=s_2,...,x_n=s_n$ وان مجموعة كل الحلول المعادلة تسمى مجموعة

منظومة المعادلات الخطية : هي مجموعة من m من المعادلات الخطية

التي لها n من المتغيرات ويمكن كتابتها بالشكل

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n= b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n= b_2.$$

.

.

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

حيث ان n ثوابت وان متتابعة من n من الاعداد $S_1,S_2,...S_n$ تسمى حل للمنظومة اذا كان

$x_1=s_1,x_2=s_2,...,x_n=s_n$سوف نتطرق الي بعض الامثلة البسيطة لكي نتمكن من ملاحظة المعادلات التي تكون خطيه

لاحظ أن صيغة المعادلة الخطية تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى ولا تحتوي على متغيرات بدرجة أعلى أو جذور أو دوال مثلثية أو ضرب متغيرات مع بعضها أو دوال أسية.

مثال

في هذا المثال مجموعه من المعادلات منها خطية ومنها غير خطية وكما موضح ادناه :

$8x+7y=-7$............(1)

$3x-6y^3=8$.............(2)

$x_1+5x_2-\sqrt{x_3}=0$......(3)

$\frac{6}{x}+9y+z=8$...(4)

المعادلة رقم(1) وهي على الصورة العامة للمعادلة الخطية فأنها تعتبر معادلة خطية, المعادلة رقم (2) ليست خطية لوجود y^3 وكذلك المعادلة رقم (3) ليست خطية وذلك لوجود $\sqrt{x_3}$ وتعتبر المعادلة رقم (4) كذلك غير خطية نسبة لوجود $\frac{6}{x}$

لاحظ أن صيغة المعادلة الخطية تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى ولا تحتوي على متغيرات بدرجة أعلى أو جذور أو دوال مثلثية أو ضرب متغيرات مع بعضها أو دوال أسية.[4]

مثال:[3]

النظام الخطي التالي :

$3x_1 = x_2 + 5x_3 = -4$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1$

تمثل نظاماً خطياً يحتوي على معادلتين بثلاث متغيرات، وقيم المتغيرات

$x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = -1$ هي حل للنظام، لأنها تحقق كلاً المعادلتين أما

$x_1 = 1$ و $x_2 = 8$ و $x_3 = 1$ فهي ليست حلاً لأنها لا تحقق كلا المعادلتين.

ومن الجدير بالذكر أن بعض الأنظمة ليس لها حلاً، مثال ذلك.

$x + y = 6$

$2x + 2y = 10$

والسبب هو عند ضرب المعادلة الثانية في 1/2 نحصل على النظام الآتي:

$x + y = 6$

$x + y = 5$

والتي تناقض إحداهما الأخرى.

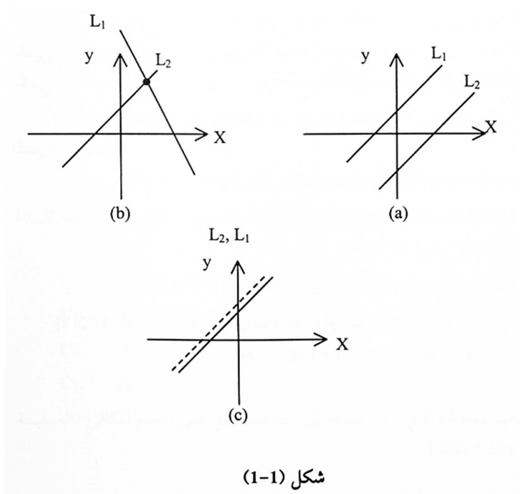
3.1 مفهوم الهندسي لنظام المعادلات الخطية:[4]

يمثل النظام الخطي العام المتكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين x و y بالصيغة الآتية:

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

إن الشكل الهندسي لهذه المعادلات هو الخطوط المستقيمة L_1 و L_2 كما في الشكل (1-1) ولما كانت النقطة (x , y) تقع على المستقيم إذا وفقط إذا كانت x و y تحقق معادلة المستقيم، فإن حلول النظام الخطي تقابل المستقيمين L_1 و L_2 كما موضح في



الشكل (1-1).

من خلال الشكل (1-1) يتضح أن هناك ثلاث احتمالات للحلول وهي:

1- المستقيمان L_2 , L_1 متوازيان، أي لا يوجد نقطة تقاطع، وعليه فليس للنظام الخطي حل [شكل a(1-1)].

2- المستقيمان L_2 , L_1 يتقاطعان بنقطة، وهذا يعني أن النظام الخطي له حل واحد فقط [الشكل b(1-1)].

3- المستقيمان متطابقان، اي يوجد عدد غير محدود من الحلول [شكل c(1-1)].

نستنتج من ذلك أن أي نظام خطي إما ليس له حل او له حل واحد فقط أو له عدد غير منتهي من الحلول.

تسمى المجموعة المنتهية المتكونة من m من المعادلات الخطية، التي تحوي على n من المتغيرات $x_n,\dots,$, x_2 , x_1 نظام المعادلات الخطية. وتسمى أيضاً بالنظام الخطي. اما المتتابعة المتكونة من n من الأعداد الحقيقية s_1 , s_2, ... , $x_n = s_n$ حلاً لكل معادلة من النظام الخطي.

4.1 طريقة حل أنظمة المعادلات الخطية:[4]

الطريقة الأساسية لحل نظام معادلات خطية تكون باستبدال نظام معطى بنظام جديد يمتلك مجموعة الحل نفسها ولكن أسهل في الحل. يتم الحصول على هذا النظام الجديد بسلسلة خطوات بتطبيق ثلاث أنواع من العمليات وذلك لحذف المجاهيل:

1- تبادل معادلتين لبعضهما الاخرى.

2- ضرب معادلة ما بثابت غير صفري.

3- جمع مضاعف إحدى المعادلات إلى أخرى.

مثال [4]

لحل نظام المعادلات الخطية التالية:

L_1: x - 5y+2z = 13

L_2: 3x - 14y + 3z = 29 ....(1)

L_3:4x - 12y + 3z = 35

نتبع ما يلي:

1- ضرب المعادلة L_1 في 3- ونضيف حاصل ضرب للمعادلة L_2.

نرمز لهذه العملية بالرمز $-3L_1 + L_2$، كذلك نضرب L_1 في 4- ونضيفه إلى L_3 (أي أن العملية هي $L_3 + -4L_1$).

وبموجب هاتين العمليتين سنحصل على النظام المكافئ الآتي:

L'_1: x - 5y + 2z = 15

L'_2: y - 3z = -10 ....(2)

L'_3: 2y - 5z = -17

2- نضرب المعادلة L_2 في 2- ونضيفه إلى L'_2 ، سنحصل على النظام المكافئ (العملية هي $-2L'_2 + L'_3$).

L_1'': x - 5y + 2z = 13

L_2'': y-3z=-10 ....(3)

L_3'': Z=3

من L''_3 نحصل على z = 3 وبتعويضها في L''_2 نحصل على y = -1 وأخيراً نعوض عن z,y في L''_1 فنحصل على x = 2، أي أن مجموعة الحل هي: (3 ، 1- ، 2) لاحظ أن النظام الخطي (2) يكافئ النظام (1) .

ويمكن صياغتها على شكل مصفوفه بالشكل التالي:

إذ أن a_{ij} هي أعداد حقيقية تمثل معاملات المتغيرات و c_i تمثل الثوابت في الطرف الأيمن من النظام. تسمى الخطوط الأفقية صفوفاً، أما الخطوط العمودية فتسمى أعمدة، ويقال للصيغة ، المصفوفة الممتدة.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & c_m \end{bmatrix}$$

مثال [3]

نظام المعادلات الخطية التالية.

$$x - 5y + 2z = 13$$

$$3x - 14y + 3z = 29$$

$$4x - 12y + 3z = 35$$

يمكننا استخدام الخطوات التالية للحل :

1. المصفوفة الممتدة للنظام هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 3 & -14 & 3 & \vdots & 29 \\ 4 & -12 & 3 & \vdots & 35 \end{bmatrix}$$

وبما أن الصفوف الواردة هي المصفوفة الممتدة تقابل المعادلات الواردة في النظام الخطي للمثال ، فإن التعليمات الثلاث المستخدمة في طريقة حل المعادلات الخطية تكافئ العمليات المستخدمة على صفوف المصفوفة الممتدة الآتية:

1- ضرب أي صف بكمية ثابتة غير صفرية.

2- تبديل أي صفين أحدهما مكان الآخر.

3- إضافة مضاعف أحد الصفوف لصف آخر.

وتسمى هذه العمليات، عمليات الصف البسيطة.

2. نضرب الصف الأول في 3- ونضيفه إلى الصف الثاني. كذلك نضرب الصف الأول في 4- ونضيفه للصف الأول ولذلك سوف نحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 2 & -5 & \vdots & -17 \end{bmatrix}$$

3. بضرب الصف الثاني في 2- وإضافته للصف الثالث سنحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

الصيغة التي حصلنا عليها تسمى الصيغة المدرجة التي تقابل النظام الخطي المكافئ:

$X -5y+2z=13$

$y-3z=-10$

$z=3$

وبالتعويض عن قيمة z نحصل على الحل:

x=2 ، y=1 ، Z=3

يوجد في نظام المعادلات الخطية نوعين من الانظمة الخطية

5.1 نظام المعادلات الخطية المتجانسة والغير متجانسة

عبد سعيد و حمدون (2001) وضحا مفاهيم المعادلات الخطية المتجانسة

ان المنظومة الخطية التي لها n من المجاهيل والتي حدودها خالية من لمجاهيل هي اصفار تسمى منظومة خطية متجانسة وتكون صيغتها على النحو الاتي

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n= 0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n= 0$$
.
.
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0$$

اذا كان m=n فيكون الحل صفري فقط

مثال

تأمل المنظومة المتجانسة

$$x+2y - 3z + w = 0$$

$$x - 3y + z - 2w =0$$

$$3x + y - 3z + 5w = 0$$

ان لهذه المنظومة حلاً غير صفري لوجود اربعة مجاهيل وثلاث معادلات نحولها الى الصيغة المدرجة فتنتج

$$\boldsymbol{x + 11w = 0}$$

$$\boldsymbol{y + 7w =0}$$

$$\boldsymbol{Z+ 6w = 0}$$

فاذا افترضنا ان $\boldsymbol{w=t}$ تكون مجموعة الحل هي

$\{(-11t,-7t,-8t,t), -\infty<1<\infty\}$ ويكون عدد الحلول غير منتهي

وكما وضح ايرز (1968)، مفهوم المعادلات الخطية الغير متجانسه

معادلة الخطية الغير متجانسة

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots +a_nx_n=b$$

معادلة غير متجانسة فما اذا كان b ≠0 وتسمى المجموعة مجموعة المعادلات الغير متجانسة

6.1 تطبيقات حول المعادلات الخطية [1]

تستخدم المعادلات الخطي (equations Linear) متغيراً واحدة أو أكثر من متغير ، بحيث يعتمد أحد المتغيرات على الآخر ويمكن تمثيل أي كمية غير معروفة القيمة بمعادلة خطية ، وتكون الصيغة الرياضية القياسية للمعادلة الخطية xz = y يمكن استخدام المعادلات الخطية في التطبيقات الحياتية اليومية ، مثل حساب معدل المسافات المقطوع للمركبات ، أو حساب الميزانية ، أو توقع أرباح مشروع تجاري معين ، أو تقدير التكاليف ، وفيما يلي نذكر بعض على هذه التطبيقات

1.6.1 حساب معدلات المسافات [1]

عندما يتحرك جسم ما بسرعة ثابتة ، تزداد المسافة بمرور الزمن بطريقة خطية ، ويمكن صياغة معدل المسافة المقطوعة بالصيغة الرياضية التالية:

حيث أن:

D : هي المسافة التي يقطعها الجسم .

s : هي المعدل الذي يسافر به الجسم .

t : الزمن الذي يمضي خَّلل قيام الجسم بقطع المسافة .

وفي حالة عدم تحرك الجسم ، لا توجد مسافة مقطوعة ، وحينها يكون تقاطع يساوي صفر ، وفي هذه الحالة يبدأ و الخط بيانيا عند النقطة (0,0) ويكون ميل الخط هو معدل التغير.

مثال: - إذا كان شخص ما قادر على الركض بسرعه 5 m/s لمدة 20 s ، فإنه لحساب المسافة التي قطعها في ذلك الزمن المحدد ، ولحل هكذا مسائل نتبع التالي:-

D = s.t

D=(20 s).(5 m/s)

D =100

2.6.1 حساب التكاليف المتوقعة [1]

يمكن صياغة إجمالي التكلفة المتغيرة بالمعادلة الرياضية:

$P = m.x$

حيث أن:

P : إجمالي التكلفة المتوقعة .

m : معدل التكلفة للعنصر الواحد .

X: عدد العناصر التي يجب حساب كلفتها .

وفي حالة عدم وجود نشاط ، لا توجد تكلفة ، وحينها يكون تقاطع y يساوي صفر ، وفي هذه الحالة يبدأ رسم الخط بيانياً عند النقطة (0,0) ويكون ميل الخط هو معدل التغير.

مثال :عند قيام التاجر ببيع حلوى ، فإن القطعة الواحد تكلفه 50 سنتاً لكل قطعة ، فإذا كان بيع القطعة الواحدة مقابل 1 دولار لكل قطعة ، وتمكن من بيع ٢٠٠ قطعة حلوى ، فإنه لحساب إجمالي التكلفة ،ولحل هكذا مسائل نتبع التالي:-

$P = m. x$

حيث أن:

P : إجمالي تكلفة الحلوى على التاجر .

m: عدد قطع الحلوى المراد حساب تكلفتها .

x : عدد قطع الحلوى المراد حساب تكلفتها .

$P= 200 \times 0.5 = 100$

3.6.1 حساب رسوم خدمة معينة [1]

لتقدير الرسوم الواجب دفعها لسيارة أجرة (التاكسي) يمكن تكوين معادلة خطية ، بافتراض أن D هي المسافة المقطوعة كما يلي:

$P = d.m$

حيث أن:

P : الرسوم الواجب دفعها لسيارة الأجرة .

m : معدل الثمن الواجب دفعه لقطع سيارة الأجرة مسافة محددة .

d : المسافة الحقيقية المقطوعة

مثال: إذا كانت المسافة المراد قطعها 5 كيلو متر ، وكان معدل ثمن الكيلو متر الواحد يساوي ٢ دولار ، ولحل هكذا مسائل نتبع التالي:

$P=d.m$

$P=(5\ km).(2\ \$)=10\ \$$

الفصل الثاني

الطرق العددية لحل المعادلات الخطية وبرمجتها

1.2 المقدمة

ان من اهم اسباب تطور الرياضيات هو البحث عن طرق لتحليل وحل المسائل التطبيقية . وان بعض هذه المسائل يقودنا الى انظمة المعادلات الخطية وحلول هذه الانظمة يزودنا بمعلومات قيمة وتعتبر محاولات ايجاد طرق حل انظمة المعادلات الخطية من اهم اسباب ضهور وتطور فرع مهم في الرياضيات الا وهو الجبر الخطي وفي هذا الفصل سنتعرف على حلول انظمة المعادلات الخطية ومن هذه الطرق التي سوف نتطرق اليها في هذا الفصل حول الطرق العددية لحل جملة من المعادلات الخطية (المباشرة وغير المباشرة) وبرمجتها بواسطة برنامج الماتلاب

2.2 طرق حل المعادلات الخطية المباشرة

طرق حل المعادلات الخطية المباشرة هي الطرق التي تقوم بحساب الحلول بشكل مباشر دون الحاجة إلى التقدير أو التقريب. تشمل هذه الطرق مجموعة واسعة من الأساليب تستخدم هذه الطرق عادةً في حالة المعادلات ذات الحجم الصغير إلى المتوسط حيث يكون الحساب المباشر أكثر كفاءة من الطرق غير المباشرة.

1.2.2 طريقة كاوس (Gauss method)[8]

لحل النظام باستخدام طريقة كاوس نقوم بوضع المصفوفة الموسعة [A|B] على الصيغة الدرجية الصفية، ومن ثم تحصل على نظام جديد من المعادلات يكافئ النظام الأصلي ولكنه أبسط منه في الحقيقة النظام الجديد هو نظام مثلثي ولذا فإنه يكون من السهل الحصول على حل للنظام.

مثال

لحل النظام التالي بأستخدام طرية كاوس

$2x_2 + 4x_3 = 3$

$X_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$

$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$

نتبع ما يلي: [8]

$$[A|B]=\left[\left.\begin{matrix}0 & 2 & 4\\1 & -3 & 5\\3 & -1 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\1\\1\end{matrix}\right]$$

$$[A|B]\xrightarrow{R_{12}}\left[\left.\begin{matrix}1 & -3 & 5\\0 & 2 & 4\\3 & -1 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\3\\1\end{matrix}\right]\xrightarrow{-3R_{13}}\left[\left.\begin{matrix}1 & -3 & 5\\0 & 2 & 4\\0 & 8 & -16\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\3\\-2\end{matrix}\right]$$

$$\xrightarrow{1/2R_2}\left[\left.\begin{matrix}1 & -3 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 8 & -16\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\3/2\\-2\end{matrix}\right]\xrightarrow{-8R_{23}}\left[\left.\begin{matrix}1 & -3 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -32\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\3/2\\-14\end{matrix}\right]$$

$$\xrightarrow{-1/32R_3}\left[\left.\begin{matrix}1 & -3 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1\\3/2\\-7/6\end{matrix}\right]$$

والمصفوفة الموسعة الأخيرة على صيغة الدرجة الصفية. وبالتالي فأن النظام المعطى يكافئ النظام:

$x_1-3x_2+5x_3=1$

$$x_2+2x_3=\frac{3}{2}$$

$$x_3=\frac{7}{6}$$

بالتعويض عن قيمه x_3 في معادله الثانية نجد ان $x_2=\frac{5}{8}$ وأخيرا بالتعويض عن قيمتي x_2 و x_3 في المعادلة الاولى نجد ان $x_1=\frac{11}{16}$

ولحل ببرنامج الماتلاب [2]

hussein_alakkam.m

```
clc;
clear all;
a=[0 2 4 3; 1 -3 5 1; 3 -1 -1 1];
n=size(a,1);
for k=1:n-1
    if abs(a(k,k))<= eps
        for i=k+1:n
            if abs(a(i,k))>eps
                for j=k:n+1
                    tmp=a(i,j);
                    a(i,j)=a(k,j);
                    a(k,j)=tmp;
                end
            end
        end
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n+1
            a(i,j)=a(i,j)-a(k,j)*a(i,k)/a(k,k);
        end
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if i>j
            a(i,j)=0;
        end
         (a(i,j));
    end
end
for i=n:-1:1
   s=0;
   for j=i+1:n
       s=s+a(i,j)*x(j);
   end
   x(i)=(a(i,n+1)-s)/a(i,i);
end
x=x;
disp('the new matrix a after elimination=')
disp(a)
disp('the solution x=')
disp(x)
```

```
Command Window
the new matrix a after elimination=
    3.0000   -1.0000   -1.0000    1.0000
         0    2.0000    4.0000    3.0000
         0         0   10.6667    4.6667

the solution x=
    0.6875    0.6250    0.4375

fx >>
```

مثال [8]

لحل نظام المعادلات التالي بطريقة كاوس للحذف

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$

$$7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32$$

$$6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31$$

نتبع التالي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 & \vdots & 23 \\ 7 & 10 & 8 & 7 & \vdots & 32 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & \vdots & 33 \\ 3 & 7 & 9 & 10 & \vdots & 31 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -\frac{7}{5}R_1 + R_2 \\ -\frac{6}{5}R_1 + R_3 \\ -R_1 + R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 & \vdots & 23 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0 & \vdots & -0.2 \\ 0 & -0.4 & 2.8 & 3 & \vdots & 5.4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

$$2R_2 + R_1 \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 & \vdots & 23 \\ 0 & 0.2 & \bar{0}.4 & 0 & \vdots & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \frac{-3}{2}R_3 + R_4 \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 & \vdots & 23 \\ 0 & 0.2 & \bar{0}.4 & 0 & \vdots & -0.2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & \vdots & 0.5 \end{bmatrix}$$

ثم نكتب النظام المقابل:

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$

$$0.2x_2 - 0.4x_3 = -0.2$$

$$2x_3 + 3x_3 = 5$$

$$0.5x_4 = 0.5$$

ومنه $x_4 = 1$

$$x_3 = \frac{5 - 3x_4}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{0.4x_3 - 0.2}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$

$$x_1 = \frac{23 - 7x_2 - 6x_3 - 5x_4}{5} = \frac{23 - 18}{5} = 1$$

ومنه حل النظام هو:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولحل ببرنامج الماتلاب [2]

hussein_alakkam.m

```
clc;
clear all;
a=[5 7 6 5 23; 7 10 8 7 32; 6 8 10 9 33; 5 7 9 10 31];
n=size(a,1);
for k=1:n-1
    if abs(a(k,k))<= eps
        for i=k+1:n
            if abs(a(i,k))>eps
                for j=k:n+1
                    tmp=a(i,j);
                    a(i,j)=a(k,j);
                    a(k,j)=tmp;
                end
            end
        end
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n+1
            a(i,j)=a(i,j)-a(k,j)*a(i,k)/a(k,k);
        end
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if i>j
            a(i,j)=0;
        end
       (a(i,j));
    end
end
```

Command Window

```
the new matrix a after elimination=
    5.0000    7.0000    6.0000    5.0000   23.0000
         0    0.2000   -0.4000         0   -0.2000
         0         0    2.0000    3.0000    5.0000
         0         0         0    0.5000    0.5000


the solution x=
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

fx >>
```

2.2.2 طريقة كاوس جوردان (Gauss-Jordan method) [8]

طريقة كاوس جوردان شبيه بطريقة كاوس ولكن في هذه الطريقة نحول مصفوفة الامثال الى مصفوفة قطرية (اي مصفوفة مثلثية عليا وسفلى في آن واحد).

مثال [8]

لحل نظام المعادلات الخطية التالية بطريقة كاوس – جوردان:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$$
$$8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 21$$
$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6$$

نتبع التالي:

نأخذ المصفوفة الموسعة ونجري عليها تحويلات اولية لتحويل مصفوفة الامثال الى مصفوفة قطرية كما يلي:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3 \\ \\ \frac{-3}{2}R_1+R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$-3R_2+R_3 \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \frac{1}{4}R_3+R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right] -2R_4+R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ \\ \frac{1}{2}R_3+R_2 \\ \\ 2R_2+R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اي الحل هو:

$x_4 = -1$

$x_3 = -1$

$x_2 = 1$

$x_1 = 1$

ويمكن حل بأستخدام برنامج الماتلاب: [2]

hussein_alakkam2.m | hussein_alakkam.m

```
clc;
a=[2 2 -1 1 4; 4 3 -1 2 6; 8 5 -3 4 12; 3 3 -2 2 6];
n=size(a,1);
for k=1:n
    if abs(a(k,k))<= eps
        for i=k+1:n
            if abs(a(i,k))>eps
                for j=k:n+1
                    tmp=a(i,j);
                    a(i,j)=a(k,j);
                    a(k,j)=tmp;
                end
            end
        end
    end
for i=k+1:n+1
    a(k,i)=a(k,i)/a(k,k);
end
a(k,k)=1;
  for i=1:n
    if i~=k
        for j=k+1:n+1
            a(i,j)=a(i,j)-(a(k,j))*a(i,k);
        end
    end
  end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if i>j
            a(i,j)=0;
        elseif i<j
            a(i,j)=0;
        end
        (a(i,j));
    end
end
for m=1:n
    x(m)=a(m,n+1);
end
x=x'
disp('the identity matrix from a=')
disp(a)
disp('the solution x=')
disp(x)
```

Command Window

```
x =

     1     1    -1    -1

the identity matrix from a=
     1     0     0     0     1
     0     1     0     0     1
     0     0     1     0    -1
     0     0     0     1    -1

the solution x=
     1     1    -1    -1
```

وهناك طرق اخرى لحل المعادلات الخطية بالطريقة المباشرة مثل(طريقة كرامر وطريقة معكوس المصفوفة وطريقة الحذف ....الخ)

3.2 طرق حل المعادلات الخطية غير المباشرة (التكرارية)

طرق حل المعادلات الخطية غير المباشرة تعتمد على استراتيجيات مختلفة عن الطرق المباشرة والتي تعتمد على تحويل المعادلة الخطية إلى مشكلة تحويل غير مباشرة يمكن حلها بسهولة، مثل تحويل المعادلات إلى صورة مصفوفات واحتساب القيم الخاصة لهذه المصفوفات. تساعد هذه الطرق في حل معادلات خطية كبيرة الحجم ومعقدة بشكل فعال، وتجد تطبيقات واسعة في العديد من المجالات مثل الهندسة، والفيزياء، والعلوم الاقتصادية.

1.3.2 طريقة جاكوبي (Jacobi Method):[8]

طريقة جاكوبي هي إحدى الطرق المستخدمة لحل المعادلات الخطية. تعتمد هذه الطريقة على تقدير قيمة متغيرات المعادلة بشكل تدريجي. يتم تطبيق الطريقة عن طريق استخدام تقديرات مبدئية لقيم المتغيرات، ثم يتم تحسين هذه التقديرات تدريجياً حتى يتم الوصول إلى حل مقبول بدقة مقبولة. تُستخدم طريقة جاكوبي بشكل عام في المعادلات ذات البنية الخطية الكبيرة والمعقدة التي يصعب حلها بالطرق التقليدية

مثال[8]

لحل نظام المعادلات بطريقة جاكوبي

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$$

نتبع التالي:

نضع المعادلات بالصيغه :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

فنحصل على ترتيب معادلات كالتالي :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(6 - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(4 - x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(7 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)})$$

وبدءاً بالمتجه الابتدائي $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ فأننا نحصل على التكرارات المبينة في جدول

وقد توقفت التكرارات عند تحقق الشرط.

$$Max\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le 0.005$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.667	1.750
2	1.283	1.342	0.983
3	0.860	0.944	0.773
4	0.977	0.910	1.084
5	1.053	1.046	1.034
6	0.988	1.008	0.962
7	0.989	0.983	1.004
8	1.008	1.004	1.010
9	1.000	1.004	0.995
10	0.997	0.998	0.999
11	1.001	1.00	1.002

في بعض الأسئلة يحدد عدد تكرارات كما في المثال التالي الذي سوف اقوم بحل المثال عن طريق برنامج الماتلاب

مثال[2]

+لحل نظام المعادلات الخطية التالي Ax=b باستخدام طريقة جاكوبي بـ 20 تكرار ببرنامج الماتلاب.

$10x_1 - x_2 + 2x_3 \quad = 0$

$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$

$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$

$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$

نتبع التالي ببرنامج الماتلاب :

hussein_alakkam3.m *

```
clc;
clear all;
a=input('enter a co-efficient matrix a: ');
b=input('enter vector b: ');
xk=input('enter initial vector: ');
k=input('enter number of iterations: ');
n=length(b);
x=zeros(n,1);
for j=1:k
    for i=1:n
        x(i)=(b(i)-(a(i,[1:i-1,i+1:n])*xk([1:i-1,i+1:n])))/a(i,i);
    end
    xk=x;
end
disp(x)
```

Command Window

```
>> hussein_alakkam3
enter a co-efficient matrix a: [10 -1 2 0; -1 11 -1 3; 2 -1 10 -1; 0 3 -1 8]
enter vector b: [0;25;-11;15]
enter initial vector: [0;0;0;0]
enter number of iterations: 20
    0.3696
    1.9440
   -0.8759
    1.0365
```

2.3.2 طريقه كاوس - سيدل (Gause-Seidel Method) [8]

طريقة كاوس-سيدل هي إحدى الطرق التكرارية المستخدمة لحل أنظمة المعادلات الخطية. تعد هذه الطريقة تحسينًا على طريقة جاكوبي، حيث تستخدم القيم المحدثة للمتغيرات بمجرد توفرها ضمن كل تكرار تستخدم طريقة كاوس-سيدل بشكل واسع في مجالات متعددة كالهندسة وعلوم الكمبيوتر، خاصة عندما تكون المعادلات كبيرة ومعقدة، حيث تظهر فعاليتها في تقليل الوقت اللازم للحصول على حل بدقة مقبولة.

مثال

لحل نظام المعادلات الخطية التالية:

$$13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 18$$
$$2x_1 + 12x_2 + x_3 - 4x_4 = 13$$
$$3x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 29$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 31$$

بطريقة كاوس – سيدل.

نتبع التالي:

نضع المعادلات بالصيغه التالي

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right)$$

فنحصل على ترتيب معادلات

$$x_1 = \frac{18}{13} - \frac{5}{13}x_2 + \frac{3}{13}x_3 - \frac{1}{13}x_4$$
$$x_2 = \frac{13}{12} - \frac{2}{12}x_1 - \frac{1}{12}x_3 + \frac{4}{12}x_4$$
$$x_3 = \frac{29}{10} - \frac{3}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4$$
$$x_4 = \frac{31}{9} - \frac{2}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{3}{9}x_3$$

وبدءاً بالمتجه الابتدائي $x^0 = (0, 0, 0, 0)$

فأننا نحصل على النتائج المبينة في جدول

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0	0	0	0

1	1.385	0.835	2.826	0.984
2	1.402	1.942	2.858	3.870
3	1.000	1.969	3.001	4.001
4	1.012	1.999	2.996	3.996
5	1.000	1.999	3.000	4.000

مثال [2]

لحل نظام المعادلات الخطية التالية Ax=b باستخدام طريقة كاوس سيدل مع 20 تكرارا عن طريق برنامج الماتلاب

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad = 0$$

$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$

$$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

نتبع التالي في برنامج الماتلاب:

hussein_alakkam3.m | hussein_alakkam4.m *

```
a=input('enter a co-efficient matrix a: ');
b=input('enter vector b: ');
xk=input('enter intial vector: ');
k=input('enter number of iterations: ');
n=length(b);
x=zeros(n,1);
for j=1:k
    for i=1:n
        x(i)=(b(i)-(a(i,[1:i-1,i+1:n])*xk([1:i-1,i+1:n])))/a(i,i);
        xk(i)=x(i);
    end
    xk=x;
end
disp(x)
```

Command Window

```
enter a co-efficient matrix a: [10 -1 2 0; -1 11 -1 3; 2 -1 10 -1; 0 3 -1 8]
enter vector b: [0;25;-11;15]
enter intial vector: [0;0;0;0]
enter number of iterations: 20
    0.3696
    1.9440
   -0.8759
    1.0365
```

الخلاصة

يستعرض هذا البحث المفاهيم الأساسية لأنظمة المعادلات الخطية، حيث يبدأ بتعريف المعادلة الخطية ويبرز الفروق بين المعادلات الخطية وغير الخطية. كما يوضح المفهوم الهندسي لنظام المعادلات الخطية ويستعرض الأنواع المختلفة من المعادلات الخطية، بما في ذلك المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة. بالإضافة إلى ذلك، يقدم البحث طرق حل المعادلات الخطية بشكل جبري وعددي، مع التركيز على عمليات البرمجة بالماتلاب.

المصادر

1. Smith،Jessica (2018), *How Are Linear Equations Used in Everyday Life* from website (sciencing.com)

٢. امينه، غريب (2020) *الطرق العددية لحل جمله معادلات خطية وبرمجتها* الجزائر (المدية) جويلية

٣. آيرز ،افرانك (1962) *نظريات ومسائل في مصفوفات* دار ماجكر وهيل للنشر والدار الدولية للنشر والتوزيع، جمهورية مصر العربية

٤. التميمي ،علي جاسم ،(2009) ، *مقدمة في الجبر الخطي*. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ، عمان الاردن

٥. حمدون ،نزار وعبد سعيد ،يحيى، (2001) *الجبر الخطي* . مديرية دار الكتب للطباعة والنشر ، شارع ابن الاثير الموصل العراق

٦. سعيد، عبد الرحمن محمد(2006) الجبر الخطي *منشورات جامعه السودان المفتوحة*

٧. سمحان ،معروف عبد الرحمن والسحيباني ،علي بن عبدالله الذكير ، فوزي بن احمد (2014) *الجبر الخطي وتطبيقاته* دار الخريجي للنشر والتوزيع

٨. نعمه، كوثر عبود (2018) *التحليل العددي وطرق حسابه العددي بأستخدام الماتلاب* الذاكرة للنشر والطبع بغداد-الصرافية