وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعه بابل
كليه التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبة

بحث تخرج مقدم لمجلس كليه التربية للعلوم الصرفة / قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل شهاده البكالوريوس في الرياضيات

اعداد

ميلاد عماد مطر نفس

بأشراف

م.م. حيدر فيصل غازي

١٤٤٥هـ **٢٠٢٤م**

بسم الله الرحمن الرحيم

نَرفَعُ دَرَجاتٍ مَن نَشَآءُ

وَفَوقَ كُلِّ ذِى عِلمٍ

عَلِيمٌ

صدق الله العظيم

الاهداء

من قال أنا لها "نالها"
وأنا لها وإن أبت رغماً عنها"

الحمد الله حبا وشكرا وامتنانا على البدء والختام لم تكن الرحلة قصيرة ولا الطريق محفوفا بالتسهيلات، لكنني فعلتها، فالحمد لله الذي يسر البدايات وبلغنا النهايات
بفضله وكرمه
أهدي هذا النجاح لنفسي الطموحة أولا ،ابتدأت بطموح وانتهت بنجاح ثم إلى كل من سعى معي لإتمام مسيرتي وطريقي للنجاح ... (عائلتي) الداعم الأول والأخير دمتم لي سندا لا عمر له ...
كثيرًا ما تعثرت وسقطت، ولكنني قد تمكنت من النهوض في النهاية، وذلك بفضل أعظم الأشخاص لي ،شكرًا لأبي الذي نزع الشوك من طريق النجاح،، شكرًا الى حبيبتي صاحبه القلب الحنون ،رفيقه روحي الإنسانة العظيمة ،أمي التي كان دعائها السراج المنير في حياتي
والى الشموع التي تنير لي طريقي وانتظروا هذه اللحظة كثيرا ليفخروا بي كما أفخر بهم وبوجودهم (أخواني وأخواتي)

**** سأسعى دائما لتحقيق مايجعلكم فخورين بي****

الشكر والعرفان

يسرني أن أوجه شكري لكل من نصحني وأرشدني ووجهني وساهم معي في إعداد هذا البحث بإيصالي للمراجع والمصادر المطلوبة في أي مرحلة من مراحله، وأشكر على وجه الخصوص أستاذي الفاضل (حيدر فيصل) على مساندتي وإرشادي بالنصح والتصحيح وعلى اختيار العنوان والموضوع وأكماله على أتم وجه

****

المحتويات

الخلاصة

تمت الدراسة في هذا البحث على المفاهيم الأساسية للأعداد المركبة وتم التطرق الى بعض خصائص الدوال المشابهة للدوال الحقيقية الأولية (الأساسية) مثل الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية والدوال المثلثية والزائدية والدوال المركبة التي تختلف عن تلك لمثيلاتها الحقيقية

المقدمة

التحليل المركب واحد من اكثر فروع الرياضيات نجاحاً وتشويقاً ،فنتائجه تساعد على اثبات نظريات مهمه وتفتح آفاقًا لعدة مفاهيم في مجالات أخرى للرياضيات وتعتمد الكثير من الطرق الفعالة المستخدمة في تطبيقات الرياضيات في الهندسة والعلوم الأخرى في نظريات الدوال المركبة كما يعطي التحليل المركب مقدمه ممتازة للرياضيات المعاصرة بسبب سعة تطبيقاته وجمعه بين المفاهيم الهندسية والتحليلية ويسر الكثير من نتائجه تعد التطورات الحديثة في نظرية الدالة المركبة ونظرية المتغيرات المركبة بإعطاء تطبيقات مفيدة في كثير من مجالات الهندسة .

أُبتدأ ظهور اللوغاريتمات لأول مرة في القرن السابع عشر الميلادي على يد العالم الرياضي الاسكتلندي جون نيبِير. وقد ابتكر نيبِير هذا المفهوم بهدف (تسهيل العمليات الحسابية الطويلة) التي كانت مطلوبة في علم الفلك والعلوم الرياضية الأخرى

الفصل الأول

the complex number العدد المركب

1.1مقدمه [4]

بسبب نمو وتعقد الحياة الانسانية مع تطور الحضارة فقد احتاج الانسان في كل مرحله الى نظام اعداد يلبي متطلباته الحياتية لقد شهد تطور العدد المركب لعدة مراحل يمكن تلخيصها في النقاط الاتية:

- في عام 1545نشر جيرولاما كاردامو كتابة الفن العظيم مع حل المعادلة $Z^3 + Z^2a_2 + Za_1 + a_0 = 0$
- في عام 1572،اظهر رافائيل بومبيلي في كتابة "الجبر" ان
- في عام 1732،قدم ليونهارد اويلر صيغته لحل$x^n - 1 = 0$ ،والتي $\cos\theta \sqrt{-1} \sin\theta$ وهو اول من استخدم الرمز $i = \sqrt{-1}$
- في عام 1831، كارل فريدريك غاوس ،انتج تمثيل هندسي واضح ل x+yi

ومن الأمثلة عليها ما يلي: (i3+39)، (2 + iπ - 2.2i -0.8)،(√2 + i/2))) ويلاحظ من خلال هذه الأمثلة أنّ أي جزء من أجزاء الأعداد المركبة قد يساوي القيمة صفر، وبالتالي فإنّ كلاً من الأعداد الحقيقية، والأعداد التخيلية هي أيضاً أعداد مركبة؛ حيث إن الأعداد الحقيقة هي أعداد مركبة فيها الجزء التخيلي يساوي صفر، وفي المقابل فإن الأعداد التخيلية هي أعداد مركبة فيها الجزء الحقيقي يساوي صفر

2.1 العدد المركب complex number [4]

يمكن تعريف العدد المركب على انه ازواج مرتبة z=(x ,y) حيث x ,y ارقام حقيقيه , ويمكن تشكيلها على النحو التالي:

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1 \qquad i^{3=-\sqrt{-1}} \qquad i^4 = 1$$

حيث x يسمى الجزء الحقيقي و y يسمى الجزء التخيلي :

$$x = Re(z) \qquad y = I\,m\,(z)$$

مثال 1.1 ليكن a ,b اعداد صحيحه فان :

$(a,0)=a+i0=a$ عدد حقيقي تام

$(0,a)=0+ia=ia$ عدد خيالي تام

$(a ,b)=a+ ib$ عدد مركب

١-٣ خصائص الأعداد المركبة:

ليكن $z = a + ib$ عدد مركب نعرف معيار أو مقياس العدد z على الصورة √

$|z|=a2+b2$

وهندسياً نرى أن معيار العدد المركب ماهو إلا المسافة بين العدد ونقطه الأصل (0,0) في المستوي

أيضا $\bar{Z}$ مرافق العدد المركب z على الصورة $z = a - ib$، وهندسياً نتحصل عليه بانعكاس العدد z حول المحور السيني .لاحظ أن $|z| = |z|$، كما أننا نستطيع ومن خلال التعريفات السابقة أن نستنتج العلاقة التالية لكل $z, w \in C$.

1) $z + w = z + w$

2) $z * w = z * w$

3) $|z*w| = |z|*|w|$

4) $Re(z) \leq |z|$

5) $Im(z)\leq|z|$

6) $Re(z)= z+z\ 2$

4-1 اصل الاعداد المركبة [4]

متعددة الحدود بصيغتها العامة 0 $aP^2 + bp + c$ يمكن حلها بواساطة الحل العام :

$$P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

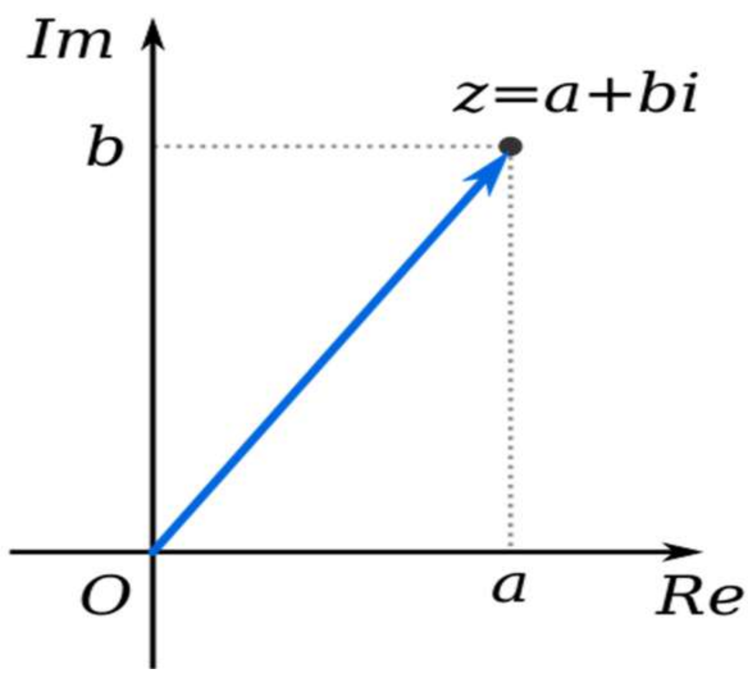
فاذا اعدنا صياغة المعادلة العامة لتصبح بالشكل :

a=1 ، $P^2 + 2bP + \ ^2 = 0$

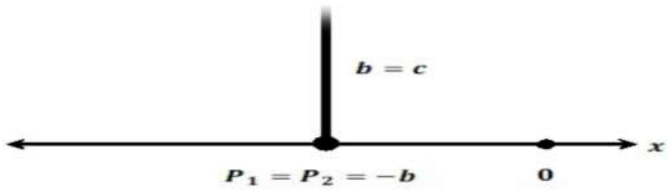
فان الحل العام سيصبح بالشكل التالي $P = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$

5-1 مخطط أرغند

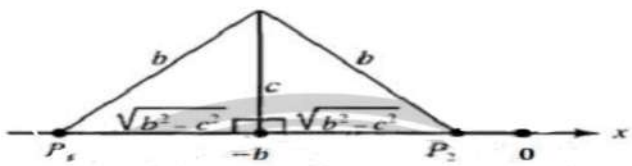
يمكن أن يمثل عدد عقدي على شكل زوج من الأعداد الحقيقية (a, b) مكونا بذلك متجهة على مخطط يسمى مخطط أرغند، ممثلا المستوى العقدي. "Re" هو محور الأعداد الحقيقية، "Im" هو محور الأعداد التخيليه، و i هو الوحدة التخيلية والتي تحقق i2 = −1.



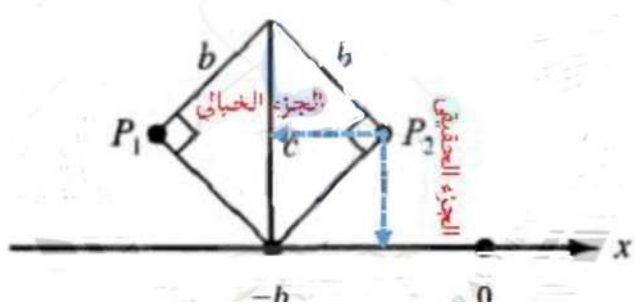
- *if* $b=c$ *then* $P_1 = P_2 = -b$ & $b^2 - c^2 = 0$



- if $b>c$ then $P_1 \neq P_2$ & $b^2 - c^2 > 0$



- if $b<c$ then $P_1 \neq P_2$ & $b^2 - c^2 < 0$



شكل (١-١) يوضح الاحتمالات الثلاث لازاحة الى اليسار اواليمين

6-1 العمليات على الأعداد المركبة

1.6.1 قانون الجمع Addition Low

$$(Z1 + Z2 = (x1 + iy1) + (x2 + iy2) = (x1 + x2) + i(y1 + y2))$$

2.6.1 قانون الطرح Subtraction Low

$$(Z1 - Z2 = (x1 + iy1) - (x2 + iy2) = (x1 - x2) + i(y1 - y2))$$

مثال :.ليكن $z_1=3+7i$,$z_2=5\_6i$ جد z1+z2, **z1_z2,**

الحل :.

$$z1 + z2 = (3 + 7i) + (5 - 6i) = (3 + 5) + i(7 - 6) = 8 + i = (8, 1)$$

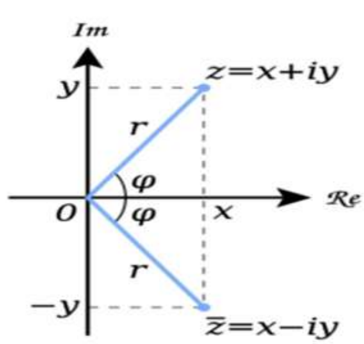
$$z1\_z2 = (3 + 7i)\_(5\_6i) = (3\_5) + i(7 + 6) = -2 + 13i = (- \ , 13)$$

-

7.1 المرافق العدد المركب Complex Conjugate

z=a-bi مرافقه z=a+bi

المرافق المركب لعدد مركب هو عدد مركب له نفس الجزء الحقيقي للعدد الأصلي غير أن له جزءا تخيليا مساويا للجزء التخيلي للعدد الأصلي من حيث القيمة المطلقة ومختلفا عنه من حيث الأشارة حيث :



رسم بياني يبين z ومرافقه $\bar{z}$ في المستوي المركب. يحدد مرافق عدد مركب ما من خلال التماثل حول محور الأعداد الحقيقية

8.1 خصائص العدد المرافق properties of the conjugate

1. $Z=0 \rightarrow \bar{z}=0$
2. $\bar{z}=\overline{(x+\iota y)}=x\_\iota y$
3. $\bar{\bar{z}}=z$
4. $\bar{\imath}$=-I and $\_\bar{\imath}=i$
5. $\bar{z}$=-z if z is pure Imagenary
6 .$\bar{z}=z \; if \; is \; pure \; Real$
7. $Z\bar{z}=x^2+y^2$
8. $Z+\bar{Z}$=2Re(Z)=2x
9. $Z\_\bar{z}=2lim(Z)$=2iy
10. a. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
    b. $\overline{z_{1-z_2}}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
    c. $\overline{z_{1}z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$
    d. $(\frac{\overline{z_1}}{z_2})=\left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right), \overline{z_2}\neq 0$

....

قانون الضرب

$$z_1 z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$
$$=x_1x_2+ix_2y_1+ix_1y_2-y_1y_2$$
$$=x_1x_2-y_1y_2+i(x_2y_1+x_1y_2)$$
$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_2y_1+x_1y_2$$

مثال .:

ليكن $z_1=3+7i$ و $z_2=5-6i$ جد z_1z_2

z_1z_2=(3+7i)(5-6i)

=(3 × 5-7×(-6)+i(3×(-6)+5 ×7)

=(15+42)+i(-18+35)

= 57+17i

ملاحظة

اذا كان لدينا عدد مركب مضروب في مرافقه نستخدم عمليه الضرب تكون

$(\text{التخيلي})^2+(\text{الحقيقي})^2$

مثال:.

$(1+2i)(1\_2i)=(1)^2+(2)^2$

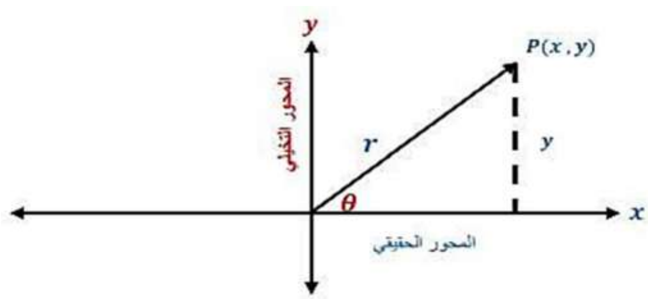
$=1+4$

$=5$

1.5 التمثيل الهندسي للعدد المركب

العدد المركب $(x+yi)$ يمكن تمثيله هندسيا بالنقطه (x,y) حيث يسمى المحور الحقيقي وهو يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب ،أما المحور (y-axis) فيسمى المحور التخيلي وهو يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ،

ويمكن تمثيل بعض العمليات التي تجري على الأعداد المركبة تمثيلا هندسيا وتسمى الأشكال الناتجة بأشكال (ارجاند) ويسمى المستوي الذي يحتويها بالمستوى المركب وسترمز لها بالرمز $p(x,y)$

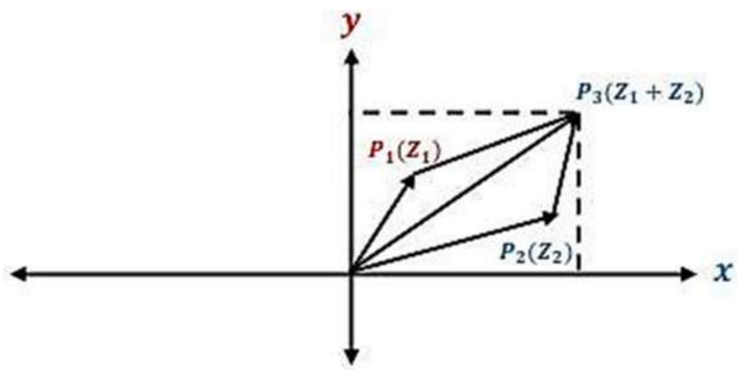


اذا كان $z_1=x_1+y_1i$ ، $z_2=x_2+y_2i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $p_1(x_1,y_1)$، $p_2(x_2,y_2)$, فأن :.

$Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$

ويمكن تمثيل z_1+z_2 بالنقطة $p_3=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ وذلك باستخدام المعلومات المتعلقة بالمتجهات وكما موضح بالشكل :.

اي ان .... $op_1+op_2=op_3$ اسهم



مثال :.مثل العمليات الأتيه هندسيا في شكل (ارجاند)

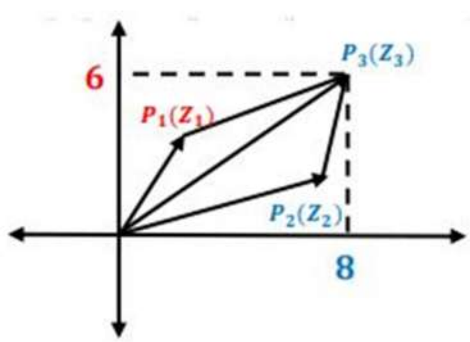
(5+2i)+(3+4i)

z_1=3+4 … p_1(3,4)

z_2=5+2i...p_2(5,2)

$z_1 + z_2$=(3+4i)+(5+2i)

1+z_2 =z_3 =(8+6i)…p_3(8,6)

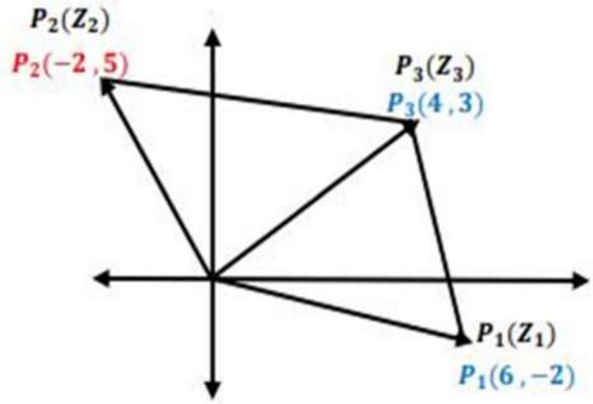


مثال:. مثل العمليات الاتية هندسيا في شكل ارجاند $(6-2i)-(2-5i)$

$z_1+(-z_2)=(6-2i)+(-2+5i)$

$z_1=6-2i \ldots p_1(6,-2)$

$z_2=2-5i \ldots p_2(-2,5)$



التمثيل القطبي للعدد المركب

10.1 ***التمثيل القطبي [1] polar Representation***

وجدنا ان الاعداد المركبة يمكن ان تمثل بمتجهات في المستوي المركب وفي هذا الجزء سوف نستخدم فكرة قطعة الخط المستقيم الموجهة لحساب خواص الطول وزوايا ميل المتجه في المستوي المركب

لندرس المتجه غير الصفري :

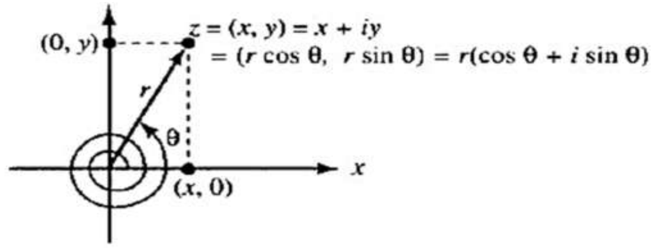
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\because Z = x + iy$$

$$Z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\boldsymbol{Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$



حيث r هو طول الرقم المركب (معامله $|Z|$)

$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

و θ هي الزاوية التي تسمى argument of Z

نستطيع حساب طول المتجه z باستخدام نظرية فيثاغورس :

$$r = \sqrt{X^2 + y^2}$$

نسمي هذا الطول بمقياس العدد المركب z ويرمز له بالرمز:

$$|z| = \sqrt{X^2 + y^2}$$

$$|z| \geq \mathrm{im}(z) \quad , \quad |z| \geq \mathrm{Re}(z)$$

تسمى القيمة الاساسية الازاحة الزاوّية (argument) ويرمز لها بالزمر Arg z وعندما نتعامل مع (argument). من المتعارف عليه ان نستخدم الرمز arg z مع اغفال مضاعفات 2π

ونستخدم العبارة $\mathrm{Arg}\, z + 2\pi k$ حيث k عدد صحيح ثابت للدلالة على زاوية معينة

وبالرجوع الى المتجه الأصلي حيث : z=x+iy نلاحظ ان :

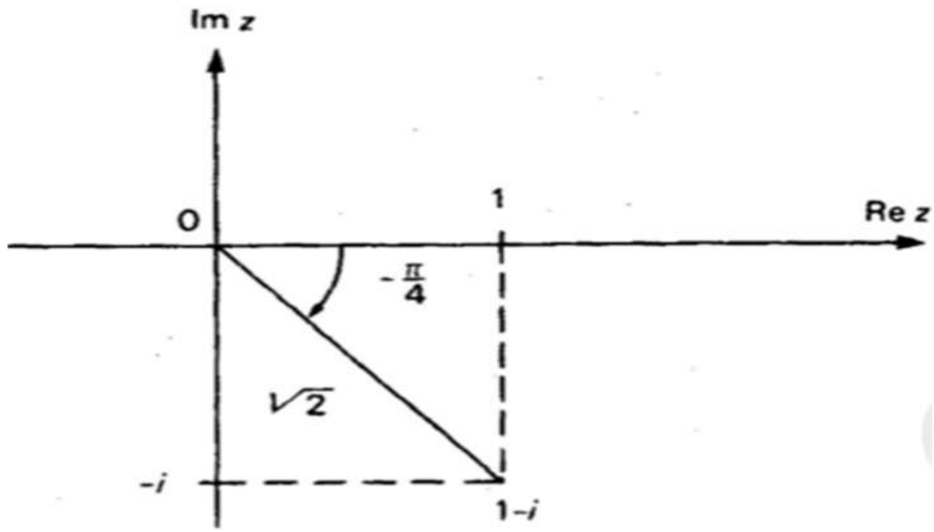
$$x = r\cos\theta = |z|\cos\arg(z)$$

$$y = r\sin\theta = |z|\sin\arg(z)$$

وبالتالي : $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

مثال 1.3. اوجد التمثيل القطبي للعدد 1-i

الحل : سيكون الحل موضح بالشكل التالي..



ويسمى هذا التمثيل القطبي للعدد المركب z كما في الشكل (1-4)

بينما الزاوية الاساسية ه للعدد $1-i$ هي:

$$\text{Arg}\,(1-i) = \frac{-\pi}{4}$$

والزاوية القطبية غير وحيدة التحديد ،اذن زاوية الميل هي :

$$\textbf{Arg}\,(1-i) = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k$$

حيث k أي عدد صحيح ،وبالتالي فإن التمثيل القطبي للعدد المركب هو :

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

ضرب عددين مركبين w،z له تفسير هندسي مشوق فمثلاً عندما نكتب كلارمن العددين بشكله القطبي

لنفترض ان $\theta = \arg z$ و $\emptyset = \arg w$ وعند كتابة z و w بالتمثيل القطبي:

$$Z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$W = |w|(\text{con}\emptyset + i\sin\emptyset)$$

فأن $Z \bullet W = |z|\,|w|\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\emptyset + i\sin\emptyset)$

وباصافة العلاقة المثلثية التالية :.

$$Z\,W = |z||w|[\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset). \qquad (1)$$

وبما ان: $|\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)| = 1$

فإننا نجد من معادلة (1) أن :

$$|ZW|=|z||w| \qquad (2)$$

$$\text{Arg } zw=\arg z+\arg w$$

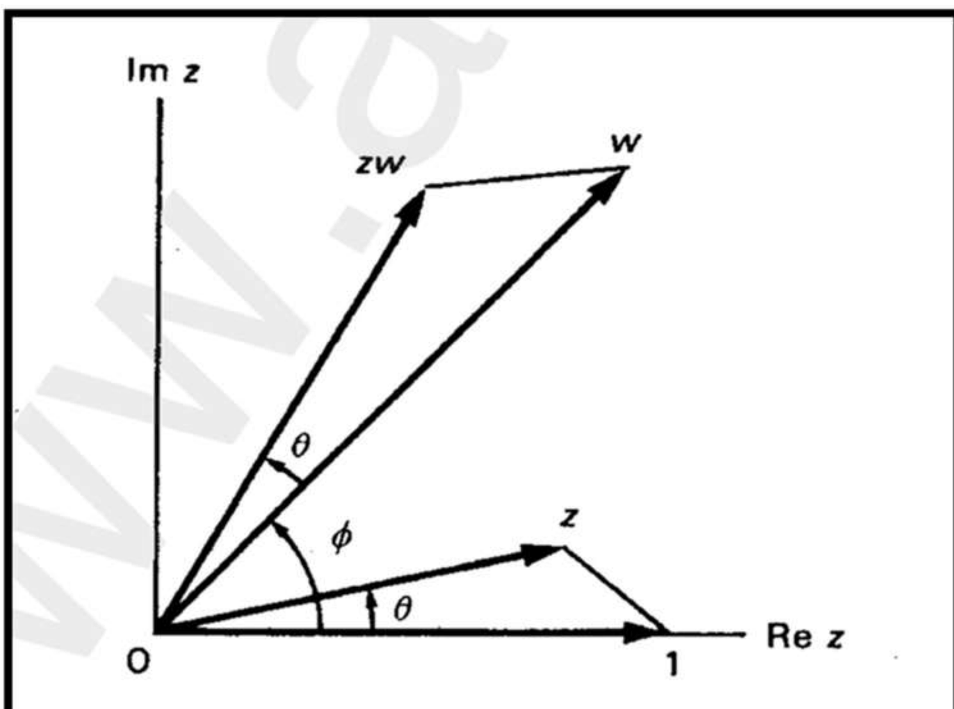
وبالتالي فان طول المتجه zw هو ناتج ضرب كل من طول المتجه z والمتجه w

كما ان الزاويه القطبيه للمتجه zw هو مجموع الزاويتين لكم من متجه z ومتجه w.

وبما ان الزوايه تحب دون اغفال مضاعفات 2π فان المعادلة (3) تقدم لنا تفسيراً فحواه :

اذا اعطينا قيمه معينه لاي من الحدود في (3) فإنه توجد قيمه للحد الثالث تكون فيه المساواة صحيحه في (3)

وعليه فإن المثلثين z 1 0 و zw w 0 متشابهان



الشكل (5-1) يوضح البناء الهندسي للضرب

يوصلنا قسمة عددين مركبين الى المعادله التاليه

حيث $w \neq 0$ $\frac{z}{w} = \frac{z\,\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)|\bar{w}|(\cos\emptyset - i\sin\emptyset)}{|w|^2}$

حيث

$|\bar{w}| = |w|$ وبوساطة صيغ الجمع المثلثية نحصل على:

$$\frac{Z}{W} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \emptyset) + i\sin(\theta - \emptyset)]$$

ومنه :

$$\frac{Z}{W} = \frac{|z|}{|w|} \qquad (4).$$

و $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$ (5)

المعادلة (5) تخضع لنفس التفسير الموجود في معادلة (3)

الضرب:

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)$$

حيث تؤدي $\theta = \arg z$ و $\emptyset = \arg w$ الى نتيجه شيقه عندما تكون $z=w$ فعندما $\theta = \emptyset$

فإن: $Z^2 = |z|^2[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$

بوضع $w = z^2$ نجد ان :

$$Z(z^2) = |z||z|^2[\cos(\theta + 2\theta) + i\sin(\theta + 2\theta)]$$

او

$$Z^3 = |z|^3[\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)]$$

حيث ان :

$$Z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فقد اثبتنا ان:

$$(\mathrm{Cos}\theta + \mathrm{ison}\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

وان:

$$\boldsymbol{(\mathrm{Cos}\theta + \mathrm{iso}\quad)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)}$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة ،نحصل على نظرية ديموافر (De mover's theorem) التي سميت على شرف العالم الرياضي الفرنسي أبراهام ديموافر (١٦٦٧-١٧٥٤م):

$$(\mathrm{Cos}\theta + \mathrm{ison}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

حيث ان n عدد طبيعي موجب،ولنظرية ديموافر العديد من التطبيقات المفيده في عصر اليوم

11.1 نظرية ديموفر (De Moivre ldentity)

انطلاقا من النظريه السابقه فيمكننا الوصول الى متطابقه دي موفر وكالتالي

$$arg\ (z1z2) = arg(z1) + arg(z2) = \theta1 + \theta2 \ldots\ldots.1$$

$$\rightarrow arg(z1, z2, z3) = \theta1 + \theta2 + \theta3$$

اذا افترضنا ان

$$Z1 = Z2 = Z3 = \cdots. = Zn = Z$$

متطابقه دي موفر ،، $\rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta$

$$arg(z1z2) = Arg(z1) + Arg(z2) = \theta 1 + \theta 2 + 2\pi k$$

مثال :.اذا علمت ان z=-1 وz2=i،جد الزاويه لz1z2

$$\text{Arg}(_{Z1Z2})\text{=Arg=Arg}(i\times -1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(z1)\text{=Arg}(-1)=\pi$$

$$\text{Arg}(z2)\text{=Arg}(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(Z1Z2)\text{=Arg}(z1)\text{+Arg}(z2)=\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

لكن عند استخدام k=-1 فأننا نحصل على

$$\text{Arg}(z1z2)=\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$$

باستخدام متطابقة دي موفر يمكننا ان نجد العلاقة بين الجيب والتمام ومضاعفاتها على النحو التالي :

If n=2

$$(\cos\theta + isin\theta)2 \quad =\cos2\theta + isin2\theta$$

$$cos^2\theta - sin^2\theta + 2icos\theta sin\theta = cos2\theta + isin2\theta$$

باستعمال خواص المساواة ،فأننا سنجد ان

$$\text{Sin}2\theta = 2cos\theta sin\theta$$

$$\text{Cos}2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 1 - 2sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

If n=3

$$(\cos\theta + isin\theta)^3 = cos3\theta + isin3\theta$$

$$\text{Cos}3\theta + isin3\theta + isin3\theta$$

$$\text{Cos}3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$$

$$\text{Sin}3\theta = 3sin\theta - 4sin^3\theta$$

If n=4

$(\cos\theta + isin\theta)\quad ^4 = cos4\theta + isi\ \ 4\theta$

$\text{Cos}4\theta = 8cos^2\theta - 8cos^2\theta + 1$

$\text{Sin}4\theta = 4sin\theta cos\theta(1 - 2sin^2\theta)$

يمكننا استخدام التمثيل القطبي لـz لإعادة تعريف بعض العمليات الرياضية السابقة ،\
او

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(cos\theta + isin\theta)} = \frac{cos\theta - isin}{r(cos^2\theta + isi\ \ ^2\theta)} = \frac{1}{r}[cos\theta - isin\ \ ]$

ويمكننا ان نثبت ان : $\text{z1z2=r1r2[cos}(\boldsymbol{\theta 1} + \boldsymbol{\theta 2}) + \boldsymbol{isin}(\boldsymbol{\theta 1} + \boldsymbol{\theta}$

$$\frac{z1}{z2} = \frac{r1}{r2}[\cos(\theta 1 - \theta 2) + isin(\theta 1 - \theta 2)]$$

$\arg(z_1 z_2) = \arg(\arg(z_1) + \arg(z_2)$

$\arg(\frac{z1}{z2}) = \arg(z1) - \arg(z2)$

$\text{z=r}[\cos(\theta + 2k\pi) + isin(\theta + 2k\pi)]$

******************* **

الفصل الثاني

اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبة

المقدمة :.

أُبتدأ ظهور اللوغاريتمات لأول مرة في القرن السابع عشر الميلادي على يد العالم الرياضي الاسكتلندي جون نيبِير. وقد ابتكر نيبِير هذا المفهوم بهدف تسهيل العمليات الحسابية الطويلة التي كانت مطلوبة في علم الفلك والعلوم الرياضية الأخرى«لوغاريتم» هو مصطلح صاغه عالم الرياضيات الاسكتلندي، جون نيبِير (١٦١٧-١٥٥٠). في اللغة اليونانية، تعني كلمة «لوغوس» «نسبة أو معدل أو كلمة»، وكلمة «آريتموس» تعني «عدد». عندما يتم دمج هاتين الكلمتين معًا، فإنهما تعنيان «نسبة – عدد»الدالة المركبة هي دالة تتكون من تركيب اثنين أو أكثر من الدوال الرياضية فيما بينها .وبطريقة عامة، تكتب الدالة المركبة بالصيغة التالية :

$f(g(x))$

حيث f هي الدالة الخارجية و g هي الدالة الداخلية. توضح الدالة المركبة العلاقة بين الدوال، وتستخدم في الرياضيات لتحليل وتفسير الأنظمة المعقدة التي تتكون من تفاعلات الدوال. على سبيل المثال، يمكن استخدام الدالة المركبة لتحليل المسار الذي يسلكه جسم ملقى بحركة خاضعة لقوى الجاذبية. في هذه الحالة. أما اللوغاريتم هو العملية العكسية للدوال الأسية ويُعرَّف اللوغاريتم الطبيعي بأنه عدد بالنسبة لأساس هو العدد النيبيري (e) والذي له تطبيقات كثيرة في الحسابات الهندسية والعلمية وفي الرياضيات البحتة وخاصة في التفاضل والتكامل وقد يعمل اللوغاريتمات على تحويل القسمة والضرب الى طرح وجمع، كما وتعمل على تغيير القيمة الناتجة لعدد ما في حالة تواجد لوغاريتم.

2.1 متسلسلات القوى

تعريف 2.1.1 لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية. نعرِّف $\limsup a_n$ و $\liminf a_n$ على الصورة التالية

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \ , \ \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

مثال 2.1.2 المتتابعة $(-1)^n$ لا تتقارب إلى أي عنصر من المركب إلا أن

$$\limsup(-1)^n = 1 \ , \ \liminf(-1)^n = -1$$

لاحظ أنه لأي متتابعة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ فإن النهايتين $\liminf a_n$ ، $\limsup a_n$ موجودتين على الرغم من أنهما قد تكونان $\pm\infty$. وعندما يكون

$$\limsup a_n = \liminf a_n$$

فإن المتتابعة (a_n) تكون متقاربة.

تعريف 2.1.3 لتكن $a_n,\ n\in\mathbb{N}$ عناصر من المركب. نقول أن المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة إلى a إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$\forall m > N, \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n - a\right| < \varepsilon$$

ونقول أن المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت المتسلسلة $\sum_n |a_n|$ متقاربة.

كما هو شأن المتسلسلات في الحقيقي، فإن لنا النتيجة التالية.

نظرية 2.1.4 إذا كانت المتسلسلة $\sum_n a_n$ متقاربة مطلقاً فهي متقاربة.

برهان ليكن $\varepsilon > 0$ ولنضع $z_n = a_1 + \dots + a_n$. حيث أن $\sum |a_n|$ متقاربة، إذاً يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. الآن، عندما $m > k \geq N$ فإن

$$|z_m - z_k| = |\sum_{n=k+1}^{m} a_n| \leq \sum_{n=k+1}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$$

اكتب المعادلة هنا.

أي أن المتتابعة (z_n) كوشية في $\mathbb{C}$، وبالتالي متقاربة. وهذا هو المطلوب.

بمتسلسلة قوى حول $a\in\mathbb{C}$ نعني متسلسلة على الصورة

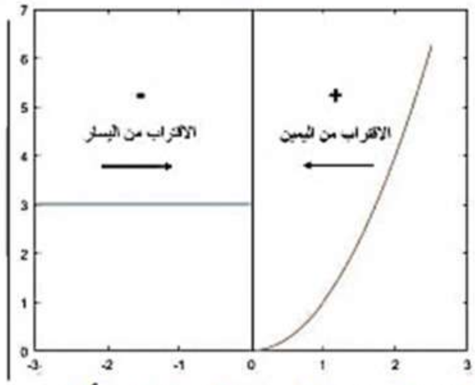
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

مثال 2.3 : جد فيما اذا انت الدالة التالية تملك غاية عند النقطة (0,0).

$$f(Z) = \begin{cases} 3i & Z<0 \\ Z^2 & Z\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 0^+}} f(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0^- \\ y\to 0^-}} f(0) = 3i$$



لا تملك الدالة غاية لامتلاكها أكثر من قيمة عند الاقراب من اليمين واليسار.

2.2 الغايات limits

ليكن f(z)=U(x,y)+iV(x,y) دالة مركبة معرفة في بعض الجوار من $z_0 = x_0 + iy_0$

ثم تكون الدالة f(z) لها غايه (ليكن $w_0 = U_0 + iv_0$ عندما يقترب z من z_0 اي

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = W_0 = U_0 + iv_0$$

اذا وفقط اذا $\lim_{(x,y)\to(x_{0,}y_0)} U(x,y) = U_0 \; and \; \lim_{(x,y)\to(x0,y0))} V(x,y) = v_0$

وهي قيمة عند الاقتراب من اليمين او اليسار الى النقطة z_0

يعرف التابع اللوغاريتمي من حيث الشكل الظاهري كما عرفناه فيR كتابع عكسي للتابع الأسي

،ولكن من حيث المضمون ،هناك اختلافا كبيرا بسبب دورية التابع الأسي في ،لأنه:

$$\forall z \in \mathbb{C}: e^z = e^{z+2k}$$

2.2.1 خصائص الغايات properties of limits

اذا كانت f(z)&g(z) دوال لـ z وكان $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ & $\lim_{z\to z_0} g(z) = M$ فأن

1. $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z) \pm g(z)] = L + M$
2. $\lim\limits_{z\to z_0}[(f(z) \times g(z)] = L \times M$
3. $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$
4. $\lim \quad {}_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{L}{M}$

5.قاعدة هوسبتال

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} if\ the\ first\ limits\ dose\ not\ exist$$

********************** ****

تعريف :. أذا كانت f(z) دالة مركبة معرفة في جوار ما للنقطة z_0(z_0 ليس بالضرورة ان تكون

من مجال الدالة *(f(z)*.فأننا نقول أن نهاية الدالة *f(Z)* عندما *z* تقترب من النقطة z_0 هي w_0

وبالرموز($\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$)) اذا وفقط اذا كان :.

مثال :. اثبت ان $\lim_{z\to z_0} 3z+i=i$

الاثبات :. نفرض أن $0<\varepsilon$ معطى نريد أن نحصل على $0<\delta$

بحيث أن $\varepsilon > |3z+i\_i|$ عندما $|z|<\delta$

من المتباينة

$$|3z+i-i|<\varepsilon \to |z|<\frac{\varepsilon}{3}$$

نجد أن $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

ومن هنا نستنتج أنه $(\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{3}=:|3Z+i\_i|<\varepsilon \text{ when } |Z|<\delta)$

وهذا يعني أن $\lim_{Z\to Z_0} 3Z+i=i$

****

2.3 الاس المركب [4] the complex exponential]

ان الدوال الكسرية في المتغير الحقيقي تعطي دوال تحليله عندما يستبدل المتغير الحقيقي بمتغير مركب z ، لايعني هذا انه مثال منفرد للدوال التحليلية في الحقيقة جميع الدوال الاولية في حساب التفاضل والتكامل مثل الدوال الاسية اللوغارتمية والمثلثية تعطي دوال تحليليه بعد تمديد مناسب للمستوى المركب

2.3 معادلتي كوشي ريمان (Cauchy_Riemann Equations)

وتسمى المعادلتين :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

بالمعادلتين التفاضليتين الجزئيتين لكوشي _ريمان وتكمن أهميه هاتين المعادلتين ، بالاضافة الى شرط قابلية التفاضل لكل من u,v وكما تنص النظرية 14.2.1،في

كونهما صفات مميزة لقابلية الاشتقاق للتابع f $(f=(u\div iv)$

وعلى هذا فانه لايمكن لأي تابعين uوv أن يكونا جزءا تخيليا لتابع f قابلا للاشتقاق ما لم يحققا شروط النظرية 14.2.1 فهما اذن مرتبطان بمعادلتي كوشي _ريمان .

نظرية (الشرط الضروري):

اذا كانت $f(Z)=u(x,y)+iv(x,y)$وكانت $f'(z_0)$ موجودة في

النقطة$(X_{0+i}\ _0)$ $Z_{0=}$ فان المشتقات الجزئي $v_x\ v_y\ u_x\ u_y$

يجب ان تكون موجودة في النقطة(X_0, Y_0) وتحقق معادلات كوشي _ريمان التالية :

$$\begin{Bmatrix} u_{x=v_y} \\ u_{y=-v_x} \end{Bmatrix}$$

في هذه النقطة.كما أن= $f'(z_0)u_x(x_{0,y_0}) + iv(\ _{0,y_0})$

2.3 المشتقة (the derivateive)

ان مفهوم المشتقة يعتبر الاداة الاساسية لدراسة الظواهر المتغيرة في الطبيعية .حيث ان كل شيئ حولنا في حركة دائما رغم ما نلحظه من سكون نسبي .

تعريف:لتكن الدالة f(z) معرفة في جوار ما للنقطه z_0،مشتقة الدالة f(z) في النقطة z_0 ويرمز لها بالرمز f'(Z) تعرف على انها

$$\lim_{z\to z_0} =\frac{f(z)-f(z_0}{z-z_0}$$

باعتبار ان هذه النهاية موجودة.في هذه الحاله تسمى الدالة قابلة للتفاضل في النقطة z_0

ملاحظة:. كما هو الحال في التحليل الحقيقي فهناك الكثير من الصيغ المتكافئه التي تعبر عن مشتقه الدالة في النقطة ،مثل الصيغة:

$$f'(Z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_{0+\Delta z})-f(z_0}{\Delta z}$$

الحل :

$$f(Z) = Z^6 + 2Z^3 - 3$$

$$f(Z) = (2Z+5)^8(1-2Z+Z^2)^{10}, \qquad f'(Z) = 4(14Z+21)(2Z+5)^7(Z-1)^9$$

مثال :.حدد النقاط التي تكون فيها الدالة قابله للأشتقاق

$$f(Z) = Z^2$$

$$f'(Z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow U = x^2 - y^2, \qquad V = 2xy$$

$$U_x = 2x = V_y, \qquad U_y = -2y = -V_x$$

:. الدالة تحقق شرطي كوشي-ريمان، أي ان الدالة قابلة للاشتقاق في جميع النقاط.

$$f'(Z) = U_x + iV_x = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2Z$$

ملاحظة:. نلاحظ اذا كانت المشتقات الجزئية v_x, v_y, U_y, U_x موجودة في النقطة $((x_{0,}y_0))$

وتحقق معادلات كوشي _ريمان $u_{x}=v_y$, $u_{y}=-v_x$ في هذه النقطة فان هذا لايعني

ان تكون $f'(z_0)$ موجودة حيث $z_{0}=x_0+iy_0$ فعلى سبيل المثال الدالة

$$f(Z) = \begin{cases} \frac{(z)^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases},$$

غير قابلة للتفاضل في النقطة $z_{0=0}$ بالرغم من ان شروط كوشي _ريمان لتحقق في هذه النقطة (في هذا المثال نجد v_x, v_y, u_y, u_x (باستخدام التعريف)

مثال:. اذا كانت $f(Z)=e^x(cosy + isiny)$ فان شروط كوشي _ريمان

$u_x=v_y$, $u_y = -v_x$ تتحقق في جميع النقاط لذلك

$$f'(z)=u_x(X,y)+iv_x(X,y)= e^x(cosy + isiny)$$

اي أن $f'(z_0)=f(z)$

(2-4) اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبه[4]

he complex logarithm and complex power factions

بما أن الدالة $R\ e^z \to C$: أحادية ،فانه يمكن تعريف معكوسها من R الى C بنفس الطريقه التي عرفت بها الحالة الحقيقية ونسمي هذه الدالة العكسية اللوغارتمية ونرمز لها بالرمز:

$Log\ z: R \to C$

حسث ان الاس المركب واللوغاريتم الواحد معكوس للآخر ينتج :

$Log\ e^z=z$

$e^{logz}=z$

المهمة الوحيدة المتبقية هي الحصول على صيغه للمقدار log z بدلالة بعض الدوال المعروفه وتقف في طريقنا صعوبات احداها ان اللوغاريتم معرف على سطح ريمان ، وبما ان R يحتوي على عدد لا نهائي من صور C-{0} منضدة لتكون درجاً حلزونياً الا ان لها قيمه واحد هي R وبالتالي يمكننا التمييز بين فروع مختلفة لـRباستخدام التمثيل القطبي:

$$z = |z|e^{i\,argz}$$

لكل z في R

التمثيل القطبي وطبيعة معكوس الدوال اللوغاريتيمية والدوال الأسية يعطي تعريفاً طبيعياً للوغاريتم المركب :

$$\log z = \log\left(|z|e^{i\arg Z}\right) = \left(e^{\log|z| + i\arg z}\right)$$

$$= \log\ |z| + i\ \text{argz}.$$

حيث log |z| *هو اللوغاريتم الطبيعي كما في مبادئ التفاضل والتكامل*

اذا كانت z تقع على فرع من فروع R حيث $|z| < \varepsilon$ فإن مجموعة النقاط على ذلك الفرع التي بعدها عن z اقل من ε يكون الجوار - ε على سطح ريمان،نعمم تعريف الإتصال والاشتقاق والتحليلية للدوال المعرفه على سطح ريمان حيث يعتمد التعريف على سلوك الدالة محلياً فالاتصال عند z يعتمد فقط على الفرق *f(z)-f(w)* لأي نقطه w في أي جوار- ε للنقطه z ،بينما الاشتقاق عند z يعتمد فقط على النسبة:

[f(z)-f(w)]\(z-w)

باستخدام هذه المفاهيم يسهل التحقق من ان $log\ z$ متصلة حيث إن :

$$\log z - \log w = \log|z| + i\arg z - \log|w| - i\arg w$$
$$= [\log|z| - \log|w|] + i[\arg z\ - \arg w]$$

ذلك لان اللوغاريتم الطبيعي والدالة arg دالتان متصلتان

نظرية

ان الدالة $\log z = \log|z| - i\arg z$

تكون تحليله لجميع النقاط z من R

البرهان

بما أن :

$$u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$$

$$v = \arg z = \tan^{-1}(y\backslash x) + \pi n$$

فإن :

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

فمعادلتي كوشي متحققه والمشتقات الجزئية متصلة في R لان التحليلية خاصية محلية هلذا فإن log z تحليلي في R اللوغاريتم المركب له نفس الخواص المعتاده في اللوغاريتم :

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

$$\log\frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$$

لاحظ اننا افترضنا في هاتين المعادلتين ان z_1 و z_2 نقطتان من نقاط سطح ريمان R حيث $z = e^{\log z}$ لاي نقطة z من R وبتطبيق قاعدة السلسلة للتفاضل نحصل على:

$$e^{\log z}\,(\log z) = 1$$

أو :

$$(\log z) = \frac{1}{z} \qquad , z \in R$$

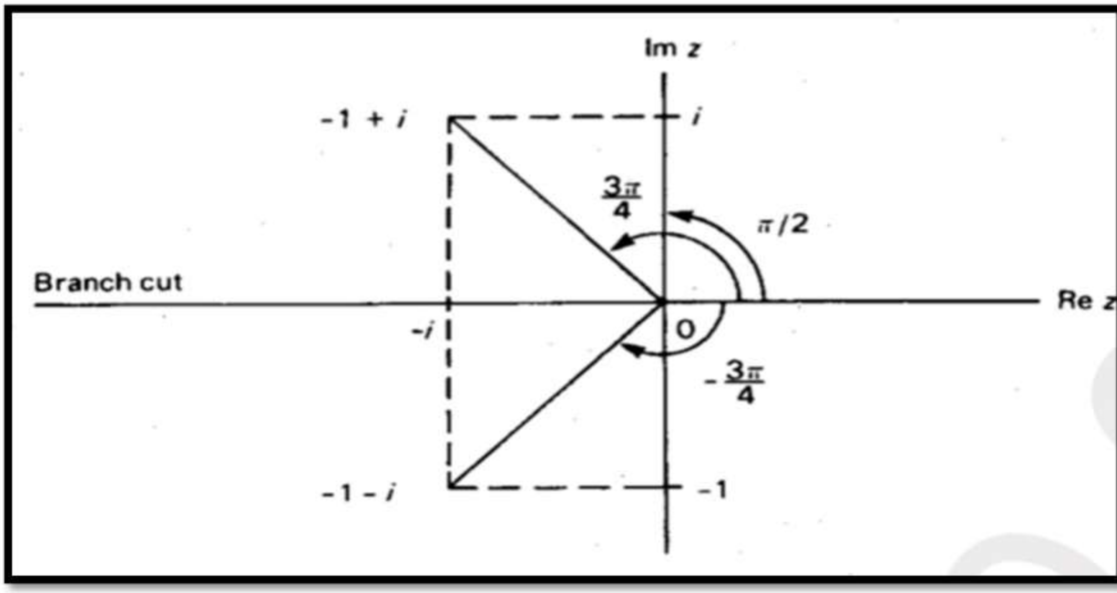
وعليه تكون صيغ التفاضل العادية صحيحة على R

كما هو موضح في تعريف القيمة الرئيسية $Arg\ z$ للزاوية $arg\ z$ نستطيع ان نعمم هذا المفهوم إلى اللوغاريتم باعتبار ان اللوغاريتم دالة عكسيه للداله الاسيه نسمي فرع R المأخوذ على طول الجزء

السالب من المحور الحقيقي -الذي هو صوره من الشريط غير المنتهي-$\pi < y \leq \pi$ بالفرع الرئيسي للوغاريتم.

ونرمز للمقدار $log\ z$ عندما تكون مأخوذه على الفرع الرئيسي بالرمز :

$$Log\ z = \log|z| + i \arg z$$



الشكل (٢-١) يوضح القيمة الرئيسية

لاحظ ان القيمة الرئيسية معرفه فقط على الفرع R حيث Arg z موجوده يجب اخذ الحيطة عند العمل مع الفرع الرئيسي الى اللوغاريتم Log z

فالخواص العادية للوغاريتم قد لايمكن تطبيقها فعلى سبيل المثال:

$$\log i = \log|i| + i \arg i = i\pi/2$$

$$Log\ (-1+i) = \log|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}|-1+i|$$

$$= \log\sqrt{2} + i3\pi\backslash 4$$

ولتكن :

$$Log\ [i(-1+i)] = \log(-1-i)$$

$$= \log|-1-i| + i\arg(-1-i)$$

$$Log\sqrt{2} - \frac{i(3\pi)}{4}$$

وعليه:

$$Log\ [i(-1+i)] \neq \log \mathrm{i} + \log(-1+i)$$

لذلك فإن التعبيرين يختلفان بمضاعفات $2\ i\pi$

المصادر

١-مرجع التحليل المركب في الرياضيات #موقع الفيزياء
٢-د. احمد خالد العبد العالي ، التحليل المركب ،جامعة الملك فيصل كلية العلوم قسم الرياضيات والاحصاء

٣-وليام ر. دريك ،كتاب التحليل المركب وتطبيقاته ،قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة الملك سعود ص. ب ٦٨٩٥٣-الرياض ١١٥٣٧ ،ترجمة سعدون إبراهيم عثمان ود. أبو بكر الصديق بيومي

٤-الأستاذ محمود مسعود ،التحليل العقدي ،المدرسة العليا للأساتذة

٥-د. حميد مجيد ،تحليل الدوال المركبة ،جامعة بغداد كلية التربيه للعلوم الصرفه قسم الفيزياء