وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة بابل / كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة / قسم الرياضيات

كجزء من متطلبات نيل درجة بكلوريوس علوم في الرياضيات

بعنوان :

دراسة تحليلية للمشتقة الشوارزية وتطبيقاتها

أعداد الطالب: علي حسين علوان

بأشـــــــراف: أ.د افتخار مضر طالب

1447هـ

2026م

الآية القرآنية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

(يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ)

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة - الآية 11

الاهداء

إلى من كلّلهما الله بالهيبة والوقار..

إلى من علّمني العطاء دون انتظار إلى "أبي" العزيز

..إلى ملاكي في الحياة.. إلى معنى الحب والحنان ..إلى "أمي" الغالية ..

إلى من ساروا معي في درب العلم خطوة بخطوة، أساتذتي الأفاضل وزملائي الأعزاء،

إلى كل من كان له أثر في مسيرتي العلمية، أُهدي إليكم ثمرة جهدي هذا.

شكر وتقدير

الحمد لله الذي وفقني لإتمام هذا البحث،

والشكر موصول إلى عمادة كلية التربية للعلوم الصرفة في جامعة بابل، وأخص بالذكر أساتذتي في قسم الرياضيات الذين لم يبخلوا علينا بعلمهم.

كما أتقدم بفيض شكري وامتناني إلى الأستاذ المشرف (الدكتورة افتخار) لما قدمته من نصائح علمية قيمة وتوجيهات سديدة كانت العون لي في إخراج هذا البحث بهذا الشكل.

الفهرست :

المقدمة:

تشكل الأنظمة الديناميكية أحادية البعد أحد الركائز الأساسية في الرياضيات الحديثة؛ إذ تتيح فهم كيفية تطور الأنظمة مع الزمن من خلال تكرار دوال رياضية بسيطة. يبدأ تحليل أي نظام دينامي عادة بدراسة النقاط الثابتة (Fixed Points)، وهي النقاط التي لا تتغير قيمتها عند تطبيق الدالة، حيث تمثل هذه النقاط حالات التوازن التي يمكن للنظام الاستقرار عندها أو الابتعاد عنها.

يعتمد التصنيف التقليدي للنقاط الثابتة على تحليل المشتقة الأولى للدالة عند النقطة الثابتة، حيث تقسم النقاط إلى نوعين رئيسيين:

1. نقاط زائدية (Hyperbolic) عندما تكون $|f'(x^*)| \neq 1$ ، ويمكن تحديد استقرارها بسهولة: إذا كان $|f'(x^*)| < 1$ تكون النقطة جاذبة (Attracting)، وإذا كان $|f'(x^*)| > 1$ تكون نافرة (Repelling).

2. نقاط غير زائدية (Nonhyperbolic) عندما تكون $|f'(x^*)| = 1$ ، وهنا يفشل تحليل المشتقة الأولى في تحديد السلوك الدينامي.

تكتسب النقاط غير الزائدية أهمية خاصة لأنها تمثل حالات حدودية تفصل بين أنماط السلوك المختلفة. وفيما بينها، تبرز الحالة $f'(x^*) = -1$ كالأكثر تعقيداً وإثارة للاهتمام، حيث يظهر سلوك التذبذب (Oscillation) الذي لا يمكن تحليله بالأدوات التقليدية.

هنا يأتي دور مشتقة شوارزية (Schwarzian Derivative)، وهي أداة رياضية أدخلها ديفيد سغنر (David Singer) إلى مجال الأنظمة الديناميكية عام 1978. تقدم هذه المشتقة معياراً دقيقاً للاستقرار في الحالة

$f'(x^*) = -1$ ، كما تمتلك خصائص جبرية مهمة مثل خاصية التركيب ومبدأ الصغرى والعظمى (Min-Max Principle)، مما يجعلها أداة أساسية في تحليل السلوك طويل المدى للأنظمة الديناميكية.

تجدر الإشارة الى ان مشتقة شوارزية كانت معروفة في التحليل العقدي قبل إدخالها مجال الأنظمة الديناميكية فقد استخدمت هناك كمعيار لتحديد ما اذا كانت دالة عقدية تمثل تحولا خطيا كسريا اما في ديناميكيا أحادية البعد فقد ادخلها ديفيد سغنر عام 1978 كأداة لدراسة استقرار الدوران الدورية و تحديد عددها .

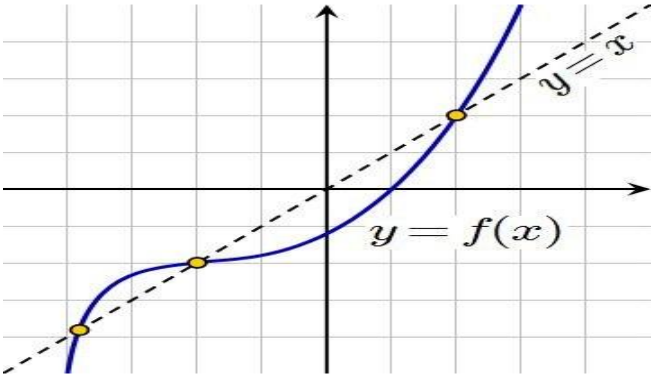
البند الأول

اوليات حول أنواع النقاط

مقدمة : خلال هذا البند سنعرض تعاريف أنواع مختلفة من النقاط التي يختلف سلوكها الديناميكي .

1.1 / النقطة الثابتة (Fixed Point) : و هي نقطة تكون تكراراتها هي نفس النقطة لتكن لدينا $f: R \to R$ ناخذ p في مجال f عندما نطبق f على p اذا كانت $f(p) = p$ نقول عن p انها نقطة ثابتة .

هندسيا : نقطة p في مجال f هي نقطة ثابتة لـ f اذا و فقط اذا تقاطع مخطط الدالة f مع الخط $y = x$ (p , p)



شكل (1)

حيث في رسم رقم 1 نجد ان الدالة تمتلك ثلاث نقاط ثابتة .

1.2 مثال: لتكن $f : R \to R$ معرفة بقاعدة اقتران $f(x) = x^2$, الدالة f تمتلك نقطتين ثابتتين كما يأتي :

$$f(x) = x^2$$

$$X^2 = x$$

$$X^2 - x = 0$$

$$X (x - 1) = 0$$

اما $x = 0$

او $x - 1 = 0$

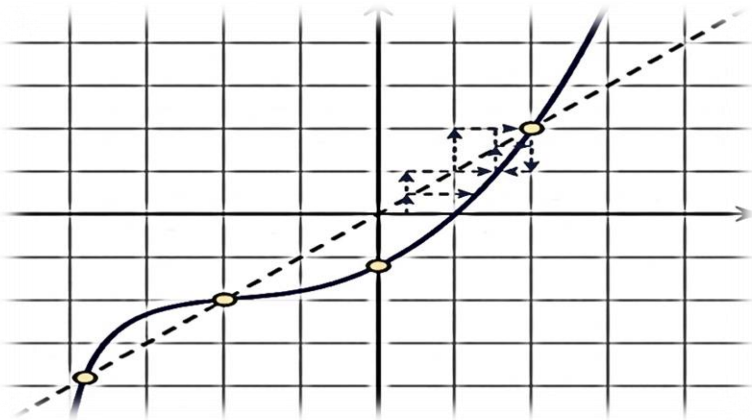
$X = 1$

اذا النقاط الثابتة عندما x تساوي 1 , 0

1.3 / انواع النقطة الثابتة: توجد أنواع مختلفة من النقاط الثابتة أهمها :

1- النقطة الجاذبة (Atracting) : النقطة p هي نقطة ثابتة جاذبة لـ f بشرط تحقق التالي :
توجد فترة $(p - \varepsilon , p + \varepsilon)$ تحتوي على p بحيث اذا كانت x تنتمي الى f و في الفترة $(p - \varepsilon , p + \varepsilon)$ فأن لأي نقطة في هذا المجال فأن $f^{(n)}(x) \to p$ عندما n تزداد بدون حدود تكون النهاية p

التعبير الرياضي : $\lim_{n\to\infty} F^n(X) = P$ $\forall x \in (p - \varepsilon , p + \varepsilon)$

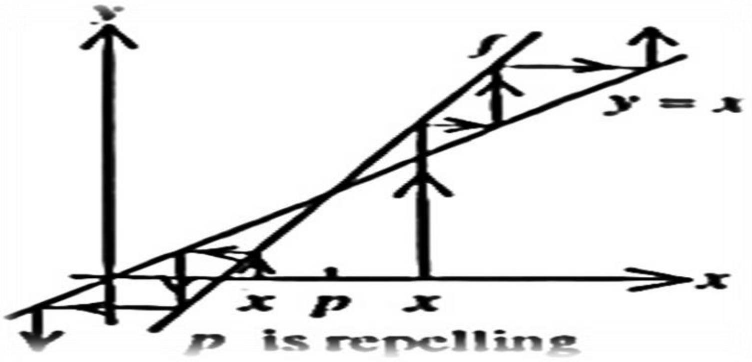


2- النقطة النافرة (repeling) : تعرف النقطة الثابتة على انها نقطة نافرة للدالة f بشرط ان توجد فترة $(p - \varepsilon , p + \varepsilon)$ تحتوي على p بحيث اذا كانت x تنتمي الى الدالة f و في $(p - \varepsilon , p + \varepsilon)$ لكن $x \neq p$ فأن $| f(x) - p | > | x - p |$

التعبير الرياضي :

$$\exists \varepsilon > 0 , \ \forall x \in (p - \varepsilon , p + \varepsilon)$$

$$X \neq P \qquad | f(X) - P | > | X - P |$$



شكل ( )

1.4 النقاط الثابتة الزائدية : يقال للنقطة الثابتة زائدية اذا كانت $| f'(x^*) | \neq 1$

1.5 نظرية : لتكن x^* نقطة ثابتة زائدية لدالة f حيث ان f قابلة للاشتقاق بشكل مستمر عند x^* عندئذ :

1- اذا كان $| f'(x^*) | < 1$ فأنها تكون جاذبة.
2- اذا كان $| f'(x^*) | > 1$ فأنها تكون نافرة.

أولا : البرهان في حالة الجذب $| F'(X^*) | < 1$:

لنفرض ان $| F'(X^*) | < m < 1$ لبعض $M < 0$ عندئذ توجد فترة مفتوحة $I = (\varepsilon + x^* , \varepsilon - x^*)$ بحيث $| F'(X^*) | < m < 1$ لكل $I \in X$ بتطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة لأي $I \in X$ يوجد C بين X° و X^* بحيث :

$$| F(X_\circ) - X | = | F(X_\circ) - F(X^*) | = | F(C) | \, | X_\circ - X^* | \leq M | X_\circ - X^* |$$

بما ان $M < 1$ فأن المتراجحة تبين ان $F(X_\circ)$ اقرب الى X^* من $X_\circ$ و بالتالي $F(X_\circ) \in I$ بتكرار الحجة أعلاه على $F(X_\circ)$ بدلا من $X_\circ$ يمكننا ان نثبت ان :

$$| F^2(X_\circ) - X^* | \leq M | F(X_\circ) - X^* | \leq M^2 | X_\circ - X^* |$$

باستخدام الاستقراء الرياضي يمكننا اثبات انه لكل $n \in z^+$: $| F^n(X_\circ) - X^* | \leq M^n | X_\circ - X^* |$

لأثبات استقراء X^* لأي $\varepsilon > 0$ نأخذ $(\varepsilon , \bar{\varepsilon})$

$\varsigma = \text{Min}$ عندئذ $| X_\circ - X^* | < 8$ تؤدي الى $| F^n(X_\circ) - X^* | \leq M^n | X_\circ - X^* | < \varepsilon$

مما يثبت الاستقراء علاوة على ذلك من المتراجحة نحصل على $\lim_{n\to\infty} | F^n(X_\circ) - X^* | = 0$ و بتالي

$\lim_{n\to\infty} F^n(x^\circ) = x^*$

ثانيا : البرهان في حالة النقطة النافرة $| F'(X^*) | > 1$

$$\text{If } | F'(X^*) | > 1 \ \exists \ M > 1 \ni \ | F'(X^*) | = M > 1$$

$$\exists \ I = (\varepsilon + x^* , \varepsilon - x^*) \ \ni \ | F'(X^*) | = M > 1$$

بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة

$| f(X) - P | > | X - P |$

بأستخدام تعريف النقطة الثابتة النافرة X^* هي نقطة نافرة .

1.6 مثال : للدالة $F(X) = X^3$ النقاط الثابتة هي $X^*_1 = 0$, $X^*_2 = 1$, $X^*_3 = -1$

لايجاد النقاط الثابتة نطبق تعريفها : $F(X) = X^3$

النقطة الثابتة X^* هي التي تحقق $F(X^*) = X^*$

$$X^3 = X$$

$$X^3 - X = 0$$

$$X(X^2 - 1) = 0$$

$$X(X-1)(X+1) = 0$$

اما $X = 0$

او $X = \pm 1$

ان الدالة f تمتلك ثلاث نقاط ثابتة و لبيان نوع النقاط نشتق الدالة بعد ذلك نطبق نظرية الاستقرار أعلاه :

$$X^* = 0 , 1 , -1$$

$$F'(X) = 3X^2$$

-1 عندما $X^* = 1$

$$F'(1) = 3(1)^2$$

نافرة $= 3 > 1$

-2 عندما $X^* = -1$ $F'(1) = 3(1)^2$

نافرة $= 3 > 1$

-3 عندما $X^* = 0$ $F'(0) = 3(0)^2$

جاذبة $= 0 < 1$

1.7 النقاط غير الزائدية : بعد ان استعرضنا نظرية الاستقرار الخطي للنقاط الزائدية ننتقل الى الحالة التي يكون فيها $| F'(X) = 1 |$ و $F'(X^*) = -1$ أي نقطة غير زائدية في هذه الحالة لا يمكن للمشتقة الأولى وحدها تحديد طبيعة الاستقرار و يصبح من الضروري دراسة المشتقات ذات الرتب العليا .

معايير الاستقرار للنقاط الثابتة غير الزائدية اكثر تعقيدا سيتم تلخيصها في ما يلي :

1.8 نظرية : لتكن X^* نقطة ثابتة للدالة F بحيث $F'(X) = 1$ اذا كانت $F'(X)$ و $F''(X)$ و $F'''(X)$ مستمرة عند X^* فأن العبارات التالية صحيحة :

-1 اذا كان $F''(X) \neq 0$ فأن غير مستقرة (شبه مستقرة)
-2 اذا كان $F''(X^*) = 0$ و $F'''(X^*) > 0$ فأن X^* غير مستقرة نافرة
-3 اذا كان $F''(X^*) = 0$ و $F'''(X^*) < 0$ فأن X^* جاذبة بشكل متقارب

1.9 مثال / لتكن $F(X) = -X^3 + X$ سنجد النقطة الثابتة $F(X) = X$ ؟

الحل :

$$-X^3 + X = X$$

$$-X^3 + X - X = 0$$

$$-X^3 = 0$$

$$X^3 = 0$$

$$X = 0$$

النقطة الثابتة الوحيدة هنا هي $X = 0$

$$F'(X) = -3X^2 + 1$$

$$F'(0) = -3(0)^2 + 1$$

$$F'(0) = +1$$

$$F''(X) = -6X$$

$$F''(0) = -6(0)$$

$$F''(0) = 0$$

عندما $X^* = 0$ حالة غير زائدية من النوع الأول

$$F'(0) = 1$$

$$F''(0) = 0$$

$$F'''(0) = -6 < 0$$

حسب النظرية أعلاه اذا كانت $F''(X^*) = 0$ و $F'''(X^*) < 0$ فأن النقطة الثابتة جاذبة بشكل متقارب.

البند الثاني

خصائص المشتقة الشوارزية

في نهاية الفصل الأول وصلنا الى تحليل استقرار النقاط الثابتة غير الزائدية و خاصة حالة $F'(X) = -1$ التي لا يمكن إنجازها باستعمال المشتقة الأولى وحدها لذلك سنبحث عن أداة رياضية اكثر تقدما و تعطي شرطا واضحا لأستقرار النقاط الحيادية .

في هذا الفصل نقوم بدراسة تفصيلية لمشتقة الشوارزية سنبدأ بتعريفها الرياضي، ثم نستعرض خصائصها الأساسية مثل قاعدة التركيب و مبدأ الصغرى و العظمى . بعد ذلك نربطها بالدالة المربعة F' و نعرض نظرية الاستقرار الخاصة بها .

2.1 تعريف مشتقة شوارزية :

لتكن $f : R \to R$ دالة حقيقية قابلة للاشتقاق ثلاث مرات على الأقل عند النقطة X , بحيث $F'(X) \neq 0$ تعرف مشتقة شوارزية للدالة F عند X بعلاقة :

$$S f'(X) = \frac{F'''(X)}{F'(X)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x^*)}{F'(x^*)}\right)^2$$

2.2 ملاحظة : حالة خاصة عندما $f'(X^*) = -1$

اذا كانت X^* نقطة ثابتة للدالة F و تحقق $F'(X^*) = -1$ فأن مشتقة شوارزية تختصر الى

$$S f(X^*) = -f'''(X^*) - \frac{3}{2}\left(F''(x^*)\right)^2$$

2.3 ملاحظة حول مجال التعريف :

من التعريف يتضح ان مشتقة شوارزية غير معرفة عند النقاط التي تكون فيها $F'(X) = 0$ (أي النقطة الحرجة) لان المقام سيصبح صفرا . في هذه الحالة يمكن ان تؤول القيمة الى $\pm\infty$ كما في مثال الدالة اللوجستية الذي سندرسه لاحقا عندما $X = \frac{1}{2}$ حيث $S\,F(\frac{1}{2}) = -\infty$

2.4 مثال تطبيقي :

لتكن $f(X) = X^2 + 3X$ على الفترة $[-3\,,3]$

إيجاد النقاط الثابتة $X_1^* = 0$, $X_2^* = -2$

الحل :

المشتقات

$f'(X) = 2X + 3$

$f''(X) = 2$

$f'''(X) = 0$

عند $X^* = -2$

$f'(-2) = -1$

$S\,F(-2) = -F'''(-2) - \frac{3}{2}\left[\ddot{F}(-2)\right]^2 = -6 < 0$

النقطة جاذبة

2.5 أهمية و امثلة على دوال ذات مشتقة الشوارزية السالبة

لبيان أهمية مشتقة الشوارزية السالبة وقبل الشروع في عرض الأمثلة من المهم ان نشير الى ان الدوال ذات مشتقة شوارزية السالبة ($S\,F(X) < 0$) تحتل مكانة خاصة في نظرية الأنظمة الديناميكية في البعد الأول . فكما سنرى لاحقا في هذا الفصل و الفصل الثالث فأن مشتقة شوارزية السالبة تتضمن خصائص مهمة مثل :

1- مبدا الصغرى و العظمى
2- الحفظ تحت التركيب
3- تحديد عدد الدورات الجاذبة وفقا لنظرية سغنر

لذلك من المفيد التعرف على بعض الدوال الشائعة التي تمتلك هذه الخاصية

2.6 مثال 2.1 الدالة اللوجستية

لتكن $f_\mu(X) = \mu X(1-X)$ هي دالة لوجستية حيث $X \epsilon\ [1\ .\ 0]$

$\mu\ \epsilon\ \ [4\ , 0]$

نحسب المشتقات

$$F'\mu(X) = \mu\ (1-2X)$$

$$F''\mu(X) = -2\mu$$

$$F'''\mu(X) = 0$$

بالتعويض في مشتقة شوارزية

$$S\ F'\mu(X) = \frac{F'''\varkappa(X)}{F'\varkappa(X)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x^*)}{F'(x^*)}\right)^2$$

$$S\ F'\mu(X) = \frac{0}{\mu(1-2X)} - \frac{3}{2}\left(\frac{-2^\mu}{\mu_{(1-2x)}}\right)^2$$

$$S\ F'\mu(X) = -\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{(1-2x)}\right)^2$$

$$S\ F'\mu(X) = -\frac{3}{2}\left(\frac{4}{(1-2X)2}\right)$$

$$S\ F'\mu(X) = -\left(\frac{6}{(1-2X)2}\right)$$

النتيجة $S\,F'\mu(X) < 0$ لجميع $X \neq 0$ عند النقطة الحرجة $X = \frac{1}{2}$ نجد ان $F'\mu(\frac{1}{2}) = 0$ و تكون مشتقة شوازية غير معرفة و لكنها تؤول $-\infty$. و هي حالة خاصة من السالبية .

2.7 مثال الدالة الاسية

لتكن $f(X) = e^x$ المشتقات هي

$$f'(X) = e^x, \quad f(X) = e^x, \quad f'''(X) = e^x$$

بالتعويض في تعريف مشتقة شوارزية :

$$S\,F(X) = \frac{e^x}{e^x} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^x}{e^x}\right)\ 2$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\,(1)^2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$S(e^x) = -\frac{1}{2} < 0$$

النتيجة الدالة الاسية تمتلك المشتقة الشوارزية سالبة و ثابتة لا تعتمد على x.

سنعرض خاصية التركيب :

2.8 نظرية : افترض ان $S\,F < 0$ و $S\,g < 0$ فأن $S(f\circ g) < 0$.

البرهان : باستخدام قاعدة السلسلة , نحسب أن :

$$(f\circ g)''(x) = f''(g(x)).(g'(x))^2 + f'(g(x)).g''(x)$$

$$(f\circ g)'''(x) = f'''(g(x)).(g'(x))^3 + 3f''(g(x)).g''(x).g'x + f'(g(x)).g'''(x)$$

و يترتب على ذلك :

$$S(f\circ g)(x) = Sf(g(x)).(g'(x))^2 + S\,g(x)$$

و بالتالي : $S(f\circ g)(x) > 0$

النتيجة المباشرة :

اذا كان $Sf < 0$, فأن SF<0 لكل n > 1

2.9 مثال : لتكن $f(x) = -x$, $g(x) = x^3$

$$Sf(x) = -\frac{1}{2} \quad , Sg(x) = -\frac{3}{2x^2}$$

$$S(f\,o\,g)(x) = Sf(g(x)).(g'(x))^2 + Sg(x)$$

$$S(f\,o\,g)(x) = \left(-\frac{1}{2}\right).(3X^2)^2 + \left(-\frac{3}{2x^2}\right)$$

$$S(f\,o\,g)(x) = -\frac{9x^4}{2} - \frac{3}{2x^2} < 0$$

2.10 نظرية مبدأ الصغرى و العظمى (*max – min principle*)

إذا كانت $Sf < 0$ فأن $f'(x)$ لا يمكن ان تكون لها صغرى محلية او عظمى محلية سالبة .

البرهان : نفترض ان x نقطة حرجة للمشتقة $f'(x)$ أي ان $f''(x) = 0$, $f'(x) \neq 0$ بما ان $f(x) < 0$ فأن

$\frac{F'''(x_0)}{F''(x_0)} < 0$ أي ان $f'''(x_\circ)$ و $f'(x_\circ)$ لهما اشارتان متعاكستان و بالتالي اذا كان $f'(x_\circ) > 0$ فأن

$f'''(x_\circ) < 0$ مما يعني ان منحنى f' مقعر للأسفل عند النقطة $(x_\circ, f'(x_\circ))$ اذا f' لا يمكن ان تكون لها صغرى محلية موجبة عند $x_\circ$ و تبين ان f' لا يمكن ان تكون لها عظمى محلية سالبة عند $x_\circ$.

النتيجة يترتب على ذلك ان بين أي نقطتين حرجتين متتاليتين لـ f' لا بد ان يعبر منحنى $f'(x_\circ)$ محور x على وجه الخصوص , لا بد من وجود نقطة حرجة لـ f بين هاتين النقطتين .

البند الثالث

تطبيقات المشتقة الشوارزية

في هذا الفصل ننتقل الى التطبيقات العملية للمشتقة الشوارزية التي من اهم تطبيقاتها معالجة ظاهرة التذبذب و نظرية سغنر و التي تعطي حدا اعلى لعدد الدورات الدورية الجاذبة بدلالة عدد النقاط الحرجة بشرط ان تكون مشتقة شوارزية سالبة .

3.1 ظهور التذبذب في المشتقة الأولى و معالجته بأستخدام مشتقة الشوارزية :

في حالة $F'(X^*) = -1$ فأن التقريب الخطي يعطى : $F(X) = X^* - (X - X^*)$

و هذا يعني ان التكرار الأول يعكس المسافة عن X^* , فأن التكرار الأول ينقلنا الى اليسار و التكرار الثاني يعيدنا الى اليمين و هكذا , هذا السلوك يعرف بالتذبذب . (Oscillabion) حيث ينتقل المدار بين جانبي النقطة الثابتة مع التكرار .

3.2 : ملاحظة:

لماذا يحدث التذبذب عندما $F'(X^*) = -1$:

لنأخذ نقطة $X°$ قريبة جدا من X^* جهة اليمين أي $X° < X^*$ التقريب الخطي يعطي :

$$F(X°) = X^* + F'(X^*) (X° - X^*) = X^* + (-1) (X° - X^*) = X^* - (X° - X^*)$$

ماذا يعني هذا :

1- اذا كانت $X°$ على يمين X^* أي $(X^* - X° > 0)$ فان :

X^* يسار النقطة = كمية موجبة - $F(X°) = X^*$

أي ان التكرار الأول ينقل النقطة من اليمين الى اليسار

2- ماذا يحدث في التكرارالثاني :

نطبق F مرة أخرى على $F(X^{o}) = X_1$ التي هي الان على اليسار من X^* :

$F(X_1) = X^* + F'(X^*)(X_1 - X^*) = X^* + (-1)$ (كمية سالبة)

$= X^* +$ (كمية موجبة)

النتيجة : المدار ينتقل بهذا الشكل

X^{o} (يمين) → X_1 (يسار) → X_2 (يمين) → X_3 (يسار)

3.3 مثال عددي عن التذبذب

$F(X) = -X$

النقطة الثابتة $X^* = 0$

$F'(0) = -1$

نجرب $X^{o} = 0.5$

يسار $X_1 = F(0.50) = -0.5$

$X_2 = F(-0.50) = 0.5$

$F(0.50) = -0.5$

المدار هنا : 0.5 , 0.5- , 0.5 , 0.5- , ... (تذبذب تام دون تقارب)

3.4 ملاحظة:

المشكلة: مصير التذبذب غير معروف

السؤال الذي يطرح نفسه: ما الذي يحدد مصير هذا التذبذب؟ هل يتلاشى ويتقارب نحو x^* أم يتزايد ويبتعد عنها؟هذا السؤال لم تستطع المشتقة الأولى وحدها الإجابة عليه، لأنها أعطت قيمة 1- وهي حالة حرجة لا تحدد الاستقرار.

الحل: المشتقة الشوارزية

هنا يأتي دور مشتقة شوارزيان كأداة حاسمة. فقد أثبتت نظرية شوارزية (معيار الاستقرار) أن:

- إذا كان $Sf(x^*) < 0$ ، فإن التذبذب يتلاشى وتكون النقطة جاذبة بشكل مقارب.

- إذا كان $Sf(x^*) > 0$ ، فإن التذبذب يتزايد وتكون النقطة غير مستقرة (نافرة).

3.5 مثال على التذبذب المتلاشي (جاذب)

لتكن $f(x) = -x + x^3$. النقطة الثابتة هي $x^* = 0$ و $f'(0) = -1$. نحسب مشتقة شوارزيان:

$Sf(0) = -6 < 0$

نبدأ من $x_0 = 0.5$:

$x_1 = -0.375, \quad x_2 = 0.3223, \quad x_3 = -0.2888$

المدار يتذبذب لكنه يتقارب نحو الصفر (جاذب).

3.6 مثال على التذبذب المتزايد (نافر)

لتكن $f(x) = -x - x^3$. النقطة الثابتة هي $x^* = 0$ و $f'(0) = -1$. نحسب مشتقة شوارزيان:

$Sf(0) = 6 > 0$

نبدأ من $x_0 = 0.3$:

$x_1 = -0.327, \quad x_2 = 0.362, \quad x_3 = -0.410,$

المدار يتذبذب لكنه يبتعد عن الصفر (نافر).

خلاصة القسم :

بهذا المعيار البسيط، استطاعت مشتقة شوارزيان أن تحسم مسألة التذبذب التي عجزت المشتقة الأولى عن تفسيرها، مما جعلها أداة لا غنى عنها في تحليل استقرار النقاط الثابتة غير الزائدية.

3.7 نظرية سغنر :

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة J , و لنفترض ان $J \subseteq f(j)$ (أي أن الدالة تحول الفترة إلى فترة جزئية منها). افترض أن المشتقة الشوارزية السالبة في كل نقطة ($Sf < 0$)، وأن f لها n نقطة حرجة. عندئذ، f لها على الأكثر $n + 2$ دورة دورية جاذبة.

البرهان :

لتكن $J = [A, B]$ ، حيث $-\infty < A < B < \infty$. لنفترض أن p نقطة ثابتة جاذبة لـ f . إذا كانت p تنتمي إلى دورة ذات فترة m ، فإننا ندرس الدالة $g = f^m$ بدلاً من f ، لأن p تصبح نقطة ثابتة جاذبة لـ g .

لتكن (L, R) أكبر فترة مفتوحة حول p تنجذب جميع نقاطها إلى p تحت تأثير تكرارات g . (نسمح بإمكانية أن $L = -\infty$ أو $R = \infty$ أو كليهما). إذا كانت L و R منتهيتين، فبما أن g متصلة والفترة (L, R) هي أكبر فترة بهذه الخاصية، فإن نهاياتها L و R إما أن تكون نقطتين ثابتتين لـ g ، أو تتبادلان الأدوار تحت تأثير g . أي أن:

- إما $g(L) = L$ و $g(R) = R$
- أو $g(L) = R$ و $g(R) = L$
- أو $g(L) = g(R)$

سنبين أنه في كل حالة توجد نقطة حرجة لـ g تنجذب إلى p ، وبالتالي نقطة حرجة لـ f تنجذب إلى مدار p .

الحالة الأولى: $g(L) = L$ و $g(R) = R$

بما أن p نقطة ثابتة جاذبة لـ g ، فإنه حسب نظرية 1.6 يكون $|g'(p)| < 1$. كذلك، من فرض $Sf < 0$ وبما أن $Sg < 0$ (لأن سالبية المشتقة الشوارزية محفوظة تحت التركيب)، اذا جعلنا $a = L$ و $b = p$ نستنتج وجود نقطة حرجة x^* للدالة g داخل الفترة (L, R) .

الآن، من تعريف $g = f^m$ نحصل على:

$$g'(x^*) = (f^m)'(x^*) = f'(f^{m-1}(x^*)) \dots f'(f(x^*)) \,.\, f'(x^*) = 0$$

لذلك، إحدى النقاط $x^*, f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{m-1}(x^*)$ هي نقطة حرجة للدالة الأصلية f . و بما أن x^* تقع في (L, R) و تنجذب (بتكرارات g) إلى p ، فإن جميع تكراراتها تنجذب إلى p تحت g . وبالتالي، f تمتلك نقطة حرجة تنجذب (بتكرارات f) إلى مدار p .

الحالة الثانية: $g(L) = R$ و $g(R) = L$

في هذه الحالة، ننتقل إلى دراسة g^2 . نلاحظ أن:

- $g^2(L) = L$ و $g^2(R) = R$
- p نقطة ثابتة جاذبة لـ g^2

بتطبيق الحالة الأولى على g^2 ، نجد نقطة حرجة x^* في الفترة (L, R) تنجذب (بتكرارات g) إلى p . الآن نحسب المشتقة:

$$(g^2)'(x^*) = g'(g(x^*)) \dots g'(x^*) = 0$$

وبالتالي، إما x^* أو $g(x^*)$ هي نقطة حرجة لـ g . وبتطبيق نفس المنطق المستخدم في الحالة الأولى، نجد أن أحد تكرارات x^* (بالنسبة لـ f) هو نقطة حرجة لـ f تنجذب إلى مدار p .

الحالة الثالثة : إذا كان $g(L) = g(R)$

فبمبرهنة القيمة المتوسطة توجد x^* في الفترة (L, R) بحيث $g'(x^*) = 0$ ، مما يعني أن x^* نقطة حرجة لـ g . مرة أخرى، بعض التكرارات يجب أن تكون نقطة حرجة لـ f ، ولكن يجب أيضاً أن تنجذب إلى مدار p .

الاستنتاج :

في كل من الحالات 1–3، توجد نقطة حرجة لـ f تنجذب إلى مدار p . بما أن النقطة الحرجة يمكن أن تنجذب إلى مدار واحد على الأكثر، وبما أنه حسب الفرض هناك n نقطة حرجة، نستنتج أن هناك على الأكثر n مداراً دورياً جاذباً مرتبطاً بفترات من الشكل (L, R) داخل J . المدارات المرتبطة بفترات من الشكل (A, R) أو (L, B) تضيف على الأكثر دورتين جاذبتين إضافيتين، مما يجعل العدد الأقصى الممكن للدورات الجاذبة هو $n + 2$.

3.8 نتيجة للحالات الثلاثة :

لتكن $4 > \mu > 0$. كل دالة في العائلة التربيعية $\{ Q_\mu \}$ لها على الأكثر دورة جاذبة واحدة.

البرهان :

إذا كان $1 > \mu > 0$، فإن مجال جذب 0 هو [0, 1)، لذا 0 هي النقطة الدورية الجاذبة الوحيدة. لبقية البرهان، افترض أن $4 > \mu > 1$. بما أن Q_μ لها النقطة الحرجة الوحيدة 2/1 ، فإن نظرية سغنر تعني أنه يمكن أن يكون هناك على الأكثر 3 دورات جاذبة، واحدة لكل فترة من الشكل [0, L)

((L, R)، و (R, L). بما أن 0 نقطة ثابتة نافرة و بما أن $Q_\mu(1) = 0$ ، فإن لا ([0, L و لا (R, L) تظهر كمجال جذب لدورات Q_μ . وبالتالي، Q_μ لها على الأكثر دورة جاذبة واحدة.

3.9 مثال :

لتكن $f(x) = 1 - x^2 - x^{14}$ لـ $0 \leq x \leq 1$ (انظر الشكل 1.46). تحقق من أن f لها على الأكثر نقطة ثابتة جاذبة واحدة و لكن أيضاً دورة جاذبة من الرتبة 2 في الفترة [0, 1). حيث أن

$f(x) > 0$ لبعض x في (0, 1).

كما يلي :

إذا كان $x^* = 0.72861$ ، فإن حساباً روتينياً يظهر أن x^* نقطة ثابتة جاذبة لـ f ، وأن

$Sf(x^*) > 0$. بالإضافة إلى ذلك، {0, 1} هي دورة من الرتبة 2 جاذبة لأن

$(f^2)'(0) = f'(1)\, f'(0) = 0$.

نختتم مناقشة الدورات الجاذبة بملاحظة ذكرها سغنر

لنفترض أن جماعة سكانية في توازن مستقر يمكن أن يكون ثابتاً (يمثله نقطة ثابتة) أو يمكن أن يتضمن تذبذبات (وبالتالي دورات). نظرية سغنر تعني أنه إذا كان التوازن المستقر، مثلاً، ثابتاً، فإنه بتغيير حجم السكان (أي قيمة x)، لا يمكن أن يتغير نوع التوازن المستقر

📘 الخاتمة

في هذا البحث، قمنا بدراسة تحليلية لمشتقة شوارزيان وأهميتها في تحديد استقرار النقاط الثابتة غير الزائدية في الأنظمة الديناميكية أحادية البعد.

أولاً: ملخص ما تم إنجازه

في البند الأول:

قدمنا تعريف النقاط الثابتة وتصنيفها الديناميكي (جاذبة، نافرة، حيادية). ثم عرضنا نظرية الاستقرار الخطي التي تعتمد على المشتقة الأولى، وبيّنا حدود هذه النظرية عند النقاط غير الزائدية حيث $|f'(x^*)| = 1$. حيث لا تستطيع المشتقة الأولى تحديد طبيعة استقرارها لذلك احتجنا أداة رياضية اكثر تقدما و مشتقات عليا و هي مشتقة الشوارزية كما بينا في البند الثاني .

في البند الثاني :

عرّفنا المشتقة الشوارزية بالشكل:

$$S F'(X) = \frac{F'''(X)}{F'(X)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(X)}{F'(X)}\right]^2$$

واستعرضنا أهم خصائصها: قاعدة التركيب التي تضمن أن $Sfn < 0$ إذا كان $Sf < 0$ ، ومبدأ الصغرى والعظمى الذي يضع قيوداً على سلوك المشتقة الأولى. ثم قدمنا معيار الاستقرار الذي ينص على أنه إذا كانت $f'(x^*) = -1$ و $Sf(x^*) < 0$ فإن النقطة جاذبة، وإذا كانت $Sf(x^*) > 0$ فإنها غير مستقرة.

في البند الثالث :

طبقنا هذه الأداة على أهم النتائج في هذا المجال، وهي نظرية سغنر التي تنص على أنه إذا كانت $Sf < 0$ وكان للدالة f عدد n من النقاط الحرجة، فإن لها على الأكثر $n + 2$ دورة دورية جاذبة. ثم حللنا الدالة اللوجستية كحالة دراسية رئيسية، وأثبتنا أنها عند $\mu = 4$ تمتلك على الأكثر دورة جاذبة واحدة

ثانياً: النتائج الرئيسية

1. المشتقة الشوارزية هي أداة رياضية قوية تتجاوز حدود المشتقة الأولى في تحليل استقرار النقاط الثابتة غير الزائدية .

2. سالبية مشتقة شوارزيان ($Sf < 0$) تضمن خصائص مهمة مثل الحفظ تحت التركيب ومبدأ الصغرى والعظمى.

3. نظرية سغنر تربط بين عدد النقاط الحرجة وعدد الدورات الجاذبة ($n + 2$)، وتشمل النقاط غير الزائدية أيضاً.

4. الدالة اللوجستية عند $\mu = 4$ تحتوي على الأكثر دورة جاذبة واحدة ،

ثالثاً: إمكانية التوسع المستقبلي

يمكن توسيع هذا البحث في عدة اتجاهات :

1. دراسة الأنظمة العقدية، حيث تلعب مشتقة شوارزية دوراً مهماً في تحليل مجموعات جوليا ومجموعات ماندلبروت .

2. تطبيق نظرية سغنر على دوال أخرى ذات مشتقة شوارزية سالبة، مثل الدوال المثلثية والدوال الأسية.

3. دراسة التشعبات في الدالة اللوجستية باستخدام مشتقة شوارزية .

4. تحليل الأنظمة ثنائية الأبعاد وما إذا كان يمكن تعميم مفهوم مشتقة شوارزية عليها .

رابعاً: ختاماً

في نهاية هذا البحث، أتقدم بالشكر الجزيل إلى الله تعالى أولاً وآخراً، ثم إلى أستاذي المشرف وإلى كل من ساعدني في إنجاز هذا العمل. أسأل الله أن يكون هذا البحث عوناً للباحثين والطلاب في فهم مشتقة شوارزية ودورها في تحليل الأنظمة الديناميية.

و الحمد لله رب العالمين

المصادر :

[1] Elaydi, S. N. (2000). Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering (2nd ed.). Chapman & Hall/CRC.

[2]Singer, D. (1978). Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. SIAM Journal on Applied Mathematics, 35(2), 260-267.

[3]Devaney, R. L. (1989). An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (2nd ed.). Addison-Wesley.

[4]Gulick, D. (2012). Encounters with Chaos and Fractals (2nd ed.). CRC Press, Taylor & Francis Group.