وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعــة بابل

كلية التربيـة للعلوم الصرفـة

قسم الرياضيات

دراسة في بعض أنواع هندسة الرياضيات وتاريخها في الحضارات القديمة

بحث مقدم إلى قسم الرياضيات –كلية التربية للعلوم الصرفة-جامعة بابـل
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

إعداد الطالب :

بإشـــراف :

محمد أحمد راضــي **أ.د**

: زاهـر عبـد الهــادي

٢٠٢٤ م

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

وَأَن لَّيۡسَ لِلۡإِنسَٰنِ إِلَّا مَا سَعَىٰ ﴿٣٩﴾ وَأَنَّ سَعۡيَهُۥ سَوۡفَ يُرَىٰ ﴿٤٠﴾ ثُمَّ يُجۡزَىٰهُ ٱلۡجَزَآءَ ٱلۡأَوۡفَىٰ ﴿٤١﴾ (سورة النجم)

صدق الله العلي العظيم

المحتويـات

الخلاصـــة :

قد تم في هذا البحث دراسة تاريخ الهندسة في الحضارات القديمة منها: الحضارة المصرية،الحضارة البابلية،الحضارة الاغريقية،الحضارة الفيدية الهندية؛كما تم التطرق الى دراسة بعض أنواع الهندسة في الرياضيات منها الهندسة : الأقليدية،اللاإقليدية،هندسة المجال الكروي،الهندسة الزائدية،هندسة التباين.

وقد تضمن هذا البحث التعامل مع البيانات غير الإقليدية وتحليل خصائصها التي تعتبر من أهم التحديات التي تواجه الباحثين في الآونة الأخيرة. تبرز ثلاث مشاكل رئيسية:

المشكلة الأولى: تكمن في صعوبة تحديد الفارق الجوهري بين الهندسة الإقليدية وغير الإقليدية مع تقديم أمثلة توضيحية.

المشكلة الثانية: تتعلق بكيفية التعامل مع البيانات غير الإقليدية التي تتضمن مناطق صحيحة وأخرى خاطئة بالإضافة إلى مناطق يصعب الجزم فيها.

المشكلة الثالثة: تتركز على استكشاف الأنماط المخفية داخل مجموعات البيانات غير الإقليدية.

(١-١) المقدمـــــة :

الهندســة الرياضــية geometry، كلمــة مشــتقة مــن الكلمــة الإغريقيــة القديمــة (بالإغريقيـــــة: γεωμετρία) وتنقســـــم إلـــــى geo وتعنـــــي (الأرض)، و metronوتعنــي (قياسـات). وقـد ظهـرت بوصـفها مجـال المعرفـة المـرتبط بالعلاقـات المكانيــة. وكانـت الهندســة إحـدى مجـالي الرياضـيات الأوليــة، والآخـر هـو المتعلـق بدراسة الأرقام (العمليات الحسابية).

ركـزت الهندســة الكلاسـيكية علــى البوصــلة والمنشـآت المسـتقيمة. طـور الهندســة العـالم (إقليـدس)، الـذي قـدم الرياضـيات الدقيقـة والمـنهج البـديهي المسـتعمل إلـى الآن. ويُعـد كتابــه (العناصــر) الأكثــر اســتعمالًا وتــأثيرًا علــى الإطــلاق، وكــان معروفًــا لكــل المتعلمين في الغرب حتى خمسينيات القرن الماضي.

فـي الوقـت الحـالي، عُمـم مبـدأ الهندســة علـى مسـتوى عـال مـن التجريـد والتعقيـد، وارتـبط بمبـادئ التفاضـل والتكامـل والجبـر. لـذلك فـإن أغلـب الفـروع الحديثـة لهـذا المجال يمكن بالكاد تمييزها بوصفها أساسيات مشتقة من الهندسة المجردة.

بـدايات علـم الهندسـة المسـجلة يمكـن تتبعهـا إلـى الأوائـل الـذين اكتشـفوا المثلثـات المنفرجـة فـي حضـارة وادي السـند القديمــة، والحضـارة البابليـة القديمـة نحـو سـنة ٣٠٠٠ قبـل المـيلاد. كانـت الهندســة البدائيــة مجموعــة اكتشــافات تجريبيــة تتعلــق بـالأطوال والمسـاحات والأحجـام، وتطـورت مـن أجـل بعـض الاحتياجـات العمليـة مثـل المسـح والبنـاء وعلـم الفلـك والعديـد مـن الحـرف الأخـرى. ومـن بينهـا بعـض المبـادئ المتطـورة المدهشــة، وقـد تبـدو الرياضـيات الحديثـة صـعبة إذ دُرسـت دون الاسـتعانة بمبــادئ التفاضــل والتكامــل والجبــر. مــثلًا كــان المصــريون والبــابليون علــى درايــة بــبعض مبــادئ الفيثاغورســية منــذ نحــو ١٥٠٠ ســنة، حتــى قبــل اكتشــاف قــانون فيثــاغورس، وتتضــمن مبــادئ سولباســوتراس نحــو ٨٠٠ ســنة قبــل المــيلاد أول تصريح للنظرية، ولدى المصريين تركيبة صحيحة لحجم الهرم الرباعي.

الهندســة عنـد المصـريين: عـرف المصـريون القـدامى إمكانيـة حسـاب مسـاحة الـدائرة تقريبيًا كما يلي: مساحة الدائرة ≈ [(القطر) × ٨/٩] ٢

استُخدمت هذه الطرق لحل المسألة ٣٠ في بردية أحمس لحساب مساحة الدائرة، وفقًا للقاعدة التي تنص على أن مساحة المربع تساوي من مساحة قطر الدائرة. وعلى هذا يفترض أن π تساوي القيمة، أي ٣.١٦٠٤٩٣ بنسبة خطأ تقارب ٠.٦٣ بالمائة. هذه القيمة أقل دقة من القيمة التي توصل إليها البابليون (٣.١٢٥) مع نسبة خطأ ٠.٥٣، وظلت كذلك حتى وضع أرخميدس النسبة التقريبية ٣.١٤١٦٣، مع نسبة خطأ ٠.٠٠٠١.

عرف العالم أحمس أن π تساوي ٢٢\٧ تقريبًا، واستخدمها لتقسيم وحدة (hekat)، ومع ذلك استمر استخدام القيمة التقليدية لباي (81\256) لحساب حجم الأسطوانة.

تضمنت المسألة ٤٨ استخدام مربع ذي ٩ جوانب. يُقطع هذا المربع إلى شبكة . يُستعمل قطر مربعات الزوايا لتكوين شكل مثمن غير منتظم بمساحة ٦٣ وحدة. ما يعطي قيمة لباي تساوي ٣.١١١

تشير المسألتان إلى أن قيمة باي تتراوح بين ٣.١١ و٣.١٦.

تتضمن المسألة ١٤ في بردية موسكو الرياضية الأمثلة القديمة لإيجاد حجم المخروط الناقص الهرمي، وتصف المعادلة الصحيحة:

حيث إن a و b هما طول قاعدة وسطح الهرم الناقص، و hهو الارتفاع.

الهندسة البابلية: ربما عرف البابليون القواعد الأساسية لحساب المساحات والأحجام. إذ قاسوا محيط الدائرة بمضاعفة القطر ٣ مرات، ومساحة المربع بنسبة ١:١٢ من المحيط، هذه الطريقة صحيحة بفرض أن $\pi = 3$. ويُحتسب حجم الأسطوانة باستخدام القاعدة والارتفاع، ومع ذلك فقد احتُسب خطأً حجم المخروط الناقص أو الهرم المربع ناتجًا للارتفاع ونصف القاعدة. كانت مبرهنة فيثاغورس معروفة أيضًا للبابليين. واكتُشف حديثًا لوح طيني استخدم قيمة $\pi = 3$ و٨/١. عرف البابليون أيضًا وحدة قياس سُميت الميل البابلي، الذي كان مقياسًا للمسافة يساوي نحو ٧ أميال حديثة. تحول هذا القياس للمسافات بعد ذلك إلى ميل زمني يستخدم لقياس انتقال الشمس، ومن ثم يمثل الوقت. وأظهرت اكتشافات حديثة أن البابليين القدماء ربما اكتشفوا الهندسة الفلكية قبل ١٤٠٠ سنة من اكتشاف الأوروبيين لها.

هنسة الفيدا الهندية: استخدم الهنود في الفترة الفيدية الهندسة التقليدية، خاصةً لبناء مذابح متقنة. تضمنت نصوص الألفية الأولى قبل الميلاد كتاب شاتاباثا براهمانا وكتاب سولباسوتراس. الذي يتضمن أول تعبير لفظي لمفهوم نظرية فيثاغورس في العالم، رغم أنها كانت معروفة للبابليين. تتضمن هذه الكتب تطبيقات لقانون فيثاغورس، وهي حالات مخصصة لمعادلات ديوفانتين. وتتضمن أيضًا معلومات عن تربيع الدائرة وتدوير المربع.

يتضمن اللوح المكتوب باللغة المسمارية سنة ١٨٥٠ قبل الميلاد ١٥ ثلاثية لقانون فيثاغورس مع عدد من المدخلات، تتضمن (١٣٥٠٠، ١٢٧٠٩، ١٨٥٤١) وهي ثلاثية بدائية للتسلسل، تتضمن فهمًا متطورًا للمسألة، ولما كانت هذه الألواح الطينية تسبق سولباسوتراس بقرون، مع أخذ المظهر السياقي للثلاثيات في الاعتبار، فمن المعقول توقع وجود فهم مماثل في الهند.

ولأن الهدف الرئيسي لسولباسوتراس كان وصف إنشاء المذابح والمبادئ الهندسية المتضمنة فيها، فإن موضوع الثلاثيات الفيثاغورسية، وإن فُهم جيدًا، ربما لم يظهر بعد في سولباسوتراس. يمكن مقارنة سولباسوتراس بالرياضيات الموجودة في كتاب تمهيدي عن الهندسة المعمارية أو مجال تطبيقي آخر مشابه، ولن تتوافق مباشرةً مع المعرفة العامة حول الموضوع في ذلك الوقت. لكن منذ ذلك الوقت، لم يُعثر على مصادر معاصرة أخرى يمكنها معالجة هذه القضية بدقة.

الهندسة عند الإغريقية: بالنسبة إلى علماء الرياضيات اليونانيين القدماء، كانت الهندسة هي حجر الأساس لجميع العلوم، إذ وصلت إلى اكتمال المنهجية الذي لم يحققه أي فرع آخر من معارفهم. وقد وسعوا نطاق الهندسة إلى العديد من الأنواع الجديدة من الأشكال والمنحنيات والأسطح والمواد الصلبة، وغيروا منهجيتها من التجربة والخطأ إلى الاستنتاج المنطقي، وقد أدركوا أن الهندسة تدرس الأشكال الأساسية أو التجريد، التي تعد الأشياء المادية فقط تقريبية، وطوروا فكرة الطريقة البديهية، التي لا تزال مستخدمة حتى اليوم. بناءً على مجموعة من خمس فرضيات أساسية وضعها إقليدس عالم الرياضيات اليوناني القديم، تُعنى الهندسة الإقليدية بدراسة خصائص النقاط والخطوط والمستويات في فضاء ذي بعدين. بالمقابل، تتفحص الهندسة غير الإقليدية الأشكال الهندسية التي لا تلتزم بفرضيات إقليدس، ومن أمثلتها الهندسة الزائدية والهندسة الكروية. حيث تختلف قواعد التعامل مع الخطوط المتوازية والزوايا. إن فهم التباين الجوهري بين الهندسة الإقليدية وغير الإقليدية يمكّننا من اكتساب رؤى عميقة حول طبيعة الفضاء والشكل ويساعد على تجاوز الإطارات الرياضية التقليدية.

ايضاً في هذا البحث سوف يتم التطرق الى المجالات الهندسية الإقليدية و الغيراقليدية كما قد قُدمت أمثلة عن بيانات تتبع قواعد الهندسة غير الإقليدية مع توضيح طرق تصورها،كما يقترح منهجية لتحليل وتحليل خصائص مجموعات البيانات الهندسية غير الإقليدية وايضاً يستعرض بعض الأمثلة الواقعية لتطبيق الهندسة غير الإقليدية في معالجة المعرفة .كما سوف نتناول بعض انواع الهندسة منها هندسة المجال الكروي او ما تعرف بالهندسة الاهليجية والهندسة الزائدية وايضاً هندسة التباين وسوف نشاهد أوجة الشبه والاختلاف بين هذه الأنوع والهندسة قبل اقليدس وبعدة،وماهي العلة من ظهور الهندسة الإقليدية.

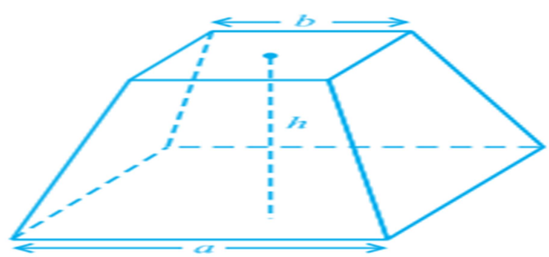
يستهدف هذه البحث الى معالجة التحديات المطروحة في مجال الهندسة اللاإقليدية وتحليل خصائصها .بهدف تحقيق ذلك، يقترح في بعض أقسامهٌ منهجية تحليلية يتم تطبيقها بشكل توضيحي في الاقسام التي تليها من ضمن البحث .من الممكن ان يبنُى عليه في المستقبل إلى إدخال تقنيات جديدة للكشف عن الأنماط داخل مجموعات البيانات اللاإقليدية واستكشاف مفهوم "(الهندسة النيوترولوجية)" (NeutroGeometry) من خلال أمثلة توضيحية تبرز الاختلافات الجوهرية بينها وبين الهندسة الإقليدية.

(الفصل الأول)

(١-٢)القسم الأول : تاريخ الهندســـة في الحضارات القديمـــة:

كلمـــة "هندســـة" مشـــتقة مـــن كلمتـــين يونـــانيتين: "جيـــو" وتعنـــي "الأرض" و "متـــرين" وتعنـــي "القيـــاس". يبـــدو أن الهندســـة نشـــأت مـــن الحاجـــة إلـــى مســـح الأراضـــي. تمـــت دراســـة هـــذا الفـــرع مـــن الرياضـــيات بأشـــكال مختلفـــة فـــي كـــل حضـــارة قديمـــة ، ســـواء فـــي مصـــر أو بابـــل أو الصـــين أو الهنـــد أو اليونـــان أو الإنكـــا ، إلـــخ. واجـــه النـــاس فـــي هـــذه الحضـــارات العديـــد مـــن المشـــاكل العمليـــة التـــي تطلبـــت تطـــوير الهندســـة بطـــرق مختلفـــة. علـــى ســـبيل المثـــال ، كلمـــا فـــاض نهـــر النيـــل ، كـــان يمحـــو الحـــدود بـــين الحقـــول المجـــاورة لمـــلاك أراضٍ مختلفـــين. بعـــد حـــدوث هـــذا الفيضـــان ، كـــان يجـــب إعـــادة رســـم هـــذه الحـــدود. لهـــذا الغـــرض ، طـــور المصـــريون عـــددًا مـــن الأســـاليب والقواعـــد الهندســـية لحســـاب المســـاحات البســـيطة وكـــذلك للقيـــام بالإنشـــاءات البســـيطة. كمـــا تـــم اســـتخدام معرفـــة الهندســـة مـــن قـــبلهم لحســـاب حجـــم صـــوامع الغـــلال ، وبنـــاء القنـــوات والأهرامـــات. كمـــا عرفـــوا الصـــيغة الصـــحيحة لإيجـــاد حجـــم الهـــرم المقطوع (انظر الشكل I)

(الشكل I)



كمـــا اســـتخدمة حضـــارة وادي الســـند للهندســـة. أعمـــال التنقيـــب فـــي هارابـــا وموهينجـــو دارو وغيرهـــا فـــي شـــبه القـــارة الهنديـــة تُظهـــر أن حضـــارة وادي الســـند (حـــوالي ٣٠٠٠ قبـــل المـــيلاد) اســـتخدمت الهندســـة علـــى نطـــاق واســـع. لقـــد كـــان مجتمعًـــا منظمـــا للغايـــة. كانـــت المـــدن متطـــورة للغايـــة ومخططـــة بشـــكل جيـــد. علـــى ســـبيل المثـــال ، كانـــت الطـــرق متوازيـــة مـــع بعضـــها الـــبعض وكـــان هنـــاك نظـــام تصـــريف تحـــت الأرض. تحتـــوي المنـــازل علـــى العديـــد مـــن الغـــرف بـــأنواع مختلفـــة. يوضـــح هـــذا أن ســـكان المدينـــة كـــانوا مهـــرة فـــي القيـــاس والحســـاب العملـــي. كانـــت الطـــوب المســـتخدمة فـــي البنـــاء مشـــوية فـــي الأفـــران ، وقد وجد أن نسبة الطول: العرض: السمك للطوب هي ٤: ٢: ١.

فـــي الهنـــد القديمـــة، كانـــت النصـــوص المعروفـــة بــــ "سولباســـوترا" (تعـــود إلـــى الفتـــرة بـــين ٨٠٠ قبـــل المـــيلاد إلـــى ٥٠٠ قبـــل المـــيلاد) بمثابـــة أدلـــة إرشـــادية للإنشـــاءات

الهندسية. نشأت الهندسة في العصر الفيدي مع بناء المذابح (أو فيدي) ومواقد النار لإقامة الشعائر الفيدية. كان موقع النيران المقدسة يجب أن يكون وفقًا للتعليمات المحددة بوضوح حول أشكالها ومساحاتها، حتى تكون أدوات فعالة. تم استخدام مذابح مربعة ودائرية للطقوس المنزلية، بينما كانت المذابح التي تتكون أشكالها من مجموعات من المستطيلات والمثلثات والموازيات مطلوبة للعبادة العامة. يتكون الـ "سري يانترا" الموجود في أثارف(vedis) من تسعة مثلثات متساوية الساقين متشابكة. يتم ترتيب هذه المثلثات بطريقة تنتج ٤٣ مثلثًا فرعيًا. على الرغم من استخدام طرق هندسية دقيقة لبناء المذابح، إلا أن المبادئ التي تكمن وراءها لم يتم مناقشتها.

هذه الأمثلة تؤكد على أن الهندسة كانت تتطور وتطبق في جميع أنحاء العالم. لكن هذا كان يحدث بطريقة غير منهجية. اللافت للنظر في هذه التطورات الهندسية في العالم القديم هو أنها كانت تنتقل من جيل إلى آخر ، إما عن طريق الشفه(الكلام) أو من خلال رسائل سعف النخيل ، أو بطرق أخرى. كما نجد أنه في بعض الحضارات مثل بابل ، ظلت الهندسة علمًا عمليًا للغاية ، كما كانت الحال في الهند وروما. تألفت الهندسة التي طورها المصريون بشكل أساسي من بيانات النتائج. لم تكن هناك قواعد عامة للإجراء. في الواقع ، استخدم البابليون والمصريون الهندسة في الغالب لأغراض عملية ولم يفعلوا شيئًا يذكر لتطويرها كعلم منهجي. ولكن في الحضارات مثل اليونان ، كان التركيز على المنطق الكامن وراء نجاح اعمال هندسية معينة. كان الإغريق مهتمين بإثبات صحة البيانات التي اكتشفوها باستخدام الاستنتاج المنطقي .

يُنسب إلى عالم الرياضيات اليوناني طاليس تقديم أول برهان معروف. كان هذا الإثبات لبيان أن القطر يقسم الدائرة إلى نصفين (أي يقطعها إلى قسمين متساويين). كان أحد أشهر تلاميذ طاليس هو فيثاغورس (٥٧٢ قبل الميلاد). اكتشف فيثاغورس ومجموعته العديد من الخصائص الهندسية وطوروا نظرية الهندسة إلى حد كبير. استمرت هذه العملية حتى عام ٣٠٠ قبل الميلاد. في ذلك الوقت ، قام إقليدس ، وهو معلم للرياضيات في الإسكندرية بمصر ، بجمع كل الأعمال المعروفة ورتبها في أطروحته الشهيرة ، "عناصر."

"العناصر" يقسّم إلى ثلاثة عشر فصلًا، يُسمى كل فصل منها "كتابًا ."أثرت هذه الكتب على فهم العالم كله للهندسة لأجيال قادمة.

في الآونة الأخيرة، برز التعامل مع البيانات غير الإقليدية وتحليل خصائصها على رأس قائمة التحديات البحثية الرئيسية. تتميز البيانات غير الإقليدية بأنها لا تتقيّد بالبنى والمبادئ

الأساسية للهندسة الإقليدية التقليدية. وتنشأ ثلاثة تحديات رئيسة عند العمل مع هذه البيانات:

- **التمييز بين البيانات الإقليدية وغير الإقليدية :يمثل تحديد الفروق الجوهرية بين نوعي البيانات، مع تقديم أمثلة توضيحية، العقبة الأولى في هذا المجال.**
- **معالجة البيانات غير الإقليدية في المناطق ذات القيم المختلفة :تتطلب البيانات غير الإقليدية نهجًا خاصًا للتعامل مع المناطق التي تمثل القيم الصحيحة والقيم الخاطئة والقيم غير المؤكدة.**
- **استكشاف الأنماط في البيانات غير الإقليدية :يعتبر استخراج الأنماط والروابط المخفية من مجموعات البيانات غير الإقليدية مهمة صعبة تتطلب تقنيات متقدمة.**

كما ان هناك اهداف ايضا سوف نتناولها في هذا البحث وهي: معالجة هذه التحديات من خلال تقديم أمثلة واقعية في مجالات معالجة البيانات وتصور البيانات وتمثيل المعرفة والحوسبة الكمومية.

(١-٣)القسم الثاني:الهندسة الاقليدية:

تُعتبر الهندسة الإقليدية جوهر الهندسة بشكل عام. إنها تشكل ما يمكن أن نسميه الحدس الهندسي، وتقدم وصفًا دقيقًا جدًا للمحيط المكاني من حولنا.

في كتاب "الهندسة الابتدائية من وجهة نظر متقدمة" للمؤلف إدوين إي مويز، يتم تعريف الهندسة الإقليدية على أنها دراسة الهندسة بناءً على مجموعة من المسلمات صاغها إقليدس، بما في ذلك مسلمة التوازي.

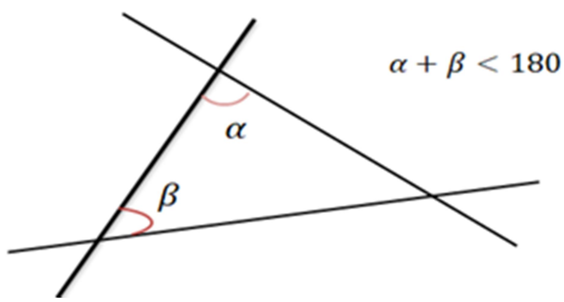
يقول عالم الرياضيات" الصيني الأمريكي الجنسية البارز "شينغ شين تشيرن" (٢٦ أكتوبر ١٩١١ - ٣ ديسمبر ٢٠٠٤ عن كتاب "العناصر" لإقليدس، الذي كتبه حوالي عام ٣٠٠ قبل الميلاد، هو أحد الإنجازات العظيمة للعقل البشري. لقد حول الهندسة إلى علم استنتاجي وجعل الظواهر الهندسية استنتاجات منطقية لنظم من المسلمات والبديهيات .

- **علماء الرياضيات اليونانيون في زمن إقليدس كانوا يفكرون في الهندسة كنموذج مجرد للعالم الذي يعيشون فيه. <u>تتضمن الهندسة الإقليدية نوعين:</u> الهندسة المستوية، وهي ثنائية الأبعاد، والهندسة المجسمة، وهي ثلاثية الأبعاد. المصطلحات الأساسية في الهندسة هي النقاط والخطوط والمستويات.**
- **استُنبطت مفاهيم النقطة والخط والمستوى (أو السطح "surfaces") وما إلى ذلك مما رأوه حولهم؛ ومن خلال دراسة الفضاء والأشكال الصلبة في الفضاء المحيط بهم، تم تطوير مفهوم هندسي مجرد للجسم الصلب؛ للجسم شكل وحجم**

وموضع ويمكن نقله من مكان إلى آخر، تسمى حدوده الأسطح. تفصل جزءًا من الفضاء عن آخر، ويقال إنها ليس لها سمك. حدود الأسطح هي منحنيات(curves) أو خطوط مستقيمة(lines)؛ هذه الخطوط تنتهي بنقاط((points

(١-٣-١)المسلمات في الهندسة الإقليدية:

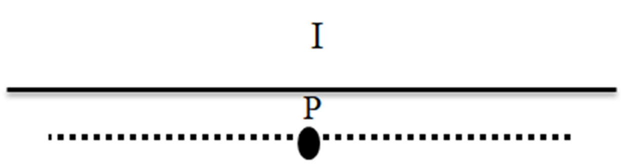
- ❖ E1يمكن رسم خط مستقيم واحد فقط بين أي نقطتين.
- ❖ E2يمكن تمديد الخط المستقيم إلى ما لا نهاية في كلا الاتجاهين.
- ❖ E3يمكن رسم دائرة بأي مركز ونصف قطر موجب.
- ❖ E4كل الزوايا القائمة متساوية.
- ❖ E5إذا قطع خط مستقيم خطين آخرين وجعل الزاويتين الداخليتين المتقابلتين على نفس الجانب أقل من زاويتين قائمتين، فإن هذين الخطين يتقاطعان عند امتدادها إلى ما لا نهاية (انظر الشكل II).



(الشكل II)

المسلمات الثلاثة الأولى واضحة بشكل حدسي. أما المسلمة الرابعة تبدو غريبة نوعًا ما. تعني هذه المسلمة ببساطة أنه بالنظر إلى زوجين من المستقيمات بحيث تكون خطوط كل زوج متعامدة (تشكل زاوية قائمة ٩٠ درجة) ، يمكن تدوير وترجمة أحد الزوجين ليتطابق مع الزوج الآخر .

(١-٣-٢)القسم الثالث:مسلمة التوازي(البديهية الخامسة): بالنسبة لأي خط مستقيم I ونقطة P لا تقع على I يوجد خط مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة P ويكون موازيًا للخط I (الشكل III) .



(الشكل III)

باستخدام هذه البديهيات، يمكن لأقليدس تعريف أجسام أكثر تعقيدًا، مثل المثلثات. وأخيرًا، جاءت النظريات، التي هي نتائج منطقية للبديهيات. بعض النظريات استغرقت وقتًا طويلاً للإثبات، بينما كانت أخرى واضحة بشكل حدسي، مثل البيان الذي يمكن أن تلتقي فيه خطين مستقيمين متميزين في نقطة واحدة على الأكثر. يمكن تقديم دليل على ذلك بالافتراض أولاً أن البيان غير صحيح ومن ثم إظهار أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض. لذلك دعونا نفترض أن الخطين يلتقيان في نقطتين - نسميهما P و Q. ثم سيكون هناك على الأقل خطين عبر P و Q، وهو ما يتعارض مع البديهية الأولى E1. لذلك يجب أن يكون افتراضنا خاطئًا. هذا مثال على الإثبات بالتناقض - أحد أفضل الأسلحة التي يمتلكها الرياضي. نتيجة أخرى للبديهيات هي أنه إذا التقى خط l بخطين متوازيين m و n، فإن الزوايا المتقابلة متساوية (الشكل ٩). إذا كانت $\gamma + \alpha$ أكبر من ١٨٠ درجة، فإن الخطين m و n سيتقاطعان على يسار l؛ وهذا نتيجة لـ E5. بالمثل، إذا كانت $\gamma + \alpha$ أصغر من ١٨٠ درجة، فإن m و n سيتقاطعان على يمين l. لذلك، درجة$180 = \gamma - \alpha$.
علاوة على ذلك،درجة $\beta + \gamma = 180$ ، وبالتالي: $\alpha = \beta$.

(١-٣-٣)<u>الانشاءات الهندسية :</u> في عملية بناء الإثباتات الرياضية، نحتاج إلى إنشاء أشكال هندسية محددة، يعتبر الإنشاء بمثابة تحويل للكيان المجرد إلى شكل ملموس.

(١-٣-٤)<u>أدوات الإنشاءات الإقليدية:</u> خلال العصر اليوناني القديم، كانت الإنشاءات الهندسية للأشكال والأطوال محدودة باستخدام أداتين أساسيتين فقط:

- المسطرة :يجب أن تكون مسطرة بدون أي علامات تقسيم أو قياس.
- الفرجار :كان لدى الإغريق عدة انواع من الفرجارات:

١. الفرجار العادي: يتكون من ساقين متصلتين بمفصل، أحد الساقين ثابت بينما الآخر قابل للتمديد. يُستخدم لرسم الدوائر والأقواس، وقياس الأطوال، ونقل المقاييس.

٢. الفرجار النسبي: يُشبه الفرجار العادي، لكنه مزود بمقياس على أحد الساقي يُستخدم لنسخ النسب بين الأطوال بدقة.

٣. المِقْوَاس (الفرجار القابل للطي): يفقد هذا النوع من الفرجارات قياس نصف القطر بمجرد تحريكه. وهذا يعني أنه لا يمكنك إنشاء دائرة ثم نقل الفرجار وإنشاء دائرة أخرى بنفس نصف القطر.

لا يمكن استخدام هذا الفرجار حتى لوضع علامات للمسافات عن طريق ضبط المسافة ثم تحريكه على طول المستقيمة.

٤. الفرجار المثلثي: يتكون من ثلاثة أذرع متصلة بنقاط مفصلية، يُستخدم لرسم المثلثات المتشابهة، ونقل الزوايا بدقة.

(١-٣-٥)<u>تسمية الإنشاءات الإقليدية</u>: بسبب الدور المحوري الذي لعبته الإنشاءات الهندسية اليونانية في كتاب "عناصر" لإقليدس، تُعرف هذه الإنشاءات أحيانًا باسم الإنشاءات الإقليدية.

(١-٣-٦)<u>المشاكل الهندسية المستعصية</u>: كانت هذه الإنشاءات في صميم ثلاثة تحديات رياضية كلاسيكية ظلت عالقة لقرون:

١. تربيع الدائرة :تقسيم مساحة دائرة إلى مربع بنفس المساحة.
٢. تضاعف المكعب :إنشاء مكعب آخر يكون حجمه ضعف حجم مكعب معطى.
٣. تقسيم زاوية إلى ثلاثة أجزاء متساوية :تقسيم أي زاوية عشوائية إلى ثلاث زوايا متساوية.

لم يتمكن الإغريق من حل هذه المشاكل. ولم يثبت استحالة حل هذه المشاكل فعليًا وفقًا للقيود المفروضة إلا في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر.

(١-٣-٧)<u>القيود المفروضة على الانشاءات الاقليدية</u>: كانت أدوات الإنشاءات الإقليدية محدودة للغاية، مما فرض قيودًا على أنواع الإنشاءات الممكنة. تتوافق هذه القيود مع المسلمات الثلاث الأولى لإقليدس:

١. رسم خط مستقيم يوصل بين أي نقطتين.
٢. تمديد أي قطعة خط مستقيم إلى ما لا نهاية بشكل مستمر في خط مستقيم.
٣. رسم دائرة بأي مركز ونصف قطر.

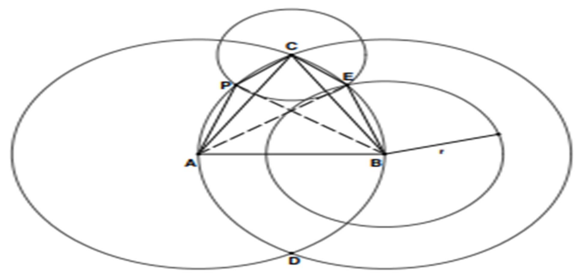
بمعنى آخر، كان يُسمح فقط باستخدام مسطرة ومِقْوَاس (فرجار قابل للطي) لإنشاء الأشكال الهندسية. لم يُسمح باستخدام أي أدوات قياس دقيقة أو مساطر ذات علامات.

بسبب هذه القيود، لم يكن من الممكن لليونانيين حل المشاكل الهندسية الثلاثية المذكورة أعلاه. وفي النهاية، أثبت علماء رياضيات لاحقون في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر استحالة حل هذه المشاكل باستخدام أدوات الإنشاءات الإقليدية.

(١-٣-٨)<u>بعض الانشاءات الممكنة باستخدام المسطرة والفرجار</u>

- **إنشاء ١ :رسم منصف عمودي لقطعة خط مستقيم.**

- إنشــاء ٢ :رســم خــط عمــودي مــن نقطــة معينــة إلــى خــط لا يحتــوي تلــك النقطة.
- إنشـاء ٣ :رسـم خـط عمـودي علـى خـط معطـى عنـد نقطـة معينـة P علـى الخط.
- إنشاء ٤ :تقسيم زاوية عشوائية إلى نصفين.
- إنشاء ٥ :نسخ زاوية معينة إلى شعاع معين برأس معين.



(الشكل IV)

- إنشــاء ٦ :بــالنظر إلــى خــط l ونقطــة P ليســت علــىl ، يمكننــا رســم خــط يمر عبر P ويكون موازيًا للخط المعطى.
- إنشاء ٧ :رسم مثلث متساوي الأضلاع.
- إنشاء ٨ :رسم مربع.
- إنشاء ٩ :رسم مسدس منتظم.

(الفصل الثانـــي)

(٢-١)<u>القسم الاول:</u>للهندســة اللاإقليــدية:

في القرن التاسع عشر، اتخذ العديد من علماء الرياضيات نهجًا مغايرًا. افترضوا خطأ الفرضية الخامسة، لكنهم استنتجوا لاحقًا أن النظريات الناتجة تتعلق بهندسة جديدة غير إقليدية.

قام كل من كارل فريدريش جاوس، وجانوس بولياي، ونيكولاي إيفانوفيتش لوباتشيفسكي بهذه الخطوة الحاسمة بشكل مستقل، وفي نفس الوقت تقريبًا.

تعد عملية تمثيل البيانات وتصورها البياني من أهم المهام التي تشغل بال المجتمعات البحثية في مجال معالجة المعرف وفي هذا السياق، تلعب الهندسة الإقليدية ومبادئها الأساسية دوراً محورياً في رسم النقاط والخطوط المستقيمة والدوائر والمستطيلات والخطوط المتوازية. وتقدم لنا إحدى مبرهناتها الشهيرة حقيقة مفادها بأن مجموع زوايا المثلث يساوي دائماً ١٨٠ درجة كما هو موضح في الشكل ١. وعلى نحو مماثل، تُعد مبرهنة فيثاغورس الشهيرة، والمعبر عنها بالمعادلة: $a^2 + b^2 = c^2$ ، مثالاً بارزاً آخر على تطبيقات الهندسة الإقليدية كما هو موضح في الشكل ٢.

لكن تواجهنا إشكالية عند تطبيق الهندسة الإقليدية على الأشكال غير المستوية، على سبيل المثال المستطيل الموضح في الشكل ٣. وقد دفع هذا الأمر إلى إعادة النظر في مبادئ الهندسة الإقليدية، وهو ما قام به علماء بارزون مثل غاوس (١٧٧٥-١٨٥٥) ولوباشيفسكي (١٧٩٢-١٨٥٦) وبولياي (١٨٠٢-١٨٦٠) وريمان (١٨٢٦-١٨٦٦). حيث لاحظوا وجود غموض في مبدأ التوازي الإقليدي الذي ينص على أنه لا يمكن رسم سوى خط متوازي واحد فقط يمر بنقطة معينة خارج الخط المستقيم. وقد سعى هؤلاء العلماء لإثبات ذلك من خلال نفي هذه المبادئ. وعلى سبيل المثال، حاول كل من لوباشيفسكي (١٧٩٢-١٨٥٦) وبولياي (١٨٠٢-١٨٦٠) رسم أكثر من خط متوازي واحد يمر بنقطة خارج الخط المستقيم، كما هو موضح في الشكل ٤. يُعرف هذا التصور بـ "هندسة سمارانداش". وفي الآونة الأخيرة، شهد هذا المجال اهتماماً متزايداً، حيث تتم دراسة هذه النظرية باستخدام الجبر المتعادل (NeutroAlgebra) بهدف تصورها من خلال "هندسة المتعادل" (NeutroGeometry) . في إطار الهندسة غير الإقليدية، لا يُعد الانتقال من النقطة A إلى النقطة B ثم العودة إلى A بالضرورة عملية تبادلية (commutative operation) بمعنى آخر، قد تختلف المسافة المقطوعة والزمن المستغرق عند الانتقال ذهاباً وإياباً (A → B → A) مقارنة بالانتقال المباشر (A → B) ويعزى هذا الاختلاف إلى اعتماد الخصائص الديناميكية للعنصر المتحرك في الفضاء، بما في ذلك الزخم الحركي (momentum) وتغيراته الزمنية.

لإدراك هـذا المفهـوم بشـكل أفضـل، يمكننـا تشـبيه ذلـك بمسـار محـدد نرغـب فـي قطعـه. مـع تـراكم الـزمن، يتعـرض العنصـر لإجهـاد يـؤثر علـى الـزخم الحركـي، ممـا يسـتدعي تقسـيم المسـار إلـى وحـدات أصـغر بشـكل متـوالٍ (نصـف، ربـع، ثمـن، إلـخ). وبنـاءً علـى قواعـد الهندسـة الـلا تبادليـة، قـد يتطلـب إكمـال المسـافة مجموعـة لا متناهيـة مـن هذه التقسيمات الجزئية.

تسـلط هـذه الأمثلـة الضـوء علـى أهميـة تحليـل الأنظمـة التـي لا تنطبـق عليهـا مبـادئ الهندسـة الإقليديـة التقليديـة، حيـث لا يسـاوي الانتقـال ذهابًـا وإيابًـا $(AB \neq BA)$ الانتقـال المباشـر. ومـن خـلال الاسـتعانة بمبـادئ الهندسـة غيـر الإقليديـة، يمكـن إجـراء تحليل دقيق لهذه الأنظمة.

(٢-١-١)الجدال في الهندســة اللاإقليـدية:

- فكرة هندسة جديدة كهذه هزت أركان الرياضيات والعلوم.
- أثـار اكتشـاف الهندسـة غيـر الإقليديـة جـدلا وتسـاؤلات كبيـرة فـي الأوسـاط العلميـة. بـدا هــذا الــنمط الهندســي الجديــد غريبــا فــي البداية(خاصــة فــي الاســبوع الاول مــن الاكتشــاف)، وافتقـر إلـى الإجمـاع حـول ديمومتـه واسـتحالة ظهـور تناقضـات محتملـة في المستقبل.

ولكن، تمّ حل الشكوك من خلال اكتشاف نماذج للهندسة الجديدة.

تظهـر ظـاهرة مشـابهة فـي الإدراك المعرفـي البشـري، حيـث يمكـن أن توجـد حـالات متعددة متوازيـة تنطلـق مـن نقطـة قـرار بعيـدة عـن المسـار المباشـر. وبنـاءً علـى ذلـك، تنشــأ إشــكالية عنــد التعامــل مــع الإدراك البشــري ومــا يــرتبط بــه مــن احتمــالات كموميـة، والتـي تتـأثر بالعقـل الـواعي واللاواعـي، كمـا ناقشـها Nagarjuna مـن منظور فلسفي.

(٢-١-٢)<u>وتتجلى هذه الاحتمالات المتعددة على النحو التالي:</u>

١. وجود كلتا الحالتين (المسارات المتوازية) في نفس الوقت.
٢. عدم وجود أي حالة (مسار) ممكنة في هذه الحالة.
٣. إمكانية وجود إحدى الحالتين (المسارات) أو عدم وجودهما في آن واحد (تراكب احتمالي).
٤. استحالة وجود أي من الحالتين (المسارات) على الإطلاق.

يخلق هذا التعدد في الاحتمالات حالة من عدم اليقين المعرفي فيما يتعلق بالاختيار بين المسارات المختلفة في إطار الحالة الكمومية للقرار، والتي يمكن وصفها على النحو التالي:

a. يمكن أن تنشأ هذه الحالات (المسارات المتوازية) بشكل مستقل بذاتها.
b. يمكن أن تنشأ هذه الحالات (المسارات المتوازية) نتيجة عوامل خارجية.

c. يمكن أن تنشأ هذه الحالات (المسارات المتوازية) نتيجة كل من العوامل الداخلية والخارجية معاً.
d. استحالة نشأة أي من هذه الحالات (المسارات المتوازية).

لتحليل هذه الأنماط المعقدة للإدراك البشري، والتي قد تتضمن مفاهيم فلسفية مثل "حقيقة فوق الوعي" أو "حالة توريبيا"، يلزم الاستعانة بالهندسة غير الإقليدية وجبرها. حتى تصور التسلسل الهرمي لأي مجموعة بيانات، سواءً على شكل شجرة أو رسم بياني، يتطلب أيضاً تطبيق مبادئ الهندسة غير الإقليدية. ويعود سبب ذلك إلى أن هذا النوع من البيانات يحتاج إلى عدد كبير جداً من القمم (2n)لتمثيل n عنصر، مما يجعل عملية التصور صعبة باستخدام الهندسة الإقليدية. وبالتالي، يلزم توظيف فضاء غير إقليدي أو فضاء ذي أبعاد أسية لتحليل كميات كبيرة من البيانات. وبالنظر إلى تطور مجالات المعرفة المختلفة، يُعد هذا النهج ضرورياً لمواكبة التحديات الجديدة.

يهدف هذا البحث إلى تقديم بعض المفاهيم الجديدة في مجال الهندسة غير الإقليدية، مع أمثلة واقعية لتوضيحها وإثارة الاهتمام بالدراسة المتعمقة في هذا المجال.

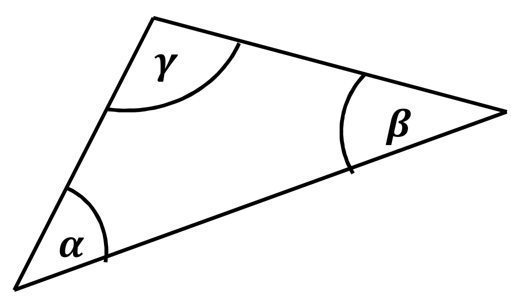


Fig. 1. The sum of angle in the given triangle is 180° as per Euclidean geometry

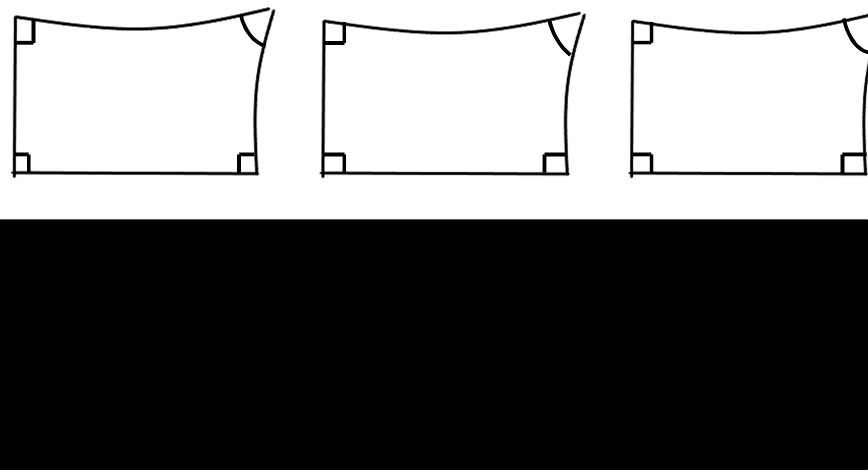


Fig. 2. The Pythagorean theorem which stated $a^2 + b^2 = c^2$using Euclidean geometry.

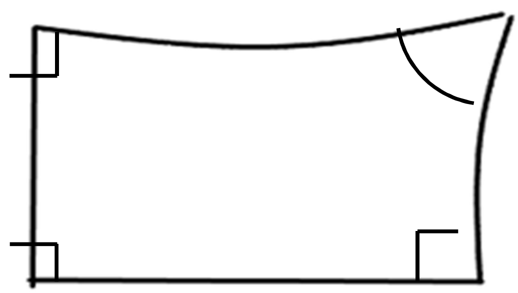


Fig. 3. An example of non-Euclidean geometry

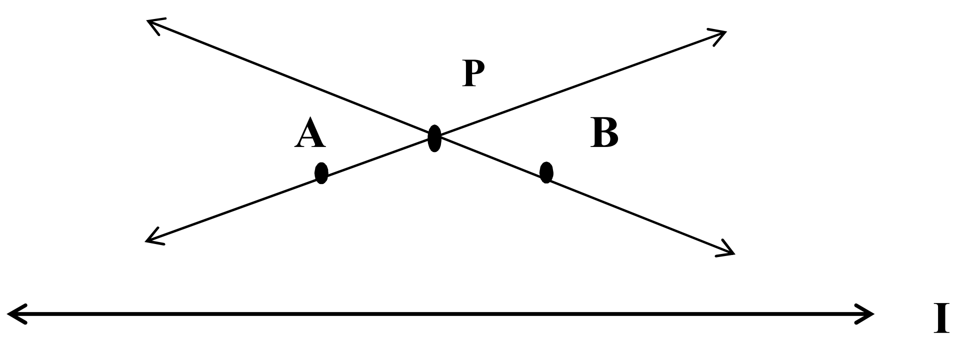


Fig. 4. The alternative of Euclid parallel postulates

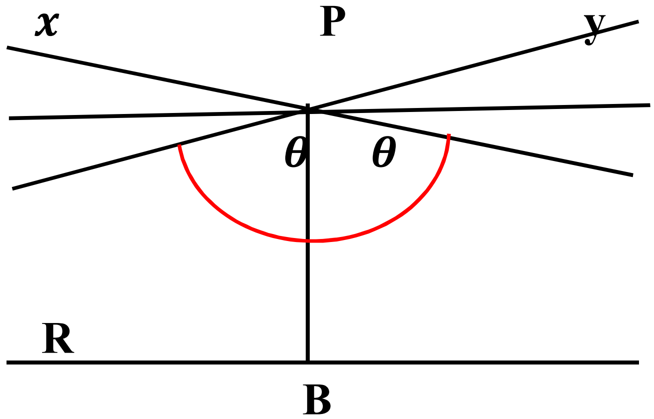


Fig. 5. The three parallel lines from a given point not the straight line

(3-1-2)انواع الهندســـــــات

تكمـن الصـعوبة الأولـى التـي يواجهـا البـاحثون فـي مجـال الهندسـة فـي شـرح الفـرق بـين الهندسـة الإقليديـة والهندسـة غيـر الإقليديـة وتصـورها بصـرياً. يوضـح الشـكل ٦ الفـرق بـين الهندسـة الزائديـة والإقليديـة والإهليجيـة بهـدف معالجـة هـذه العقبـة. وبنـاءً علـى ذلـك، يصـبح مـن الممكـن تصـور الرسـم غيـر الإقليـدي الموضـح فـي الشـكل ٣ باستخدام مفهوم الفضاء الزائدي.

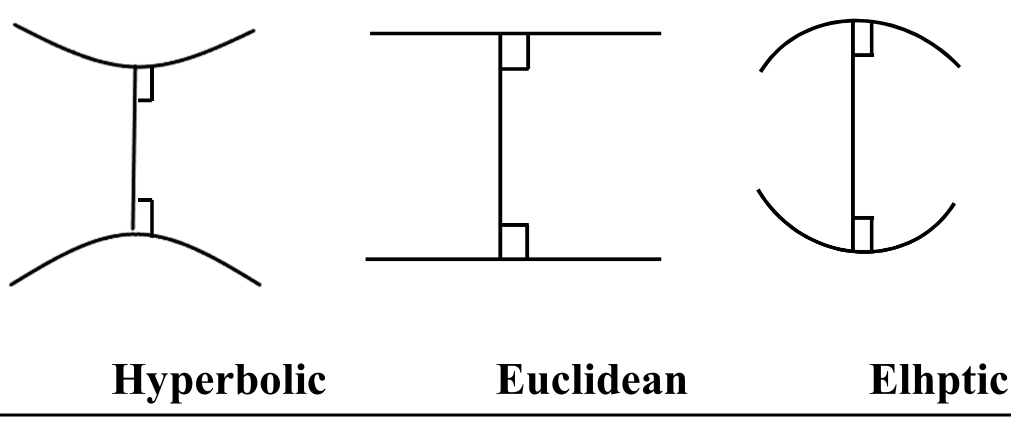


Fig. 6. The difference between Euclidean and non-Euclidean geometry (hyperbolic and elliptic)

(4-1-2) هندســـة المجال الكروي(Spherical Geometry):

تُشكل هندسة المجال الكروي، التي تعرف أيضًا بالهندسة الإهليلجية، فرعًا متخصصًا من الهندسة يركز على دراسة خصائص الأشكال الهندسية الموضوعة على سطح كرة. وعلى عكس البديهيات الأساسية التي تحكم الهندسة الإقليدية التقليدية، فإن العديد من المعتقدات الأساسية حول المثلثات، بما في ذلك فرضيات إقليدس ومبرهنة فيثاغورس، لا تصمد أمام الاختبار على سطح المجال الكروي، كما هو موضح في الشكل٧. وعلى الرغم من اختلافها عن الهندسة الإقليدية التي تتعامل مع الأشكال المستوية والخطوط المستقيمة، فإن هندسة المجال تحافظ على مفهوم النقاط والخطوط والزوايا ولكن بتعريفات تتناسب مع سطح الكرة. على سبيل المثال، يُعرّف "الخط المستقيم" بين نقطتين على سطح الكرة بأنه دائرة عظمى، وهي أكبر دائرة يمكن رسمها على سطح الكرة تمر بالنقطتين المعطاتين. يُعتبر هذا الخط المستقيم في الواقع الإسقاط الفضائي للخط المستقيم ثلاثي الأبعاد الواقع على المستوى الذي يحيط بالكرة.

مع ذلك، فإن هندسة المجال تختلف عن الهندسة الإقليدية النموذجية بعدة جوانب جوهرية:

١. عدم وجود خطوط متوازية :على عكس الهندسة الإقليدية التي تحتوي خطوط لا تلتقي مهما امتدت، لا توجد خطوط متوازية على الإطلاق في هندسة المجال. ففي الواقع، تتقاطع جميع الدوائر العظمى على سطح الكرة في نقطتين متقابلتين (أضداد) على سطح الكرة.

٢. مجموع زوايا أكبر من ١٨٠ درجة :في المثلثات الإقليدية، مجموع زوايا المثلث يساوي دائما ١٨٠ درجة. لكن الأمر يختلف في هندسة المجال، حيث أن مجموع زوايا المثلث (كل ضلع منه قوس دائرة عظمى) يكون أكبر من ١٨٠ درجة.

٣. أطوال الخطوط والمناطق محدودة :على عكس الخطوط المستقيمة التي تمتد إلى ما لا نهاية في الهندسة الإقليدية، فإن تقاطيع الخطوط المستقيمة (والممثلة هنا بقياسات أقواس الدوائر العظمى) على سطح المجال لها طول محدود. وبالمثل، فإن المساحات على سطح الكرة محدودة أيضًا.

(1-4-1-2)<u>فائدة هندسة المجال وشيوع استخدامها:</u> تعد هندسة المجال مفيدة للغاية في حسابات دقيقة تتعلق بقياس الزوايا والمساحة والمسافة على سطح الأرض. كما أنها تلعب دورًا رئيسيًا في دراسة علم الفلك وعلم الكون والملاحة. بالإضافة إلى ذلك، تجد هندسة المجال تطبيقات واسعة في الإسقاط المجسمي (الإسقاط stereographic) المستخدم في مجالات التحليل المركب والجبر الخطي والهندسة الحسابية.

وعلى الرغم من أن البعض قد لا يدركون ذلك، فإننا جميعًا تقريبًا نعتمد على هندسة المجال في حياتنا اليومية. على سبيل المثال، تُستخدم هندسة المجال في تحديد أفضل مسار لطائرة أثناء الرحلة.

(2-1-4-2)<u>المسافة في هندسة المجال الكروي</u>: في هندسة المجال، يُطلق على أقصر مسافة بين نقطتين اسم خط جيوديسي (geodesic)، وهو بمثابة المكافئ للقطعة المستقيمة في الهندسة الإقليدية. يمثل الخط الجيوديسي في هذه الحالة قوسًا من دائرة عظمى.

(2-1-4-3)<u>المساحة</u>: يتم تعريف الزاوية بين خطين جيوديسيين على أنها الزاوية بين مستويي الدائرتين العظمتين اللتان تمثلان الخطين الجيوديسيين. تُحسب قيمة هذه الزاوية بالطريقة المعتادة في حساب الزوايا، ويمكن أن تتراوح قيمتها بين ٠ درجة و ١٨٠ درجة.

- المثلث الكروي هو عبارة عن "مثلث" تقع رؤوسه على سطح الكرة وتكون أضلاعه عبارة عن خطوط جيوديسية على نفس السطح.
نظرية: تعد عملية حساب مساحة المثلث الكروي إحدى أهم التطبيقات الأساسية لهندسة المجال. إذا كان المثلث الكروي له زوايا قياسها (بالراديان) α ، β وγ ، فإن مساحته تساوي:
$(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \times R^2$ أي يمكن تكوين أي مضلع على سطح الكرة من مثلثات تتشارك في الأضلاع.
في إطار هندسة المجال، تُعرّف الدائرة بأنها أثر تقاطع مستوٍ مع سطح الكرة، تمامًا كما تُعرّف الدائرة في الفضاء الإقليدي بأنها أثر تقاطع مستوٍ مع كرة. وبالتالي، فإن الجزء الداخلي للدائرة على سطح الكرة يمثل القسم الواقع على أحد جانبي خط التقاطع (المحيط الخارجي للدائرة)

(٢-١-٤-٤) <u>تحديد مساحة الدائرة على سطح الكرة:</u>
تعتمد مساحة الدائرة على سطح الكرة على عاملين رئيسيين:
١-نصف قطر الكرة :(R) يمثل هذا الثابت قيمة ثابتة خاصة بنصف قطر الكرة الكاملة.
٢-نصف قطر الدائرة على سطح الكرة :(r) يمثل هذا المتغير قيمة نصف قطر الدائرة المرسومة على سطح الكرة.
بالإضافة إلى ذلك، يلعب اتجاه انحناء الدائرة على سطح الكرة دورًا مهمًا في حساب مساحتها.
<u>(2-1-4-5)معادلة حساب مساحة الدائرة</u>
تحسب مساحة الدائرة على سطح الكرة باستخدام المعادلة التالية:

$$2\pi R \,.\, (R \pm \sqrt{R^2 - r^2})$$

تمامًا كما هو الحال على سطح الأرض، حيث يصبح الخط المستقيم في النهاية دائرة عظمى، والمثلث هو في الواقع مثلث كروي، فإن مصطلحي "خط" و"مثلث" يستخدمان هنا بمعنى مختلف عن الهندسة الإقليدية. في هذا السياق، يُقصد بالـ "خط" دائرة عظمى، ويُقصد بالـ "مثلث" مثلث كروي.

١ .جميع المثلثات المتشابهة تكون متطابقة (أي لها نفس الحجم والشكل).

٢ .الخاصية المتعامدة في هندسة المجال: شرط التقاء الخطوط المتعامدة على الأقطاب المتقابلة

في سياق هندسة المجال، تُعد الخاصية المتعامدة بين الخطوط المستقيمة (الممثلة بدوائر عظمى) مفهومًا أساسيًا. بالنظر إلى خط مستقيم (دائرة عظمى) يُرمز له بـ "l"، تنص هذه الخاصية على ما يلي:

الأقطاب المتقابلة: يرتبط بكل خط "l" على سطح الكرة زوج من النقاط المتقابلة (أضداد) التي تسمى "الأقطاب المتقابلة" (*antipodal points*).

شرط التقاء الخطوط المتعامدة: لأي خط مستقيم آخر (دائرة عظمى) يكون متعامدًا مع الخط "l"، فإنه يلزم أن يمر هذا الخط المتعامد عبر كلتا النقطتين المتقابلتين.

بتعبير أدق، لا يمكن لخطين متعامدين على سطح الكرة أن يتقاطعا في نقطة واحدة فقط. إن شرط التقاء الخطوط المتعامدة يقتضي مرور كلا الخطين المتعامدين على الكرة عبر زوج من النقاط المتقابلة على سطحها.

إن تحديد كل نقطة بالنقطة المقابلة لها يؤدي إلى ظهور المستوى الإسقاطي الحقيقي.

(6-4-1-2)<u>التطبيقات العملية للهندسة الكروية</u>: تكتسي هندسة المجال بأهمية بالغة في العديد من التطبيقات الواقعية، بما في ذلك أنظمة الملاحة عبر الأقمار الصناعية (*GPS*) والقياسات الفلكية والمساحة الدقيقة باستخدام أدوات الخرائط. على سبيل المثال، تعتمد تقنية *GPS* بشكل أساسي على هندسة المجال لحساب الموقع والملاحة الدقيقين على سطح الأرض الكروي. يستعين الملاحون بهندسة المجال للملاحة البحرية، ويستخدمها الطيارون في الملاحة الجوية، كما يوظفها علماء الفلك لقياس المسافات في الفضاء.

(7-4-1-2)<u>أهمية الهندسة الكروية</u>: تلعب الأشكال الكروية دورًا رئيسيًا في العديد من التخصصات العلمية والتكنولوجية. على سبيل المثال، تُستخدم المجالات في تصميم الأوعية الضغطية وخزانات البروبان والمراصد الفلكية وأنظمة الملاحة عبر الأقمار الصناعية (*GPS*) والعديد من التطبيقات الأخرى.

يساهم فهم هندسة المجال في تمكين المهندسين والعلماء من تطوير حلول مبتكرة للمشاريع المعقدة، وتعزيز الكفاءة والأثر البيئي الإيجابي.

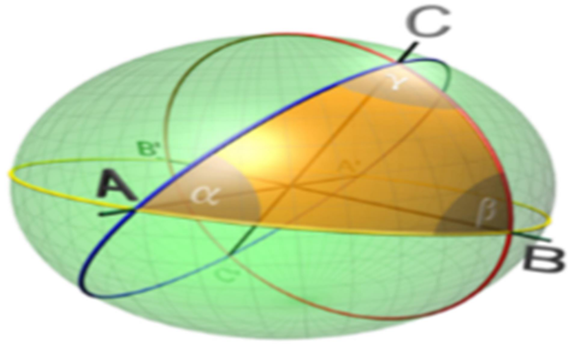


Fig. 7. The examples for the negation of Figure 1 and 2 of Euclidean geometry.

(5-1-2)<u>الهندسة الزائدية(*Hyperbolic geometry*)</u>

تقدم هندسة الفضاء الزائدي إطارًا هندسيًا يختلف اختلافًا جوهريًا عن الهندسة الإقليدية التقليدية. أحد أهم الاختلافات الجوهري بينها وبين الهندسة الإقليدية يكمن في استبدال مسلمة التوازي الإقليدية. على عكس الهندسة الإقليدية التي تسمح بخط مستقيم واحد فقط يمر عبر نقطة خارج خط معين، تسمح هندسة الفضاء الزائدي برسم العديد من الخطوط المستقيمة المتوازية مع الخط المعطى، كما هو موضح في الشكل ٨. وعلى الرغم من التشابه الكبير بين الهندستين، إلا أن الهندسة الزائدية تمتاز بخصائص فريدة. على سبيل المثال، مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلثات الزائدية يكون دائما أقل من ١٨٠ درجة. كذلك نجد وجود خطوط متباعدة لا تتلاقى أبداً، على عكس ما تنص عليه قواعد التوازي في الهندسة الإقليدية. ساهم علماء رياضيات بارزون أمثال لوباتشيفسكي وبولياي وغاوس وتورينوس بشكل ملحوظ في تطوير الهندسة الزائدية، مما أدى إلى إنجازات مهمة في مجال علم المثلثات الزائدية وإنشاء نماذج هندسية بواسطة بِلْترامي. يعود الفضل في تسمية هذا النظام الهندسي بـ "الهندسة الزائدية" إلى عالم الرياضيات فيليكس كلاين الذي أطلق هذا المصطلح عام ١٨٧١. ويؤكد هذا المصطلح على العلاقة الوثيقة التي تربط الهندسة الزائدية بالهندسة الإسقاطية والتحويلات الهندسية، مع إبراز الخصائص المميزة لهذا المفهوم الهندسي الفريد.

بالتّمعن في أسس الهندسة، نجد أن الهندسة الزائدية تمثل نظامًا هندسيًا لا إقليديًا له دور جوهري في الرياضيات المعاصرة. تتجاوز أهميتها كونها فرعًا رياضيًا نظريًا، إذ تمتد تطبيقاتها إلى مجالات علمية متعددة تشمل الفيزياء وعلم الحاسوب. على سبيل المثال، تستخدم في نمذجة الثقوب السوداء بالفيزياء، وإنشاء عوالم افتراضية مذهلة بصريًا في علوم الحاسوب.

إن الطبيعة غير الإقليدية للهندسة الزائدية تتحدى المفاهيم الهندسية التقليدية وتفتح آفاقًا جديدة للاستكشاف والابتكار. توفر دراسة هذا الفرع من الرياضيات للعلماء والرياضيين على حد سواء فهمًا أعمق للأنظمة والظواهر المعقدة التي لا يمكن تفسيرها بالكامل باستخدام الهندسة الإقليدية. يواصل علماء الرياضيات والفيزيائيون الاستلهام من الهندسة الزائدية لإحداث اختراقات وتطورات نوعية في مجالات حديثة مثل الطوبولوجيا والهندسة التفاضلية والفيزياء الرياضية. وعلى نحو أشمل، تقدم الهندسة الزائدية منظورًا فريدًا يثري إدراكنا للعالم المحيط بنا. لا يقتصر أثرها على الرياضيات البحتة، بل تمتد إلى كيفية مقاربتنا للمشكلات وإيجاد الحلول في مجالات علمية أخرى. فعلى سبيل المثال، تم توظيفها في مجال رسومات الحاسوب لإنشاء عوالم افتراضية مذهلة بصريًا. بالإضافة إلى ذلك، لها تطبيقات مهمة في الفيزياء، بما في ذلك نمذجة سلوك الثقوب السوداء وفهم انحناء الزمكان.

(2-1-5-1)<u>تشمل التطبيقات البارزة للهندسة الزائدية</u> أيضًا التنبؤ بالروابط في الشبكات المعقدة. في هذا السياق، يتم الاستفادة من مبادئ الهندسة الزائدية لدراسة بنية ووظيفة هذه الشبكات. أظهرت الدراسات تحسنًا ملحوظًا في أداء خوارزميات التنبؤ بالارتباطات عند الاستناد إلى مفهوم المسافة الزائدية، الذي يأخذ بعين الاعتبار كل من شعبية العقد وتشابهها ضمن الشبكات المعقدة.

(2-1-5-2)<u>وعلى نطاق أوسع، تجد الهندسة الزائدية تطبيقات عملية</u> في مجالات مثل النمذجة الهندسية وعلم شبكات التكوين والهندسة الناشئة للشبكات. فيمكن الاستفادة منها في التصميم الهندسي بمساعدة الحاسوب، ونماذج الشبكات المعقدة، والمجمعات البسيطة المتنامية لدراسة وتحليل خصائص وظواهر هندسية متنوعة .

علاوة على ذلك، تظهر خصائص فريدة للمستطيلات في هندسة الفضاء الزائدي. فهي تختلف بشكل كبير عن مستطيلات الهندسة الإقليدية وتحتوي على عدد أكبر من "النقاط السَّيْدَلية(saddle points) "، التي تمثل مناطق ذات انحناء سلبي وإيجابي متزامنين، تشبه نقاط التوازن غير المستقرة.

بفضل خصائصها غير الإقليدية، اكتسبت هندسة الفضاء الزائدي أهمية كبيرة في مجالات علمية متقدمة، بما في ذلك:

❖ تحليـل المسـارات المداريـة غيـر المتجانسـة :(heteroclinic orbits) تسـاعد هندسـة الفضـاء الزائـدي علـى تحديـد المسـارات الحركيـة التـي ينتقـل فيهـا نظـام ديناميكي بين حالتي توازن غير مستقرين.

❖ دراسة الخصائص الدورية للقيود :(periodic strings) يمكن تطبيق مبادئ هندسة الفضاء الزائدي على تحليل سلوك الأوتار الاهتزازية التي تعود إلى حالتها الأصلية بشكل دوري، حيث تلعب طبيعة الانحناء في الفضاء الزائدي دورًا جوهريًا في تحديد خصائص هذه الاهتزازات.

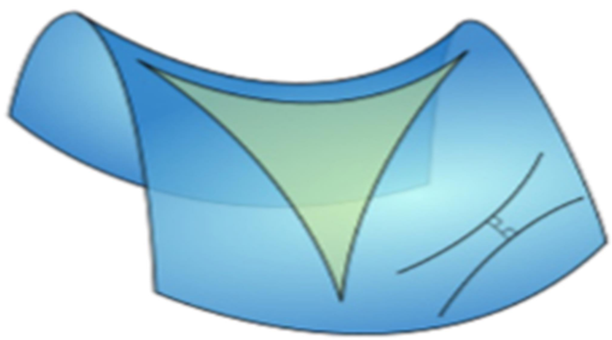


Fig. 8. A triangle immersed in hyperbolic paraboloid with two diverging ultra- parallel lines.

(6-1-2)هندسة التبايـن:(Systolic geometry)

تـدرس هندسـة التبـاين العلاقـة بـين المسـاحة المحصـورة داخـل منحنـى مغلـق ومحـيط هـذا المنحنـى. وتـؤدي هـذه العلاقـة إلـى مـا يُسـمى "متطابقـة التبـاين" (isoperimetric inequality)، والـذي يـنص علـى أنـه عنـدما تكـون مسـاحة شـكل مغلـق أقـل، يكـون محيطـه بالضـرورة أكبـر، وذلـك وفقًـا لفرضـيات إقليـدس كمـا هو موضح في الشكل ٩.

تعد قطـرة المـاء علـى سطح ورقـة شجر مثـالًا حيًـا علـى تطبيـق هندسـة التبـاين. حيـث تسـعى قطـرة المـاء إلـى تكـوين شـكل مستدير متماثـل مـع الحفـاظ علـى كميـة ثابتـة مـن المـاء. يحـدث ذلـك بسـبب ظـاهرة التـوتر السـطحي، وهـي القـوى الجزيئيـة التـي تعمـل علـى تقليـل مسـاحة سـطح القطـرة قـدر الإمكـان، ممـا يـؤدي إلـى تشـكلها علـى هيئـة كرة دائرية كما هو موضح في الشكل ١٠.

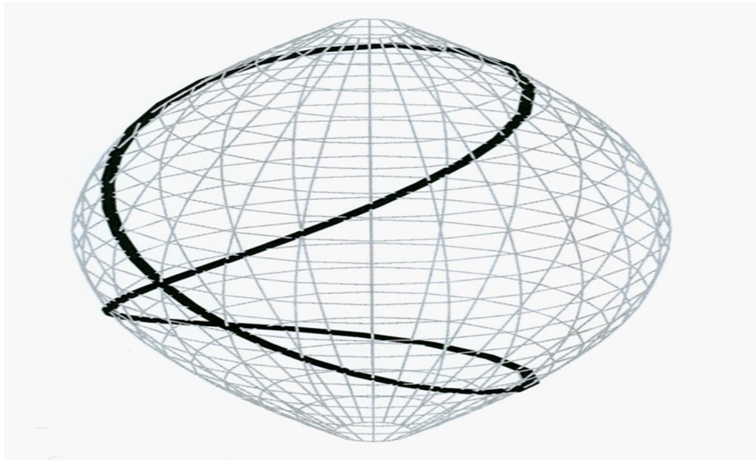


Fig.9. The systolic geometry and its visualization a geodesic on a football.

Fig. 10. A isoperimetric inequality and its formations by drop of water.

✓ **تشكل معالجة الظواهر الفيزيائية التي لا تتوافق مع قواعد الهندسة الإقليدية وتصنيفها إلى فئات صواب/ خطأ/ غير محدد واحدة من أهم التحديات التي تواجه الباحثين. يقدم القسم التالي طريقة مبتكرة للتعامل مع هذه النوعية من البيانات باستخدام إطار "هندسة عدم اليقين (NeutroGeometry)" بهدف دعم عملية اتخاذ القرارات المتعددة.**

(٢-٢)القسم الثاني : للهندسة اللاإقليدية (طريقة معالجة البيانات غير الإقليدية)

يعرض هذا القسم منهجية جديدة لتصنيف البيانات غير الإقليدية إلى فئات "صواب"، "خطأ"،
و"عدم يقين" ضمن إطار "هندسة عدم اليقين .(NeutroGeometry) "

(٢-٣-١)وتتمثل الخطوات المنهجية المقترحة فيما يلي:

الفقرة ١ :البيانات ذات الهندسة اللاإقليدية

في البداية، لنُمعن النظر في البيانات التي تتبع الهندسة اللاإقليدية وخصائصها المميزة(ممثلة بA)

الفقرة ٢ :المجموعة اللائيُّقتنية

لنفترض أن A تمثل مجموعة غير فارغة من البيانات الهندسية اللاإقليدية المذكورة.

الفقرة ٣: تعريف المؤثر:

هنا، نقوم بتعريف المؤثر على أنه $A \times A \rightarrow P^{n}AS\ (,I,F) \notin \{(1,0,0),(0,0,1)\}$

الفقرة ٤ : في حال إمكانية رسم أي خريطة، فيمكننا عندئذٍ وصفها على النحو التالي:

- **(أ)إذا كان من الممكن إجراء عملية (أي رسم خريطة) لأي عنصرين x وy ضمن المجموعة Aفإن الهندسة اللاإقليدية توفر عنصرًا جديدًا ينتمي أيضًا إلى الهندسة اللاإقليدية.**
  بمعنى آخر، x ○ y ⊆ A يمكن اعتبار هذا بمثابة وصف صحيح.
- **(ب) إذا كان أي عنصرينxو y ضمن المجموعة Aفإن عملية (أي رسم خريطة) باستخدام المؤثر المعطى (○) لا تنتج بالضرورة عنصرًا جديدًا ينتمي إلى نفس الهندسة اللاإقليدية، x ○ y ⊈ A أي يمكن اعتبار هذه النتائج بمثابة مناطق غير صحيحة أو لا واقعية في إطار الهندسة اللاإقليدية.**
- **(ج) إذا كان أي عنصرين x وy ضمن المجموعة Aفإن عملية (أي رسم خريطة) باستخدام المؤثر المعطى (○) قد لا تنتج عنصرًا جديدًا محددًا هندسيًا أو كموميًا . بمعنى آخر، العنصر الناتج قد يكون موجودًا في فضاء "space saddle"**

(غير محدد المعالم) وحالته الكمومية غير مؤكدة .هذا النوع من العناصر يلائم إطار "هندسة المتعادلات"(هندسة النيوترولوجية) (NeutroGeometry)

الفقرة ٥: بناءا عى ما سبق ، قمنا بتعريف الدالة f=xy والتي توفر ثلاث إمكانيات:

١. المناطق الصحيحة: في حال وجود تطبيق (خريطة) محددة جيدًا بين المجموعتين X وY ، فإن النتائج تعتبر مناطق صحيحة.
٢. المناطق غير الصحيحة: في حال كان التطبيق غير محدد أو تطبيقًا خارجيًا "***outer-defined mapping***" بين المجموعتين XوY ، فإن النتائج تقع ضمن المناطق غير الصحيحة.
٣. هندسة المتعادلات(***NeutroGeometry***) : إذا لم يتضح ما إذا كان التطبيق موجودًا أم لا، أو ما هي قيمة التطبيق بين X وY ، فإن العنصر يقع ضمن إطار هندسة المتعادلات.

الفقرة ٦: بناءً على ذلك، يصبح من الممكن تصنيف وتحليل مجموعات البيانات غير الإقليدية.

الفقرة ٧: يمكن تحديد مدى تقارب مجموعات البيانات (تشابهها) باستخدام قياس المسافة الجيوديسية " Geodesic distance".

الفقرة ٨: على عكس هندسة إقليدس التي تستخدم المسافة في خط مستقيم، فإن المسافة الجيوديسية"geodesic distance " تحدد أقصر مسار بين نقطتين في بيانات غير إقليدية، كما هو موضح فيFig.11

الفقرة ٩: بناءً على المسافة الجيوديسية المحددة، يمكن اعتبار البيانات القريبة منها عناقيد Cluster (مجموعاتgroups) لاستخدامها في معالجة المعرفة.

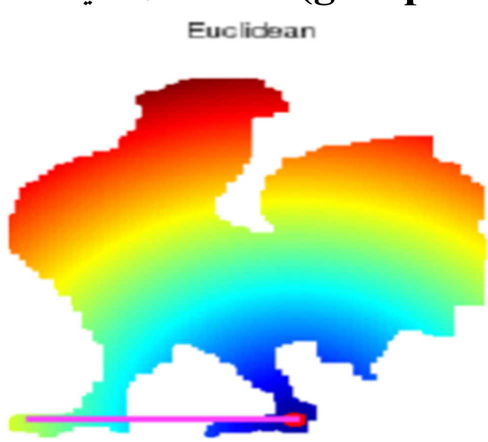


Fig. 11. The difference between Euclidean and Geodesic distance

(٢-٣-٢)تعقيد الوقت"Time Complexity": لنفترض أن هناك عدد n من مجموعات البيانات غير الإقليدية في الفضاء المعطى. في هذه الحالة، سيستغرق تعريف الدالة لقياس المسافة الجيوديسية بينها تعقيد زمني مقداره($O(n^2)$.

أما عملية تحليل خصائص مجموعات البيانات هذه باستخدام هندسة النيوترون (NeutroGeometry)فستستغرق في أسوأ الأحوال تعقيدًا زمنيًا يبلغ $O(n^3)$.

وعليه، فإن التعقيد الزمني الكلي لتحليل خصائص البيانات غير الإقليدية هو... (إجابتك: صواب / خطأ).

على الرغم من كفاءة خوارزمية قياس المسافة الجيوديسية بمعقد زمني قدره ($O(n^2)$، إلا أن تحليل خصائص مجموعات البيانات في حالات عدم اليقين (المناطق غير المؤكدة) قد يستغرق في أسوأ الأحوال تعقيدًا زمنيًا أقصى يبلغ ($O(n^3)$. يعتمد هذا التعقيد على خوارزمية التحليل المحددة المستخدمة في إطار هندسة النيوترون (NeutroGeometry).

(٢-٣) القسم الثالث:للهندسة اللاإقليدية" مجموعات البيانات ذات البنية الهندسية اللاإقليدية وتحليل خصائصها" :

في الآونة الأخيرة، شهد مجال تَصَوُّر البيانات اهتمامًا متزايدًا باستخدام كل من الجبر العَدَمي (نيوترو الجبر) والهندسة العَدَمية (نيوتروجيومتري) بالمقابل، ركزت جهود باحثين آخرين على معالجة هذه المجموعات البيانات إما باستخدام البعد الرابع أو مجموعة توريام .

<u>في هذا القسم سوف نتناول عدة أمثلة كامثلة تطبيقية عن الهندسة الاإقليدية:</u>

المثـــال ١ :(علم الفلك)

يُعد التحليل الدقيق لعلم الفلك، أو بالأحرى علم الفلك الوضعي، مجالًا للبيانات ذات البنية الهندسية اللاإقليدية.يُستخدم هذا المجال لتحديد موقع أي جرم فلكي على الكرة السماوية بناءً على تاريخ ووقت وموقع رصده الأرضي المعطاة. يعتمد التمثيل الرياضي لعلم الفلك وأنماطه على الهندسة الكروية والجبر الكروي.

المثال ٢: (نمو الاسطح)

تحدد العديد من العمليات فيزيائية وكيميائية نمو الأسطح .تشمل هذه العمليات على سبيل المثال لا الحصر نمو الأجرام الجاذبية والنباتات والنانوتراكيب وتحولات الطور الخاصة بها .كما تعد الطباعة ثلاثية الأبعاد وحركة الخلايا أمثلة على ظواهر مرتبطة بالهندسة اللاإقليدية .يمكن تمثيل كل من هذه الحالات باستخدام هندسة ريمان، التي تصف انحناء الزمكان (الزمان والمكان) المتغير اعتمادًا عليهما.

المثال ٣: (الكرات أو التوافقيات الكروية الضبابية)

تقدم هذه الطريقة تمثيلًا هندسيًا غير تبادلي للبيانات باستخدام دورانها الخاص. يؤدي حاصل ضرب الدوران إلى نتائج مختلفة لقياس موضع توافقي معين. وهذا يعني أن هذه الهندسة توفر طريقة لتصنيفها إلى مناطق إيجابية وسلبية وغير مؤكدة بناءً على الدوال المتعامدة المعيارية. يمكن تمثيل أي نقطة محددة على سطح الكرة الضبابية على شكل توافقيات كروية كما هو موضح في الشكل ١٢.ومن الأمثلة ذات الصلة بذلك الدوال الدورية أو الدائرية التي يتم تمثيلها باستخدام الجيب والتاين، أي سلسلة فورييه.

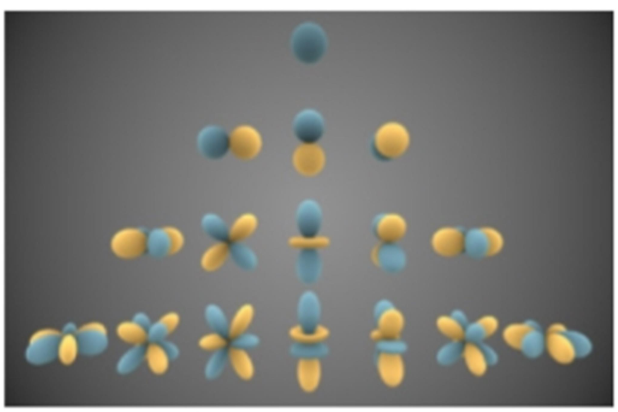


Fig. 1٢. The visual representation of spherical harmonic

REFERENCE

Dunajski, Maciej, 'Euclidean geometry', Geometry: A Very Short Introduction, Very Short Introductions (Oxford, 2022; online edn, Oxford Academic, 27 Jan. 2022), https://doi.org/10.1093/actrade/9780199683680.003.0002, accessed 21 Apr.٢٠٢٤

Shiing-shen chern "What Is Geometry" The American Mathematical Monthly, Vol. 97, No. 8, Special Geometry Issue (Oct., 1990), pp. 679-686 Published by: Mathematical Association of America

Accessed: 05/10/2009 07:58 http://www.jstor.org/stable/2324574

Benno Artmann "Euclidean Geometry"Britannica,Apr 5,2024

Thomas F.Banchoff "The Axioms of Euclidean Plane Geometry"Beyond The Third Dimension, chapter 9,section1 .

Pamini Thangarajah "Basic_Concepts_of_Euclidean_Geometry Eculidean Geometry" book:Math1150:Mathematical Reasoning .

Euclid's "Postulates 5" book: Euclid's Elements c.300BC

Johan E.Gilbert "Euclidean Parallal Postulate",M333L-Modern Geometry :a Dynamic Approach/chapter2

Dr.David C.Royster "Euclidean Geometry" chapter 3,MATH 6118-090 Non Euclidean Geometry spring 2002

Math.Washington "Non-Euclidean Geometry" DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Math.Washington "Non-Euclidean Geometry" DEPARTMENT OF MATHEMATICS

P. K. Singh, "AntiGeometry and NeutroGeometry characterization of Non-Euclidean data set," J. Neutrosophic Fuzzy Syst., vol. 1, no. 2, pp. 24–33, 2021. DOI: 10.54216/JNFS.0101012.

P. K. Singh, "Fourth dimension data representation and its analysis using Turiyam context," J. Comput. Commun., vol. 9, no. 6, pp. 222–229, 2021. DOI: 10.4236/jcc.2021.96014.

G. D. Birkhoff, "A set of postulates for plane geometry (Based on scale and protractors)," Ann. Maths., vol. 32, no. 2, pp. 329–345,١٩٣٢

Wikipedia contributors “Euclidean Geometry”enwikipedia, 5 April 2024 14:43 UTC ,

Wikipedia contributors “Non-Euclidean geometry” Wikipedia, 21 April 2024 20:19 UTC, ID: 1217662542

Alexander Bogomolny, “Non-Euclidean Geometrie” Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, Sun Apr 21 2024 17:49:20 GMT+0300

Fred Sala, Ines Chami, Adva Wolf, Albert Gu, Beliz Gunel and Chris Ré “Machine Learning In Non-Euclidean Spaces” Stanford dawn, 10 Oct 2019

marcocetica “non_euclidean_geometry” marcocetica posts

N. Lobachevsky, “Pangeometry, translator and editor: A. Papadopoulos. Heritage of European mathematics series,” Eur. Math. Soc., vol. 4, 2010.

S. Bhattacharya, “A model to a Smarandache,” Geometry, 2004،

M. R. Popov, “The Smarandache non-geometry,” Proc. Am. Math. Soc. Meet., vol. 17, no. 3, p. 595, 1996.

L. Kuciuk and M. Antholy, “An introduction to the Smarandache geometries,” JP J. Geom. Topol., vol. 5, no. 1, pp. 77–81, 2005.

F. Smarandache, “Introduction to NeutroAlgebraic structures and AntiAlgebraic structures,” in Advances of Standard and Nonstandard Neutrosophic Theories, Pons Publishing House Brussels, Belgium, vol. 6, 2019, pp. 240–265

F. Smarandache, “NeutroAlgebra is a generalization of partial algebra,” Int. J. Neutrosophic Sci., vol. 2, pp. 8–17, 2020. DOI:

M. Al-Tahan and F. Smarandache, “Davvaz B, NeutroOrderedAlgebra: applications to semigroups,” Neutrosophic Sets Syst., vol. 39, pp. 133–147, 2021.

F. Smarandache, “NeutroGeometry & AntiGeometry are alternatives and generalizations of the non-Euclidean geometries,” Neutrosophic Sets Syst., vol. 46, pp. 456–476, 2021.

P. K. Singh, “NeutroAlgebra and NeutroGeometry for dealing heteroclinic patterns,” in Theory and Applications of NeutroAlgebras as Generalizations of Classical Algebras, IGI Global Publishers, 2021

(Accepted for Publications).

P. K. Singh, "Data with Turiyam set for fourth dimension quantum information processing," J. Neutrosophic Fuzzy Syst., vol 1, no. 1, pp. 9–23, 2021

Wikipedia contributors" Nagarjuna" Wikipedia, 21 April 2024 15:10 UTC, ID: 1218696303

Wikipedia contributors, "Śūnyatā" 21 April 2024 15:13 UTC, ID: 1211813992

P. K. Singh, "Cubic graph representation of concept lattice and its decomposition," Evol. Syst. 2021,

B. Russell, Introduction: An Essay on the Foundations of Geometry, Cambridge: Cambridge University Press, 1897

H. S. M. Coxeter, "Non-Euclidean Geometry" University of Toronto Press, 1942, reissued 1998 by Mathematical Association of America

Henry Maltby, July Thomas, Satyabrata Dash "Spherical Geometry"Brilliant.org, April 21,2024

Wikipedia contributors "Systolic geometry" Wikipedia, 21 April 2024 15:26 UTC, ID: 1211951975

A. W. James, Hyperbolic Geometry, Second ed., Springer-Verlag, London, UK, 2005.

"Advancement in Integrating Spheres of Design and Technology - LISUN." LISUN, 25 June 2023,

"History of Geometry - Wikipedia." History of Geometry - Wikipedia, 8 Apr. 2015, en.wikipedia.org/wiki/History_of_geometry.

Splashlearn"geometry-in-daily-life"Splashlearn,math-vocabulary Accessed 25 Mar. 2024.

Studysmarter "geometry/spherical-geometry" explanations math, Accessed 25 Mar. 2024

"Sphere - Definition, Formulas, Equation, Properties and Examples." BYJUS, byjus.com/maths/sphere. Accessed 25 Mar. 2024.

"Sphere - Shape, Definition, Formulas, Properties, Examples." Cuemath, www.cuemath.com/geometry/sphere. Accessed 25 Mar. 2024.

"Spherical Geometry: Exploring the World With Math." Spherical Geometry: Exploring the World With Math,

www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-02b/projects/franco/index.htm. Accessed 25 Mar. 2024.

"Spherical Geometry - Wikipedia." Spherical Geometry - Wikipedia, 25 Mar. 2015, en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry.

Aerosint. "Why Multi-material Additive Manufacturing Will Change Our Approach to Part Design." Medium, 9 Dec. 2019,

Bianconi, Ginestra, and Christoph Rahmede. "Emergent Hyperbolic Network Geometry | Scientific Reports." Scientific Reports, vol. 7, no. 1, 7 Feb. 2017, https://doi.org/10.1038/srep41974.

Chan, Cheung. "Long-Term Costs on a Building Project | Neumann Monson Architects." Long-Term Costs on a Building Project | Neumann Monson Architects, neumannmonson.com/blog/long-term-costs-consider-when-starting-building-project. Accessed 25 Mar. 2024.

("Hyperbolic Geometry - an Overview | ScienceDirect Topics." Hyperbolic Geometry - an Overview | ScienceDirect Topics, https://doi.org/10.1016/B978-012369427-0/50004-9. Accessed 25 Mar. 2024.

J. A. Tixeira da Silva and Q. H. Vuong, "The right to refuse unwanted citations: rethinking the culture of science around the citation," Scientometrics, vol. 126, pp. 5355–5360, 202

Hyperbolic Geometry -- From Wolfram MathWorld. mathworld.wolfram.com/HyperbolicGeometry.html. Accessed 25 Mar. 2024.

"Hyperbolic Geometry." Wikipedia, 26 Jan. 2024, en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry.

"LeanDesigner | Hyperlean." Hyperlean, hyperlean.eu/en/solutions/leandesigner-en. Accessed 25 Mar. 2024.

Moore, Walter P. "High Cost of Low Maintenance." Walter P Moore, 27 Feb. 2024

Nguyen, Yvette, and Kara Atchison. "7 Effective Ways of Cost Savings in Manufacturing." LoneStar Technology, 13 Sept. 2023,

Samei, Zeynab, and Mahdi Jalili. "Application of Hyperbolic Geometry in Link Prediction ..." Scientific Reports, vol. 9, no. 1, 30 Aug. 2019, https://doi.org/10.1038/s41598-019-49001-7