جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث والعلمي
جامعـــة بــابــل
كليـــة التربية / للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعادلات الثابتة

بحث مقدم الى
مجلس كلية التربية/ جامعة بابل/ كجزء من متطلبات
نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

من قبل الطالبة
فاطمة جلال عبد الأمير

بأشراف
م. ندى محمد عباس

2023-2022

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ﴾

صدق الله العظيم

(المجادلة: الآية ١١)

الشكر والتقدير

الى كل من علمني حرفاً وأخذ في يدي في سبيل تحصيل العلم والمعرفة.

ومن حق النعمة الذكر وأقل جزاء للمعروف الشكر وبعد شكر الله أتقدم بشكري الى من وجهني وعلمني وساعدني في انجاز بحثي وأخص بذلك استاذتي ومشرفتي م.ندى محمد عباس التي تابعتني في جميع مراحل بحثي وأمدتني بالإرشاد والنصح.

كما أتقدم بكل أيات الشكر والأمتنان والتقدير الى الذين مهدو لنا طريق العلم والمعرفة والى جميع اساتذتنا الأفاضل.

الإهداء

الى من تعهداني بالتربية في الصغر وكانا لي نبراساً يضيئ بالنصح والتوجيه الـــى

أمـــي وأبـــي

الى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البرئية رياحين حياتي

أخـــوتـــي

والى دماء الشهداء تلك الأرواح الطاهرة التي ضحت بحياتها من أجل الوطن.

قائمة المحتويات

المقدمة

من أهم فروع الرياضيات قديماً وحديثاً هو فرع المعادلات التفاضلية التي تعتبر عصب معظم العلوم النشطة إن لم نقل كلها، حيث نجد العديد من المسائل في مجال الهندسة والعلوم الفيزيائية والاجتماعية تصاغ رياضياً على شكل معادلات تفاضلية، ولمعرفة طرق ايجاد هذه الحلول وجب علينا تصنيفها الى عادية وخطية من جهة والى متجانسة من جهة أخرى، بالإضافة الى تطبيقات اخرى سيتم التطرق اليها كلاً على حدا.

ويتضمن هذا البحث فصلان:-

الفصل الاول:- خصص هذا الفصل لعرض بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية التي نحتاجها في الفصل الثاني مثل: تعريف المعادلة التفاضلية وتصنيفها من حيث الدرجة والرتبة، ومفهوم الحل العام والحل الخاص والحل الشاذ (المفرد) والحل الكامل وتكوين المعادلة التفاضلية، ودراسة بعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى والرتبة الاولى مثل فصل المتغيرات، حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الاولى والمعادلة الخطية.

كما تطرقنا لتعريف المعادلة التفاضلية من الرتب العليا والمؤثر التفاضلي.

الفصل الثاني:- خصص هذا الفصل لدراسة الاستقلال الخطي وطرق حل المعادلات المتجانسة من الرتبة الثانية ومعادلة أويلر.

الفصل الاول

بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية

للمعادلة التفاضلية

الفصل الاول

بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية للمعادلة التفاضلية

تعريف (1-1): المعادلة التفاضلية (Differenrial Equation).[1]

هـي علاقـة بـين المتغيـر التـابع ولـيكن Y والمتغيـر المسـتقل ولـيكن Xتـدخل فيهـا المشتقات او التفاضلات وتسمى:

المعادلـة التفاضـلية العاديـة (Ordinary Differential Equation): اذا كـان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد، وبالتالي لا تحتوي الاعلى مشتقات عادية.

وكمثال على ذلك:-

1. $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$
2. $x\frac{d^3y}{dx^3} + (2Sinx)\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}.\frac{dy}{dx} + y = 0$
4. $(x - y)dx + (x + y)dx = 0$

تعريف (1-2): رتبة المعادلة التفاضلية(Order of Differential Equation).[4]

اذا كانت المشتقة النونية $(Y)^n$ هي أعلى مشتقة تظهر المعادلة التفاضلية العادية، قيل ان هذه المعادلة من الرتبة n (تحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها).

من الأمثلة السابقة:-

- المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى.
- المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة.
- المعادلة التفاضلية (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية.
- المعادلة التفاضلية (4) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى.

تعريف (1-3): درجة المعادلة التفاضلية (Degree of Differential Equation).[2]

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية وقبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات.

من الامثلة السابقة:- نلاحظ أن

المعادلة (1) و(2) و(3) و(4) هي معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الأولى بينما المعادلة:-

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x SinX$$

هي معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثالثة.

ملاحظة (1-1): [6]

هناك بعض المعادلات التي لا يمكن تحديد درجتها إلا بعد وضعها على صورة خالية من الجذور.

فمثلاً:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$$

بتربيع الطرفين:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(-3\frac{d^2y}{dx^2} - xy\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2$$

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2 - 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

واصبحت هذه المعادلة معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثانية والرتبة الثانية.

تعريف (1-4) الثابت الاختياري(Arbitrary Constant):[3]

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلة التفاضلية ويكون الثابت اختيارياً اذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التابع أو المتغير المستقل وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبيرها جوهرية اذا أمكن دمج احدهما في ثابت اخر وكمثال على ذلك.

مثال (1-1): [3]

اذا كانت $T_{(x)} = Ae^{-x+B}$ فأنه يمكن دمج الثابتين A,B في ثابت جوهري واحد وهو C

$$T_{(x)} = Ae^{-x^2+B} = Ae^B.e^{-x^2} = ce^{-x^2}$$

حيث: $c = Ae^B$

تعريف (1-5) حل المعادلة التفاضلية (Solution of Differential Equation):[1]

هو أي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة تحقق الشروط التالية:

1) خالية من المشتقات.
2) معرفة على فترة معينة.
3) تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال (1-2): [6]

نلاحظ ان الصيغة التالية $y(x) = cSinX$

هي حلاً للمعادلة $\bar{\bar{y}} + y = 0$ حيث c ثابت اختياري.

لأن

$$y(x) = cSinX$$

$$\acute{y}(x) = cosX$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = \bar{c}SinX$$

وعلى ذلك نجد ان: $\bar{\bar{y}}(x) + y = -c\sin x + c\sin x = 0$

تعريف (1-6) : الحل العام (General Solution):[2]

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية بعدد رتبة المشتقة.

مثال (1-3): [3]

الحل العام للمعادلة التفاضلية $\acute{\acute{y}} - 5\acute{y} + 6y = 0$ هو

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

حيث c_1 , c_2, c_3 ثوابت اختيارية

تعريف (1-7) الحل الخاص (Particular Solution):[8]

هو الحل الذي يمكن استنتاجه من الحل العام بعد ايجاد قيمة الثوابت الاختيارية.

مثال (1-4): [2]

لايجاد الحل الخاص من المعادلة التفاضلية $\bar{y} = 2x$ عندما $y(1) = 0$

كما يلي :- لتكن $\bar{y} = 2x$ فأن

$$y = 2x \implies \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\implies dy = 2xdx$$

$$\int dy = \int 2x\, dy \implies y = x^2 + c_1$$

$$o = (1)^2 + c_1 \implies c_1 = -1$$

تعريف (1-8) الحل الشاذ (المنفرد) (Singular Solution):[6]

هو الحل الذي لا يمكن استنتاجه من الحل العام

مثال (1-5)

المعادلة $y = cx + \frac{c^2}{2}$ تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = y\acute{y} + \frac{y^2}{2}$ ، بينما $y = \frac{y^2}{2}$ تمثل الحل الشاذ (المنفرد) بها.

تعريف (1-9) الحل الكامل (Complete Solution):[4]

اذا تضمن حل عام للمعادلة التفاضلية كل الحلول لهذه المعادلة فهو حل كامل.

ملاحظات (1-2):

1- قد يكون للمعادلة التفاضلية حل وحيد وقد يوجد لها حلول عديدة وقد لا يوجد لها حل على الاطلاق.

2- من الممكن ان يكون الحل في الصورة الصريحة $y = f(x)$ ومن الممكن ان يكون الحل في الصورة الضمنية $f(x, y) = 0$ ومن الممكن ان يكون الحل في الصورة البارامترية $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

تكوين المعادلة التفاضلية:[5]

اذا كان الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n، نجد ان ذلك الحل يعتمد n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \dots . (1)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت إختيارية، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى تجري n من المشتقات للمعادلة (1).

ويكون لدينا n+1 من المعادلات عبارة عن المعادلة (1) بالأضافة الى n معادلة من العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

وبصفة عامة يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية من الحل العام، وبذلك عن طريق الاشتقاق ، وعدد الثوابت المحذوفة يحدد رتبة المعادلة التفاضلية.

* لإيجاد المعادلة التفاضلية اذا علم مجموعة الحل العام، تتضمن الطريقة في ملاحظة العلاقة بين عدد الثوابت الاختيارية في مجموعة الحل العام ورتبة المعادلة التفاضلية.

مثال (1-6): [5]

اذا كان الحل العام للمعادلة $y = c\ sinx$

حيث c ثابت اختياري.

وكانت $\acute{y}$ هي

$$y = c\sin X \ldots .(1)$$

$$y = c\cos X \ldots .(2)$$

بحذف الثابت الاختياري c من المعادلتين (1) و (2) ونقسم معادلة (2) على (1) فتكون

المعادلة المطلوبة $\frac{\acute{y}}{y} = y\cot X \implies \acute{y} = y\cot X$

مثال (1-7):

اذا كانت المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = Ax^2 + BX + C$$

حيث A. B. C ثابت اختيارية.

فأن المعادلة التفاضلية $\acute{\acute{\acute{y}}} = 0$ هي المعادلة

$$\acute{y} = 2AX + B$$

$$\acute{\acute{y}} = 2A$$

$$\acute{\acute{\acute{y}}} = 0$$

نلاحظ ان المعادلة المطلوبة $\acute{\acute{y}} = 0$ خالية.

من الثوابت الاختيارية وفي المرتبة الملائمة فهي اذن المعادلة المطلوبة.

مثال (1-8): [4]

لايجاد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

حيث c_1 , c_2 ثابت اختياري.

نشتق او نفاضل المعادلة (1) مرتين

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \dots (1)$$

$$\acute{y} = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} \dots (2)$$

$$\acute{\acute{y}} = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} \dots (3)$$

ضرب المعادلة (2) في 2 وبعملية الطرح معادلة (2) من معادلة (3) نحصل

$$2\acute{y} = 2c_1e^{2x} + 6c_2e^{3x} \dots (2)$$

$$\acute{\acute{y}} = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} \dots (3)$$

$$\acute{\acute{y}} - 2\acute{y} = 3c_2e^{3x} \implies c_2e^{3x} = \frac{\acute{\acute{y}} - 2\acute{y}}{3} \dots . (4)$$

ضرب المعادلة (2) في (3) وطرح المعادلة (3) من المعادلة (2) نحصل

$$3\acute{y} - \acute{\acute{y}} = 2c_1e^{2x}$$

$$c_1e^{2x} = \frac{3\acute{y} - \acute{\acute{y}}}{2} \dots (5)$$

بتعويض عن قيمة c_2e^{3x} و c_1e^{2x} في المعادلة (1)

$$y = \frac{3\acute{y} - \acute{\acute{y}}}{2} + \frac{\acute{\acute{y}} - 2\acute{y}}{3}$$

$$y = \frac{9\acute{y} - 3\acute{\acute{y}} + 2\acute{\acute{y}} - 4\acute{y}}{6} \Longrightarrow 6y = 5\acute{y} - \acute{\acute{y}}$$

$$\therefore \acute{\acute{y}} - 5\acute{y} + 6y = 0$$

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى (Differential Equation of the first order and Degree)

ان الشكل العام لمعادلة الرتبة الأولى والدرجة الأولى هو

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

أو $M(x, y)dy + N9x, y)dy = 0$

تقسم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى الى الأنواع التالية:-

1- طريقة فصل المتغيرات.
2- المعادلات التفاضلية الخطية.
3- المعادلات التفاضلية المتجانسة.

أولاً: طريقة فصل المتغيرات (Sefaration of Variables)[2]

المعادلـــــــــــــــة التفاضـــــــــــــــلية $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

تحول بعد فصل المتغيرات الى الشكل التالي:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

أي تم فصل المتغير X التفاضل له dx عن المتغير Y والتفاضل له dy لاجل اجراء عملية التكامل.

بعد التكامل تصبح بالشكل التالي:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = c$$

الذي يمثل حل للمعادلة التفاضلية المطلوبة .

حيث Cهو ثابت اختياري، يمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط الحل العام.

- اذا اعطي شرط ابتدائي نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً.

مثال (1-9): [6]

لايجاد الحل العام والمنحني الخاص الذي يمر بالنقطة (0،0) للمعادلة التفاضلية

$$e^x \cos y\, dx + (1 + e^x) \sin y\, dx$$

فأنه يكون بفصل المتغيرات وذلك بقسمة طرفي المعادلة على $\cos y\ (1 + e^x)$ نحل

$$\frac{e^x}{1+e^x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = c$$

بالتكامل المباشر $\therefore \ln(1 + e^x) - \ln|cosy| = \ln c$

$$\therefore\ \ln\left[\frac{(1 + e^x)}{(\cos y)}\right] = \ln c$$

وبذلك يكون الحل العام هو

$$1 + e^x = c|\cos y|$$

بالتعويض عن $x = 0\, , y = 0$ فأن

$$C = 2$$

ويكون الحل الخاص هو

$$1 + e^x = 2|\cos y|$$

ثانياً- المعادلة التفاضلية الخطية [1]

تسمى المعادلة التفاضلية خطية اذا كان المتغير المعتمد وجميع المشتقات التي تظهر قيمها من الدرجة الأولى. وغير مضروبة ببعضها.

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

وتسمى خطية في y

مثال (1-10): [2]

$$x^2\acute{\acute{y}} + x\acute{y} + x^2 y = e^x \sin x$$

هي معادلة تفاضلية خطية حيث ان كل من المتغير التابع (y) ومشتقاته $\acute{\acute{y}}, \acute{y}$ خطية أي كل منهما مرفوع للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة بينهما ولا يهم ان تكون معاملاتها ثوابت او دوال في X.

اذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فانها معادلة تفاضلية لا خطية.

مثال (1-11): [5]

المعادلات التفاضلية التالية معادلات تفاضلية لا خطية .

1- $y\acute{\acute{y}} + \acute{y} = x$

2- $\acute{y} + x\sqrt{y} = sinx$

3- $\acute{\acute{\acute{y}}} + x^2\acute{\acute{y}} + \sin y = 0$

ثالثاً- المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى(Homogeneous of Differential Equation).

يقال عن الدالة $f(x,y)$ انها دالة متجانسة من الدرجة n

اذا كان $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

ويتحقق ذلك اذا كان كل حد من حدود $f(x,y)$ نفس الدرجة في المتغير x, y

مثال (1-12): [1]

لأختبار تجانس الدالة $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y}}$

الحل/ فأن

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{\frac{3}{2}} f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة $\frac{3}{2}$

مثال (1-13) : [5]

اختبر تجانس الدالة $f(x\lambda)=\sqrt{3x+y^3}$

الحل/

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{3\lambda x+\lambda y^3}$$

$$=\lambda^{\frac{1}{2}}\sqrt{3x+y^3}\neq\lambda^n f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ ليست دالة متجانسة

مبرهنة (1-1): [2]

اذا كانت الدالتان M(x,y), N(x,y) متجانستان من الدرجة n فأن الدالة $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ تكون متجانسة من الدرجة صفر

البرهان:

$$\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}=\frac{\lambda^n M(x,y)}{\lambda^n N(x,y)}=\lambda^{\circ}\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$\therefore$ الدالة $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ تكون متجانسة من الدرجة صفر

مبرهنة (1-2): [3]

اذا كانت الدالة $f(x,y)$ متجانسة من الدرجة صفر فـأن الدالة $f(x,y$ تكون دالة في المتغير $\frac{y}{x}$

البرهان:

نضع $\boldsymbol{z=\frac{y}{x}}$ وبالتالي تكون $y=xz$

$$\therefore f(x,y)=f(x,xz)=x^{\circ}f(1,z)=f\left[1,\frac{y}{x}\right]=f(\frac{y}{x})$$

حيث X قامت بدور λ في الدالة المتجانسة

$\therefore$ الدالة $f(x,y)$ تكون دالة في المتغير $\frac{y}{x}$

فمثلاً الدالة $f(x,y) = x^3 - x^2y + 2xy^2 + 7y^3$

هي دالة متجانسة من الدرجة (3) وذلك لان

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - (\lambda x)^2(\lambda y) + 2(\lambda x)(\lambda y^2) + 7(\lambda y^3)$$
$$= \lambda^3 f(x,y)$$

- كذلك $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ هي دالة متجانسة من الدرجة صفر لان

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y}\ f(x,y) = \lambda^{\circ}\mathrm{F}(x,y)$$

بناءً على ما تقدم وكامتداد له يقال عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الاولى

$$M(x,y)dx + N(x,y)dx = 0 \ldots (2)$$

انها معادلة متفاضلة متجانسة اذا كانت الدالتين $N(x,y), M(x,y)$ دالة متجانسة من نفس الدرجة.

ويمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

كيفية حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولى. [1]

(Method Solution Homogeneous first- order Differential Equation)

المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولى: هي تلك المعادلة التي تكتب على الصورة

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}\left[\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right]$$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{z} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f(z)$$

$$\therefore f(z) = z + x\frac{dy}{dx}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على الحد العام $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z)-z}$ ثم عن طريق التكامل نحصل

على الحج العام.

مثال (1-14): [6]

لايجاد حل المعادلة التفاضلية $\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0$

فأن يقسمه الطرفين على xdx نحصل على

$$\frac{dx}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{(\frac{y}{x})^2}$$

نضع $z = \frac{y}{x}$ وبالتالي $y = xz$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{z} + \sqrt{1 - z^2}$$

$$\therefore z+\sqrt{1-z^2}=z+x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

$$\therefore \sqrt{1-z^2}=x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$

وبفصل المتغيرات نحصل على $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

والان نضع $z=\frac{y}{x}$ فنحصل على

$$sin^{-1}\frac{y}{x}=\ln x+c$$

تعريف (1-10): المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا[1]

(Linear Differential Equation of the Higher order)

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال انها خطية في المتغير y اذا كان $F(x,y,\acute{y},\acute{\acute{y}},\dots,y^n)$ من الدرجة الاولى وتكون على الصورة العامة:

$$a_0y^n+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y\ +a_n\ =f(x)\ldots$$

حيث $a_0\neq 0$

فإذا كانت جميع المعاملات $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة معادلة خطية ذات معاملات ثابتة (Linear Equation of constant coefficients) اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة في X سميت المعادلة معادلة خطية ذات معاملات متغيرة (Linear Equation of variable t coefficients) وتكون المعادلة (*) خطية متجانسة اذا كانت f(x)=0 بخلاف ذلك تكون معادلة خطية غير متجانسة.

تعريف (1-11): المؤثر التفاضلي (Differential operator)[5]

يستعمل الرمز التفاضلي D للدلالة على عملية تفاضل بالنسبة الى المتغير المستقل فاذا كان المتغير المستقل هو x فأن D تقوم $\frac{d}{dx}$, D^2 تقوم مقام $\frac{d^2}{dx^2}$ وهكذا للمشتقات التي اعلى مرتبة حيث D^r تقوم مقام $\frac{d^r}{dx^r}$ (r عدد صحيح موجب)

$D = \frac{d}{dx}$ اي المشتقة الاولى بالنسبة لـ x

وهذا التعبير $L = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + an$

سمى المؤثر التفاضلي من الرتبة n

كذلك فأن $D^3 = \frac{d^3}{dx^3} D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, D^k = \frac{d^k}{dx^k}$

فمثلاً:-

$$De^{3x} = \frac{d}{dx}e^{3x} = 3e^{3x}$$

$$D^2e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2}e^{3x} = 9e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر التفاضلي:

1) $\mathrm{D}[f_1(x) \mp f_2(x)] = Df_1(x) \mp Df_2(x)$

2) $D(k\, f(x)] = kDf(x)$

3) $f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$

حيث f كثيرة حدود في D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (*) باستخدام المؤثر D على الصورة.

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + an)yf(x)$$

حيث نجد أن:

$$\emptyset(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + an$$

دالة كثيرة حدود في D من الدرجة n.

ولذلك نضع المعادلة (*) على الصورة الرمزية

$$\emptyset(D)y = f(x)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة اما المعادلة

$$\emptyset(D)y = 0$$

فهي معادلة خطية متجانسة

الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية الخطية

من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

اذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ مجموعة من الدوال المتصلة على الفترة المغلقة [a,b] واذا كانت

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0$$

حيث $c_1 = 0\ , c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ ثوابت فإن مجموعة الدوال $y_1, y_2, \dots y_n$

تسمى مجموعة مستقلة خطياً

اما اذا كانت $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ حيث الثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ ليست جميعها أصفار فإن مجموعة الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ تسمى مجموعة مرتبطة خطياً.

واذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ مجموعة من الدوال المتصلة على الفترة المغلقة [a,b] وقابله للإشتقاق $(n-1)$ مرة فإننا نستطيع تعريف محدد الرونسكيان (wronskion)كما يلي:

$$w[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 & & \acute{y}_n \\ \acute{\acute{y}}_1 & \acute{\acute{y}}_2 & & \acute{\acute{y}}_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ {y_1}^{(n-1)} & {y_2}^{(n-1)} & & {y_n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

واذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ مجموعة من الدوال المتصلة على الفترة المغلقة [a,b] وقابله للإشتقاق $(n-1)$ مرة وتحقق المعادلة التفاضلية

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\acute{y}\ + p_n(x)y\ = 0$$

واذا كانت $w[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ لنا فإن مجموعة الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ تكون مستقلة خطياً.

مثال (2−1) : [3]

اذا كانت مجموعة الدوال

$$y_1 = \sin x; \;\; y_2 = \cos x$$

فإن قيمة الرونكسيان لهذه الدوال هي:

$$w[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix} = -1$$

بما أن $w[y_1, y_2] \neq 0$ بالتالي فأن مجموعة الدوال y_1, y_2 مجموعة مستقلة خطياً .

مثال (2−2) : [4]

اذا كانت مجموعة الدوال

$$y_1 = \; x^2 + 2x \quad , \qquad y_2 = \; y^3 + x \, , \quad y_3 = \; 2x^3 - x^2$$

فأن قيمة الرونسكيان لهذه الدوال هي

$$w[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 & \acute{y}_3 \\ \acute{\acute{y}}_1 & \acute{\acute{y}}_2 & \acute{\acute{y}}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + 2x & x^3 + x & 2x^3 + x^2 \\ 2x + 2 & 3x^2 + 1 & 6x^2 - 2x \\ 2 & 6x & 12x - 2 \end{vmatrix} = 0$$

بما أن $w[\, y_1, \; y_2, y_3 \,]$ بالتالي فإن مجموعة الدوال $y_1, \; y_2, y_3$ تكون مجموعة مرتبطة خطياً.

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة [6]

- المعادلة التفاضلية المتجانسة تكتب بالصيغة التالية

$$a\ \frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \dots \dots (1) \quad (2.1)$$

حيث $a\ .\ b.\ c$ ثوابت اختيارية.

ليكن re^{rx} حيث r ثابت هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة لذلك$y = re^{rx}$

لذلك

$$y =\acute{} re^{rx} \qquad \acute{\acute{y}} = r^2 e^{rx}$$

بالتعويض عن $y, \acute{y}, \acute{\acute{y}}$ في المعادلة (1) يكون

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

حيث $e^{rx} \neq 0$ فأن

$$ar^2 + br + c = 0$$

وهي تسمى بالمعادلة المميزة حلها يكون

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تكون قيمتي r متساويتان اذا كانت $b^2 - 4ac = 0$

تكون قيم r حقيقة مختلفة اذا كانت $b^2 - 4ac > 0$

تكون قيم r تخيلية (مترافقة) اذا كانت $b^2 - 4ac < 0$

الحالة الاولى:-

اذا كانت r حقيقة $r_1 \neq r_2$

حيث $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\quad r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

في هذه الحالة يمكن اثبات ان $r_2 = e^{r_2 x}$ $\quad r_1 = e^{r_1 x}$

دوال مستقلة وعلى ذلك هما الحلان الاساسيان للمعادلة التفاضلية (1) كالأتي:

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

$$w(y_1, y_2, x) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x}$$

حيث ان $r_1 - r_2 \neq 0$ لذلك فأن $w \neq 0$ لذلك فأن الحلان مستقلان يكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية كما في المثال التالي.

مثال (3-2) : [4]

لأيجاد الحل العام للمعادلة

$$\acute{\acute{y}} + 5\acute{y} + 6y = 0$$

نفرض ان $y = e^{rx}$ وعلى ذلك

$$\acute{y} = re^{rx} \quad \acute{\acute{y}} = r^2 e^{rx}$$

والمعادلة المميزة بالصورة $r^2 + 5r + 6 = 0$

$$r_1 = -2 \qquad r_2 = -3$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

<u>الحالة الثانية</u>:- اذا كانت $b^2 - 4ac = 0$ فأن

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

وعلى ذلك يكون احد الحلول هو $y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x}$

ولايجاد الحل الثاني والذي يكون مستقل خطياً عن y_1 هو

$$w(y_1, y_2, x) = e^{-\int \frac{b}{a} dx} = e^{\frac{-b}{a}x}$$

يكون

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{w}{{y_1}^2} dy = y_1 \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{a}x}} dx$$

$$= y_1 \int dx = x y_1(x) = x e^{\frac{-b}{a}x}$$

لذلك فأن الحل العام يكون بالصورة

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 x y_1$$
$$= (c_1 + c_2 x) y_1$$

مثال (2-4)[1] لايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\boldsymbol{\acute{\acute{y}} + 4\acute{y} + 4y = 0}$$

التي معادلتها المميزة هي

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
$$(r + 2)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = -2$$
$$y_1(x) = e^{-2x}$$

يكون الحل العام لها بالصورة $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$

<u>الحالة الثالثة</u>:- اذا كانت $b^2-4ac=0$

فأن جذري المعادلة المميزة في هذه الحالة هما جذران مركبان مترافقان (او ذلك لان a.b.c ثوابت حقيقة) ونفرض انهما على الصورة

$$r_1=\lambda+i\mu \quad , \quad r_2=\lambda-i\mu$$

حيث λ,μ كميات حقيقة $i=\sqrt{-1}$

والان نترك ذلك جانباً سوف تعود لـ $r_1\,,r_2$ ولنبدأ بتعريف الدالة.

$$f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta \ \rightarrow [2.2]$$

يلاحظ ان يتفاضل [2.2] بالنسبة الى (θ) يكون $f(0)=1$

$$\frac{df}{d\theta}=-\sin\theta+icos$$
$$=i(cos\theta+isin\theta)$$
$$=if$$
$$\frac{df}{f}=id\theta$$

باجراء تكامل للطرفين يكون

$$\ln f=i\theta+c$$

حيث ان $\theta=0$ عندما f=1 ومنها فأن c=0 وعلى ذلك يكون

$$lnf=i\theta$$
$$\therefore f(\theta)=cos\theta+isin\theta=\ e^{i\theta}$$

والعلاقة الاخيرة تسمى بصيغة أويلر Euler’s Formula وعلى ذلك يكون

$$cosx+isinx=e^{ix}$$
$$cosx-isinx=e^{-ix}$$

بالجمع والطرح يكون

$$cosx = \frac{1}{2}\left(e^{ix}, e^{-ix}\right), \qquad sinx = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

نعود الان للمعادلة المميزة التي جذراها r_1, r_2 فأن الحلان للمعادلة التفاضلية ها

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\lambda x + i\mu x}$$

$$y_2 = e^{\lambda x - i\mu x}$$

ولكي ينبني ان هذان الحلان مستقلان فأن:

$$w(y_1, y_2, x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_1 - r_2)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

لذا $r_1 \neq r_2$ وعلى ذلك فأن y_1, y_2 *حلان مستقلان خطياً*

فان الحل العام الذي ياخذ الصورة

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1\, e^{(\lambda + i\mu)} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x} \\ &= c^{\lambda x}\left(c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}\right) \\ &= e^{\lambda x}\{c_1(cos\mu x + isin\mu x) + c_2(cos\mu x - isin\mu x)\} \\ &= e^{\lambda x}\{c_1 + c_2)cos\mu x + i(c_1 - c_2)sin\mu x\} \\ &= e^{\lambda x}\{c_1 cos\mu x + c_2 isin\mu x\} \end{aligned}$$

مثال (2-5)[4]

لايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\acute{\acute{y}} + \acute{y} + y = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$\therefore r = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{-1}{2};\ \mu\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك فأن الحل العام بالصورة

$$y(x) = e^{\frac{-\alpha}{2}}\left[c_1 cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + c_2 sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]\right]$$

معادلة أويلر Euler's Equation [5]

هي معادلة على الصورة

$$x^2\acute{\acute{y}} + \alpha x\acute{y} + By = 0 \quad \rightarrow (1)[2.3]$$

حيث α, β ثوابت عددية

*نفرض ان حل المعادلة الاولى تكتب بالصورة

$$y = x^r$$

حيث *r* ثابت فأن

$$\acute{y} = rx^{r-1}$$

$$\acute{\acute{y}} = r(r-1)x^{r-2}$$

بالتعويض عن $y, \acute{y}, \acute{\acute{y}}$ في المعادلة (1)

$$x^r\{r(r-1) + \alpha r + \beta\} = 0$$

حيث $x^r \neq 0$

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

وحلها

$$r = \frac{1}{2}[-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}$$

وهناك ثلاث حالات :-

الحالة الاولى:- اذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta>0$

فأن $r_1 \neq r_2$

وعلى ذلك فأن الحلان $y_1 = x^{r_1} \quad , \quad y_2 = x^{r_2}$

ويمكن بسهولة اثبات انهما مستقلان خطياً وعلى ذلك فأن الحل العام هو

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

مثال (2−6)[6]

لايجاد الحل العام للمعادلة

$$2x^2\acute{\acute{y}} + 3x\acute{y} - y = 0 \qquad x>0$$

بالتعويض عن $y = x^r$ نحصل على

$$x^r(2r^2+r-1)=0$$
$$\therefore 2r^2+r-1=0$$
$$\therefore r_1 = \frac{1}{2} \qquad , r_2 = -1$$

وعلى ذلك فأن الحل العام

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{x} \qquad \forall x>0$$

الحالة الثانية:- اذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta=0$

في هذه الحالة تكون $r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$

و أحد الحلول يأخذ الصورة $y_1\,(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}$

ولايجاد الحل المستقل الاخر نحسب W من المعادلة (1)

$$w(y_1,y_2,x) = e^{-\int\frac{\alpha}{x}dx} = e^{-\alpha \ln x} = x^{-\alpha}$$

وعلى ذلك فإن الحل الثاني y_2 هو

$$y_2\,(x) = y_1 \int \frac{w}{{y_1}^2} dx = y_1 \int \frac{x^{-\alpha}}{x^{\int -\alpha}} dx = y_1 \int \frac{dx}{x} = y_1 lnx$$

وعلى ذلك فأن الحل العام هو

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_1$$
$$= (c_1 + c_2 lnx) y_1(x)$$
$$= (c_1 + c_2 lnx) x^r$$

مثال (2–7)[2]

لايجاد الحل العام للمعادلة

$$x^2 \acute{\acute{y}} + 5x\acute{y} + 4y = 0 \qquad\qquad x > 0$$

بالتعويض عن $y = x^r$ ومشتقاتها يكون

$$x^r (r^2 + 4r + 4) = 0$$

المعادلة المميزة

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
$$\therefore r_1 = r_2 = -2$$

وعلى ذلك فأن الحل العام هو

$$y(x) = \frac{1}{x^2} (c_1 + c_2\, lnx)$$

الحالة الثالثة:- اذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta<0$

في هذه الحالة تكون r_1, r_2 عددان مركبان مترافقان وذلك اذا كانت α, β اعداد حقيقية

$$r_1 = \lambda + \mathrm{i}\mu \qquad , r_2 = \lambda - \mathrm{i}\mu$$

نفرض ان :

اذا كانت x^r و r عدد غير مركب فأن:

$$x^r = e^{rlnx}$$
$$x^{\lambda+i\mu} = e^{(\lambda+i\mu)lnx} = e^{\lambda lnx} . e^{i\mu lnx}$$
$$= x^{\lambda} e^{i\mu lnx}$$
$$= x^{\lambda}\{\cos(\mu lnx) + isin(\mu lnx)\}$$

فأن الحل العام لمعادلة اويلر حيث

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad , \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

حيث x_1, x_2 حلول مستقلة خطياً

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

الحالة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$
$$= c_1\, x^{(\lambda+i\mu)} + c_2\, x^{(\lambda-i\mu)}$$

$$= x^r[c_1 \cos(\mu lnx) + c_1\, \mathrm{isin}(\mu lnx)] + x^r[c_2 \cos(\mu lnx) - c_2\, \mathrm{isin}(\mu lnx)]$$

$$= x^{\lambda}\{(c_1 + c_2) \cos(\mu lnx) + i(c_1 - c_2)\, sin(\mu lnx)\}$$
$$\therefore y(x) = x^{\lambda}\{c_1 \cos(\mu lnx) + c_2 \sin(\mu lnx)\}$$

مثال (2−8)[3]

لايجاد الحل العام للمعادلة

$$x^2\acute{\acute{y}} + 2x\acute{y} + y = 0$$

نفرض ان $y = x^r$ ونعوض في المعادلة

$$x^r[r(r-1) + 2r + 1] = 0$$

$$\therefore r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-1}{2} \quad , \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

فأن الحل العام هو

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1 \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lnx\right] + c_2 \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lnx\right]\right]$$

المصادر والمراجع

[1] د. اسماعيل بوقفة، د. عايش الهنادوة، المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات، الجمهورية اليمنية، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الطبعة الاولى 1999.

[2] أ.د. حسن مصطفى العويض، د. عبد الوهاب رجب، سناء علي زراع، المعادلات التفاضلية الجزء الأول، مكتبة الرشد، الطبعة الأولى، 2005.

[3] د.روحي إبراهيم الخطيب، مقدمة في المعادلات، دار المسيرة، الطبعة الأولى، 2012.

[4] د. رمضان محمد جهيمة، أ.حسن محمد غليو، المعادلات التفاضلية، منشورات جامعة الفاتح، دار الكتاب الجديدة المتحدة، الطبعة الأولى، 2003.

[5] ريتشارد برونسون، المعادلات التفاضلية، ترجمة أ.د. حسن مصطفى العويضي، د.عبد الوهاب عباس رجب، الطبعة الثانية، 2006.

[6] أ.د. مصطفى حسن محمد، المعادلات التفاضلية (النظريات – الحلول - التطبيقات) جامعة المنوفية، دار إيتراك، الطبعة الأولى، 2004.