جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعوم الصرفة

الهندسة الاهليجية

بحث مقدم لمجلس كلية التربية للعلوم الصرفة كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد الطالب

عامر عواد مناور الحجيمي

مشرف البحث

د.حسناء حسن شهيد

1444   2023

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَيَرَى الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ الَّذِي أُنزِلَ إِلَيْكَ مِن رَّبِّكَ هُوَ الْحَقَّ وَيَهْدِي إِلَى صِرَاطِ
الْعَزِيزِ الْحَمِيدِ ﴾

صدق الله العظيم

سبأ[6]

الاهداء

إلى المنبر الذي تلقيت منه اسمي دروس الحياة . . . .فكان أعظم منبر

إلى السراج الذي أنار لي ظلمة الدروب . . . .وأعانني على مواجهة الصعوبات .

إلى المثل الأعلى والقدوة المثلى . . .والنفس التي انحني أمامها بكل ود واحترام "والدي الغالي

إلى ربيع عمري الأجمل . . . ونعمة ربي الأكمل . . .والمثل الأعظم دوما

إلى العربية العظيمة . . .والروح الحكيمة . . .والنفس الكريمة . ملهمتي " والدتي الغالية "

إلى من أمدني من ينبوع علمه وثمار أفكاره ومجهوده إلى من صار لي عضدا وساندني

إلى من قدم لي التوجيه والمساعدة ليظهر هذا البحث بهذه الصورة

إلى كل من قدم لي يد العون . . . . . أساتذتي الأفاضل

الى كل هؤلاء اهدي لكم هذا البحث

الشكر والتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم، والحمد لله رب العالمين الذي وفقنا وأعاننا على إنهاء هذا البحث والخروج به بهذه الصورة المتكاملة، فبالأمس القريب بدأنا مسيرتنا التعليمية ونحن نتحسس الطريق برهبة وارتباك، فرأينا أن (رياضيات) هدفًا ساميًا وحبًا وغاية تستحق السير لأجلها ، وإن بحثنا يحمل في طياته طموح شباب يحلمون أن تكون أمتهم العربية كالشامة بين الأمم.

وانطلاقًا من مبدأ أنه لا يشكر الله من لا يشكر الناس، فإننا نتوجه بالشكر الجزيل للأستاذة (حسناء حسن شهيد) الذي رافقتني في مسيرتنا لإنجاز هذا البحث وكانت لها بصمات واضحة من خلال توجيهاتها وانتقاداتها البناءة والدعم كما نشكر عائلاتنا التي صبرت وتحملت معنا ورفدتنا بالكثير من الدعم على جميع الأصعدة، ونشكر الأصدقاء والأحباب وكل من قدم لما الدعم المادي أو المعنوي، وأخيرًا نتوجه بشكر خاص للأستاذ رئيس ونشكر جميع أساتذة قسم الرياضيات

الفهرست

الخلاصة

تم دراسة هذا البحث الذي يتحدث عن الهندسة الاهليجية حيث يتكون من فصلان حيث الفصل الأول يتحدث عن المفاهيم الأساسية ومن اهم المواضيع الذي تحدثنا عنها وهي نبذه تاريخية عن الهندسة الاهليجية و نص الهندسة الاهليجية وأنواع الهندسة الاهليجية وبعض ملاحظات المصادر الخامسة و نص البديهية خمسة الاقليدس اما الفصل الثاني يتحدث عن محاولات الباحثين ومن اهم مواضيعها كانت البراهين المصادر الخامسة و محاولات الارحين و الباحثين اليونانيين الذي اتو بعد اقليدس ومحاولات بوسيدون ومحاولات بروكليس ومحاولات الشارحين وباحثين العرب ومحاولات عمر الخيام ومحاولات المترجمين و الاوربين و الباحثين الاوربيين ومحاولات الرواد الاوربين وفرضية الزاوية المنفرجة وفرضية الزاوية الحادة ومبرهنات الهندسة الاهليجية هذا ما تم دراستة في البحث

الهندسة الاهليجية

المقدمة:

الهندسة الإهليلجية أحياناً يطلق عليها هندسة ريمان، هي نوع من الهندسة اللاإقليدية بحيث من أجل أي مستقيم Lونقطة pلا تقع على المستقيم L، فإنه لا يوجد أي مستقيم مواز لـ Lيمر من .p إن الهندسة الإهليلجية تخرق مسلمة التوازي الإقليدية، تماماً مثل الهندسة الزائدية والتي تنص على أنه يوجد مستقيم واحد فقط موازٍ للمستقيم Lيمر من .pحيث في الهندسة الإهليلجية لايوجد مستقيمات متوازية على الإطلاق. على سبيل المثال، خطوط الطول على سطح الكرة الأرضية. للهندسة الإهليلجية خصائص فريدة، على سبيل المثال إن مجموع زوايا أي مثلث يكون أكبر من 180 درجة الهندسة الأهليجية هي الهندسة البيضوية التي ابتكرها العالم الألماني ريمان ,وفي حين ان الهندسة الأقليدية تدرس المسطحات ثنائية الأبعاد والمستقيمات المتوازية ,تدرس الهندسة الإهليجية الخطوط على سطح الكرة ,وبذلك لا تتوازى المستقيمات في تلك الهندسة ,كما ان المستقيمات في تلك الهندسة هي عبارة عن دوائر مثل دوائر العرض وخطوط الطول على سطح الكرة الأرضية ,وبذلك لا تتوازى الخطوط ,بل تلتقي مع بعضها ,كما ان مجموع زوايا المثلث في تلك الهندسة يساوي اكثر كم 180درجة ,بعكس ما تنص عليه الهندسة الإقليدية ,اما نظرية فيثاغورس فلا يمكن تطبيقها بسهولة في تلك الهندسة ,وقد اعجب العالم اينشتين بتلك الهندسة واستخدمها في حساباته للنظرية النسبية التي تتحدث عن الزمكان رباعي الأبعاد الهندسة الاهليلجية او الهندسة البيضوية هي إحدى فروع الهندسة اللاإقليدية و

التي تخرق مسلمة التوازي اول من أشار إلى هذه الهندسة العالم الألماني ريمان حيث ميز بين مفهومي المستقيم الغير منتهي و المستقيم الغير محدود و يوجد نوعان من الهندسة الاهليلجية:

-الهندسة الاهليلجية الاحادية : حيث تتقاطع المستقيمات فيها بنقطة واحدة

-الهندسة الاهليلجية الثنائية : حيث يتقاطع المستقيمان بنقطتين مختلفتين...

الفصل الاول

المفاهيم الأساسية

لمحة تاريخية عن الهندسة الاهليجية

وضع اقليدس كتاب الاصول بحوالي 300 ق.م وصار اعظم مرجع في الهندسة في كافة العصور. كان اقليدس من اتباع افلاطون وفي رأي برقلس فأن اقليدس كان افلاطونيا أقام صرح هندسته بقصد تفسير الاشكال الهندسية عند افلاطون.

يقال ان الملك بصليموس الأول (304_283 ق.م) أراد أن يتضلع بعلم الهندسة فأكتشف أنها عبء ثقيل, فسأل اقليدس: ألا يمكن بلوغ أسرار هذا العلم بشكل أكثر بساطة؟ فأجابه: لا يا مولاي, لا يوجد طريق ملكي يوصل لعلم الهندسة.

كان اقليدس صاحب منهج, جمع كل ارث اليونان الهندسي ووزعه على ثلاث عشر مقالة و سماه باليونان أسطروشيا وترجمة السريان (بالأسطقات), وعربه العرب باسم الاصول. [2]

ويحتوي مؤلف اقليدس "الاصول" على ثلاثة عشر كتابا. يبدأ كل كتاب منها بتحديدات المفاهيم الاساسية ثم يعرض الموضوعات والمصادرات وينتقل بعدها الى القضايا والمبرهنات.[5]

والذي فعله اقليدس بدأ كيانات أولية يقبلها العقل دون تعريف او برهان وهي عامة وعددها خمسة تسري على كل فروع المعرفة مثل (الكل اكبر من الجزء). وهناك بديهيات خاصة بعلم الهندسة وحدها تدعى (المسلمات) يمكن البرهنة عليها. ومن هذه المسلمات المسلمة الخامسة,[2] وهي مسلمة التوازي وهي اكثر تعقيدا من باقي المسلمات[3]. وان المسلمة الخامسة تمتلك تاريخا حافلا, فلقد حاول الرياضيون على مدى اكثر من 2400 سنة تقريبا اثباتها استنادا الى المصادر الاربع الاولى. وهذا ادى الى اكتشاف الهندسات اللااقليدية وبرهان استقلالية مصادر الخطوط المتوازية الى تطور كبير في هذا المجال على يد رياضيي القرنين التاسع عشر والعشرين, الذين تمكنوا من حل معضلة المتوازيات التي شغلت العلماء والباحثين على مدى اكثر من عشرين قرنا.

وقد ساهم حل هذه المعضلة مجموعة كبيرة من العلماء عملوا عبر العصور منهم ثابت بن قرة وابن هيثم وعمر بن الخيام وغيرهم. اما بلورة الاكتشاف اخرج العلماء من دوامة المصادرة الخامسة فقد تمت على يد لوباتشوفسكي سنة 1829 الذي استكشف او هندسة لا اقليدية ذات انحناء سلبي وهي تحمل اسم مكتشفيها. وفي سنة 1854 ادت ابحاث العالم الالماني ريمان الى ضهور الهندسة الاهليجية وذلك بأخذ نقيض بديهية بلينير حيث هذه الهندسة تنتقي مصادر التوازي الاقليدية لعدم وجود الخطوط المستقيمة المتوازية في هذه الهندسة وتعرف هذه الهندسة باسم ريمان او وفقا لتسمية تيليكس كليين, هندسة اهليجية او ناقصة القطع وتسمى ايضا الهندسة ذات الانحاء الانحناء الايجابي.[1]

المفاهيم الاساسية:

علم الهندسة: هو عبارة عن نضام بديهي, لأننا نستخدم مجموعة من البديهيات, تعاريف ومبرهنات [4]

المفاهيم الهندسية نوعان:[5]

1_مفاهيم اولية غير معرفة ندرك معناها ونفهمها ولا نستطيع تعريفها

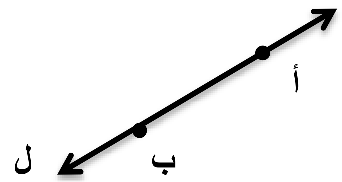
2_مفاهيم معرفة وهي مفاهيم يمكن تعريفها بعبارة تحدد معناها بدقة ووضوح.

مسلمات[5]: عبارات نصف علاقات بين المفردات الاولية ويسلم بصحتها دون برهان.

مبرهنات[5]: عبارات يتم البرهنة على صحتها باستعمال قواعد الاستنتاج في المنطق الفوضى انطلاقا من المسلمات.

النقطة[5]: موقع مدينة على خريطة, استخدام الطبشورة ورسمنا خط صغيرة على اللوحة وطلبنا من التلاميذ المساحة لتصغير هذا الاثر الى اقصى حد ممكن فأن هذا الاثر يمثل النقطة. ومن الممكن ان نعطي أسئلة من الواقع على النقطة بمعناها الاقليدي. ونستخدم حروف الهجاء لتسمية النقط. وجميع الاشكال الهندسية تتكون من نقاط ومن هذه الاشكال الخط المستقيم.

المستقيم[5]: كما ممثل بالرسم المجاور



ويشير السهمان الى الامتداد اللانهائي للخط المستقيم, ويسمى الخط المستقيم باستعمال حرف صغير من حروف الهجاء مثل ل.م.ن....او باستعمال ال نقطتين واقعتين عليه مثل أ,ب وتقول: المستقيم (ل) او المستقيم (أب) ليعني المستقيم المسار بالنقطتين أ.ب ونختصر ذلك بالرمز ونكتب $\overleftrightarrow{\text{ل}}$, $\overleftrightarrow{\text{أب}}$. [5]

<u>نص الهندسة الاهليجية[4]:</u>

تنص الهندسة الاهليجية بأن "لا يمكن رسم اي مواز لخط معلوم من نقطة خارجة عنه"

في هذه الهندسة ميز العالم ريمان بين فكرة المستقيم الغير منتهي وفكرة المستقيم الغير محدد (حيث سابقا لا يوجد فرق) وبذلك اخذ الخطوط اقواس لدائرة عظيمة على سطح كرة نصف قطرها a.

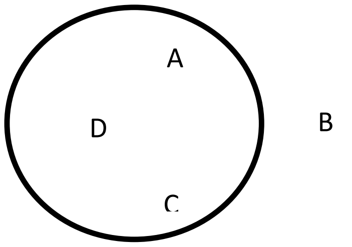
فأن الخط منتهي بالطول حيث له محيط معلوم ولكن غير محدد في المفهوم تستمر فيه حول الكرة دون توقف.

اذاً الكرة هي نموذج لهذه الهندسة, وان المستقيمات لهذا النموذج هي دوائر عظيمة, بما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما, فأن المستقيمين يتقاطعان دائما, ولذلك لا توجد مستقيمات متوازية للمستقيم.

وانه يوجد عدد غير منته من دوائر عظمى تمر بنقطتين متقابلين بالقطر, فأن النقطتين لا تعنيان دائما مستقيما واحد فقط. وبذلك فأن بديهيات الوقوع غير متحققة. والتحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الاهليجية لا يتم بسهولة كما يتم التحويل من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الهذولية .

مثلا [4]/

النقطتين A , C تفصلان D , B على الدائرة حيث لا تستطيع الوصول الى النقطة D من النقطة B دون المرور بالنقطة C.

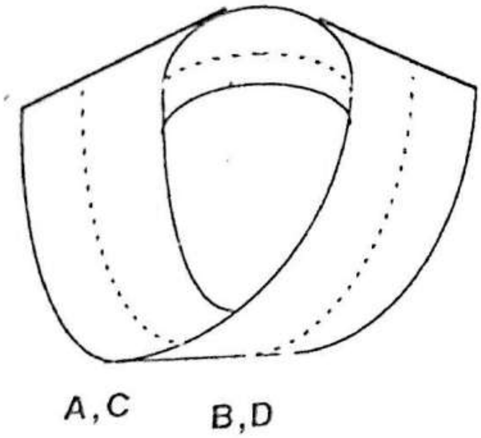


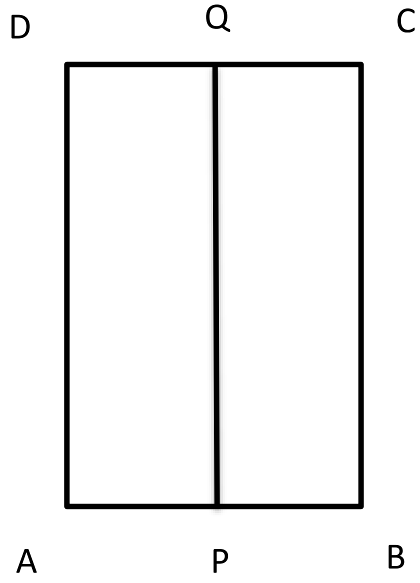
و كذلك النقطة AB المكونة من النقطتين A ,B بالإضافة للنقاط الواقعة بينهما ليس لها معنى على الدائرة .

<u>يوجد نوعان من الهندسة الاهليجية :</u>

1_الهندسة الاهليجية الاحادية (Single E.G) : والتي يكون فيها اي مستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. وان المستوى الاهليجي يتميز بأن سطحه له جهة واحدة. وكمثال بسيط على ذلك ورقة موفيس

نأخذ قطعة مستطيلة طويلة و ضيقة من الورق ABCD . نكون سطحاً بربط الجهتين المتقابلتين AB و CD بعد تدويرنا اولا احداهما , و لتكن CD حول منتصفهما في زاوية $180°$. الزوايا C وD ستنطبق مع الزوايا A و B , على التوالي .





ان جهتي السطح ستكون غير قابلة للتميز . بكلمات اخرى , السطح له جهة واحدة .

طريقة واحدة للتميز بين السطح الذي له جهة واحدة و بين السطح الذي له جهتين هو بتثبيت نقطة على السطح و اتجاه الدوران حوله .

اذا كانت النقطة تصف مسارا مغلقا , فان السطح يكون له جهتين , عندما النقطة ترجع الى موقعها الاولي , الاتجاه النهائي للدوران ينطبق مع الاتجاه الاول . في السطح الذي له جهة واحدة , يوجد مسار مغلق الذي فيه الاتجاهين الاصلي و النهائي للدوران متعاكسين . يمكن ان يبين هذا برسم مستقيم PQ في منتصف المستطيل ABCD و ملاحظة المسار على السطح الناتج للورقة . التقدم على PQ سيرجع الى موقعه الاصلي راسا على عقب . [4]

ونموذج اخر عليها هو نصف كرة فقط .[3]

2_الهندسة الاهليجية الثنائية (Double E.G) [3]: والتي يكون فيها اي مستقيمين يتقاطعان في نقطتين. وان المستوى الاهليجي يتميز بأن سطحه له جهتين. مثلا الكرة التي فيها جهتين. [3]

ملاحظات عن المصادر الخامسة[1]:

يجمع مؤرخو الرياضيات عن أن الابحاث حول نظرية المتوازيات التي تمحورت بالحقيقة حول "محاولة برهان" مصادر إقليدس قد لعبت دورا هاما واستثنائيا في تاريخ الهندسة. وأن التعقيد الذي وافق صياغة هذه المصادر بالمقارنة مع نضيرتها ربما يدل على أنها قد اضيفت الى الاخريات في وقت متأخر, ومهما يكن, فأن هذه المصادر او اي نص مكافئ لها, يبقيان ضروريين لبرهان عدد من القضايا الخاصة بالمثلثات الموجودة في الكتاب الاول من الاصول, ويندرج هذا الامر على مبرهنة فيثاغورس التي تتوج هذا الجزء من مؤلف الاصول. ويبدو أن

اسلاف اقليدس انفسهم قد بحثوا وفق بعض المعطيات, في القرن الرابع قبل الميلاد, عن مصادر اكثر بساطة لتشكل القاعدة لنظرية المتوازيات. ويمكننا الاعتقاد, وفق ما ذكره ارسطو, انه في ايامه, وحتى قبل ذلك سعى علماء الى اقامة الدليل على هذه او تلك, من القضايا المكافئة للمصادر الخامسة. وليس مستبعدا ان يكون ارسطو نفسه قد قدم عرضا خاصة لأحدى هذه القضايا.

كما نرى تملك المصادر الخامسة تاريخا حافلا, فلقد حاول الرياضيون على مدى اكثر من 2400 سنة تقريبا اثباتا استنادا الى المصادرات الاربع الاول .

كما تنص البديهية خمسة لإقليدس [1]:-

"اذا قطع مستقيم مستقيمان و كانت الزاويتان الداخليتان على جهة واحدة من القاطع اقل من زاويتين قائمتين اذا جمعنا فاذا اخرج المستقيمان بغير حد يلتقيان في جهة التي تكون فيها مجموعة الزاويتين اقل من زاويتين قائمتين .

الفصل الثاني

محاولات الباحثين

المقدمة

هناك بعض محاولات الباحثين اليونانيين ومن هؤلاء الباحثين اقليدس وفي القرن الرابع بعض محاولات بروكليس ومن ثم هناك بعض المحاولات الشارحين و الباحثين العرب ومن اهم باحثين العرب عمر الخيام و ابن هيثم و الطوسي

وفي ما يلي شرح تفصيلي عن كل المحاولات

بعض براهين المصادر الخامسة[1]

ا – محاولات الشارحين و الباحثين اليونانيين الذين اتو بعد اقليدس[1] :

محاولة بوسيدون (القرن الاول قبل الميلاد):

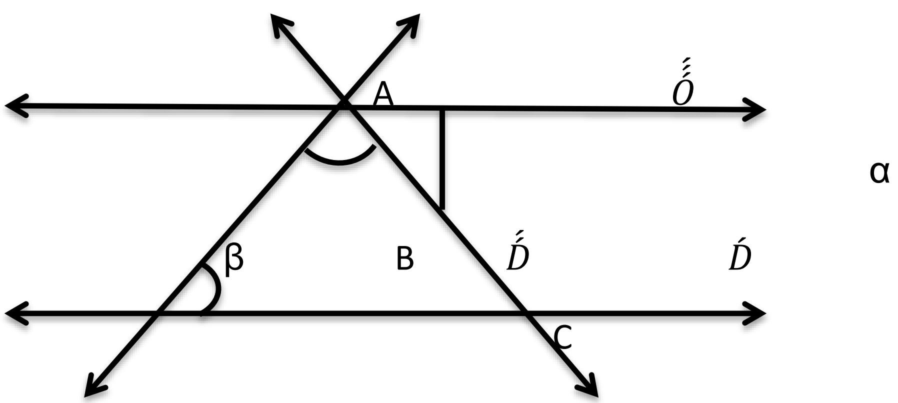
لقد اقترح بوسيدون تعريفا جديدا للمستقيمات المتوازية : فقد غير مستقيمين موجودين في مستو واحد متوازيين اذا كانت المسافات بين كل النقاط الاول و المستقيم الثاني متساوي . و عندما يصبح بمقدورنا ان نبرهن مصادر اقليدس الخامسة .

ولكن هذا التحديد يحتوي على بشكل غير مرئي على الافتراض التالي : كل نقاط السطح الذي يحتوي على المستقيم و المتباعدة عن هذا المستقيم بنفس المسافة و الواقعة منه من نفس الجهة تشكل مستقيما . و بذلك يكون بوسيدون لم يبرهن المصادر الخامسة انما استبدلها باخري اكثر غموضا و قد بقي موضوع التحديد الذي اقترحه بوسيدون مفتوحا .[1]

محاولات بروكليس (410 – 485):

لقد حاول بروكلس في مؤلفه " شروحات الكتاب الاول من اصول إقليدس " ان يبرهن المصادر الخمسة انطلاقا من المصادرات الاخرى . و ذلك استنادا الى إقليدس بالذات حيث برهن (الحكم 17) : "ان مجموعة زاويتين اختياريين من اي مثلث كان , يكون دائما اقل من قائمتين "

و قد حاول بروكلس في واقع الامر ان يبرهن الحكم العكسي :



" لنفرض كما هو مبين على الرسم (1) أن : $\alpha+\beta<2d$,أي أن مجموع الزاويتين اقل من قائمتين. لنبرهن أن $\acute{D}$ يقطع $\acute{\acute{D}}$. لنخرج من القطعة A مستقيما متوازيا ل $\acute{\acute{D}}$ ولنختر على $\acute{D}$ نقطة B ونخرج منها مستقيما عموديا على$\acute{\acute{D}}$. عندما تبتعد النقطة B عن النقطة A فأن المسافة منها الى $\acute{\acute{D}}$ تتزايد في حين أن المسافة بين الخطين المتوازيين $\acute{D}$ و $\acute{\acute{D}}$ ثابتة و لذلك فأن $\acute{D}$ حتما المستقيم $\acute{D}$ على النقطة تقاطع C " .

نلاحظ هنا ان بروكلس قد ارتكز في برهانه بشكل واضح على الموضوعة التالية " أذا مد المستقيمان المكونان لزاوية ما الى ما لا نهاية فأن المسافة بين النقاط على ضلعهما تصبح أكبر من أي مقدار منته منتقى مسبقا " .

كما أنه قد ارتكز و لكن بشكل شبه خفي على الموضوعة التالية : " المسافة بين متوازيين محدودة " و بذلك فأن بروكلس يستخدم بشكل مبطن خصائص إقليدية فالموضوعة الاولى في الواقع تستبعد إمكانية لهدسة الاهليجية بينما تستبعد الثانية الهندسة زائديه القطع و بذلك لا يبقى إلا إمكانية الهندسة الاقليدية إنها مجرد " مصادر على المطلوب " !

ب – محاولات الشارحين و الباحثين العرب[1]:-

يقول روزنفليد و يوشكيفيتش :" و في الشرق العربي , يبدو أن عباس الجوهري , و هو معاصر للخوارزمي , أول من سجل مأخذا على المصادر الخامسة . ففي كتاب : " إصلاح لكتاب الاصول " افترض عباس الجوهري أنه بالإمكان دائما , عبر نقطة موجودة داخل الزاوية , إخراج حطاً مستقيم يقطع ضلعي الزاوية . و فيما بعد , استعان عدة هندسيين بهذه الفرضية لإقامة الدليل على المصادرة الخامسة . والواقع أن الفرضية مكافئة هندسيا للمصادرة الخامسة " .

يزهر تاريخ الوطن العربي بمجموعة كبيرة من العلماء الذين عملوا مصادرة إقليدس و حاولوا برهانها " بعد الجواهري ببضع عشرات من السنين اقترح ثابت بن قرة برهانين مختلفين للمصادر الخامسة . نجد أحد البرهانين في مؤلفه " كتاب في أنه وقع خط المستقيم على خطيين مستقيمين فصير الزاويتين اللتين في جهة واحدة اقل من قائمتين فإن الخطين إذا أخرجا في تلك الجهة التقيا " . و نجد البرهان الأخر في كتاب " مقالة في أن الخطين إذا أخرجا إلى زاويتين القائمتين التقتا ط (الكلام لروزنفليد و يوشكيفيتش) .

و بعد ثابت بن قرة علم العلماء كُثر على المصادر الخامسة و من ابرزهم : ابن الهيثم (950 – 1040) و عمر الخيام (1048 – 1131)و نصير الدين الطوسي (1201 -1274) و سوف تتوقف عند بعض ما قام به ابن الهيثم و عمر الخيام .

محاولات ابن الهيثم (950 -1040):

يتبنى ابن الهيثم في مؤلفه " شرح مصادرات إقليدس" مفهوم " الحركة البسيطة" الذي ارتكز

عليه دراسة ثابت بن قرة . ويبرهن أن " المكان الهندسي _ باللغة المعاصرة" لطرق الخط العامودي الذي يبقى طرفه الاخر على نفس الخط, يمثل خطاً مستقيماً.

" ولكن تجديد ابن الهيثم الفعلي مرتبط بإدخاله لرباعي أضلاع فيه ثلاث زوايا قائمة وقد استخدم لامبرت مثل هذا المضلع الرباعي فيما بعد في محاولة لبرهان المصادرة الخامسة" (لروزنفليد ويوشكيفيتش).

حاول كل من ابن الهيثم والخيام والطوسي على ما يبدو أن يبرهنوا القضية التاسعة والعشرين دون الرجوع الى المصادرة الخامسة وهذا الامر قد استدعى ادخال رباعي اضلاع اختلفت خصائصه من حالة الى اخرى. لنستعرض بعض ما قام به ابن الهيثم :

بأخذ ابن الهيثم رباعي اضلاع ABCD له ثلاث زوايا قائمة A,B,C ويحاول ان يبرهن ان الزاوية الرابعة قائمة ايضاً.

يبرهن ابن الهيثم اولاً إن

AB = AD أن $\acute{c}$ و $\acute{D}$ هما النقطتان المتناظرتان ل A و B بالنسبة إلى المستقيم (AB) . عندما تتحرك القطعة[$\acute{D}\acute{C}$] محافظة على تعامدها على المستقيم ($\acute{C}$C) و تأتي القطعة[Ć D́] تتطابق مع [CD] عندما تصبح النقطة $\acute{C}$ فوق ؤ كما إنها تتطابق مع [BM] عندما تكون $\acute{C}$ فوق B , في هذه الحالة تتحرك النقطة $\acute{D}$ على الخط مستقيم الامر الذي يعني إن لا النقاط الثلاثة $\acute{D}$, M , D موجودة على نفس المستقيم و الكن من جهة اخرى النقاط الثلاثة $\acute{D}$, A و D موجود على نفس المستقيم أيضاً فإذاً النقطة A هي النقطة M . و لذلك فإن

DC = AB

ومن ثم يستنتج ابن الهيثم بالمقارنة مع ما ورد برهان أن

AD = BC

و هكذا فان المثلثين ACD و CAB متساويان لان كل أضلعهما متساوية و بالتالي فأن الزاوية D مساوية للزاوية B أي انها زاوية قائمة

يستعمل ابن الهيثم هنا " المصادرة" التي سبق وذكرناها عن " الحركة البسيطة" يرسم طرق الخط المستقيم العمودي الذي يبقى طرفه الاخر على نفس الخط خطاً مستقيماً " وهذه الفرضية في الواقع خاصية اقليدية معادلة للمصادرة الخامسة.

وقد اقترح ابن الهيثم في مؤلفه : "كتاب حل شكوك اقليدس في الاصول" مصادر" مكافئة للمصادر الخامس واكثر بساطة منها: "لا يمكن لمستقيمين متقاطعين ان يكونا متوازيين لنفس المستقيم" .

من الواضح ان هذه " المصادر" معادلة لحكم بروكلس الذي سبق اوردناه والذي يمكن التعبير عنه كما يلي:

" اذا قطع مستقيم ما احد المستقيمين المتوازيين فإنه يقطع الاخر" .

لا نود ان نحمل نتائج ابن الهيثم اكثر مما تحتمل ولكننا نلتف الى الامور التالية:

1_" أن مصادرة ابن الهيثم المبينة على " الحركة البسيطة" تحد من ضرورة التعاطي مع مفهوم اللانهاية الذي غالباً ما نصادفه عند رياضيين آخرين عملوا على حل اشكالية المصادرة الخامسة.

2_" أن طريقة ابن الهيثم في البرهان تلامس مفهوم الانسحاب الخطي الذي يمثل حالة بسيطة وخاصة من التحويلات الاقليدية.

محاولة عمر الخيام (1048_1123):

لقد برهن خليل جاويش أن أحكام ساكيري الاربعة الاولى مطابقة للأحكام التي وردت عند الخيام في مؤلفه " شرح ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس" و ان الحجج المستعملة في الحكم الثالث التي تعود الى الخيام قبل سكيري. من المعروف أن عمر الخيام قد رفض قطعياً مفهوم " الحركة البسيطة" الذي استعمل في براهين من سبقه و انه انتقد برهان ابن الهيثم. واكثر من ذلك فإنه اكد ان المنظومة الهندسية الاقليدية ناقصة ومن الضروري اضافة المصادرتين التاليتين :

1_" المقادير تقسم الى ما لانهاية وهي غير مكونة من جزيئات غير قابلة للقسمة"

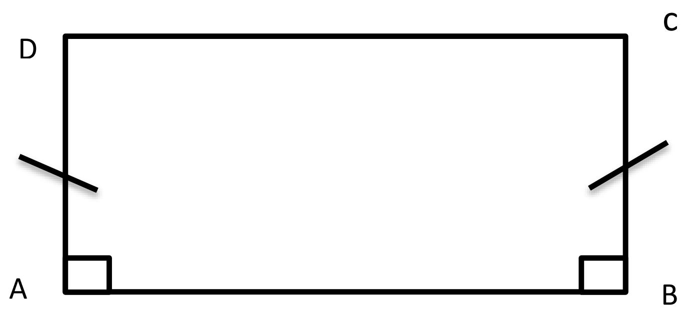
2_" المستقيمان المتقاطعان ينفرجان ويتباعدان بابتعادهما عن رأس زاوية تقاطعهما"

وقد رد عمر الخيام في مؤلفه " شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس" اسباب الخطأ الذي وقع فيه علماء لاحقون في برهان المصادرة الخامسة الى عدم التزامهم بمبادئ ارسطو وقد عدد الخيام هذه المبادئ :

(1) يمكن تقسيم المقادير الى ما لانهاية أي أنها لا تقسم الى أجزاء لا انقسامية
(2) يمكن رسم مستقيم الى ما لانهاية
(3) المستقيمان المتقاطعان ينفرجان ويتباعدان بابتعادهما عن رأس زاوية تقاطعهما.
(4) المستقيمان المتقاربان يتقاطعان ومن غير الممكن لمستقيمين متقاربين أن يتباعدا في نفس اتجاه تقاربهما
(5) يمكن مضاعفة المقدار الاصغر من بين مقدارين غير متساويين ومحدودين بحيث يتجاوز المقدار الحاصل المقدار الاكبر .

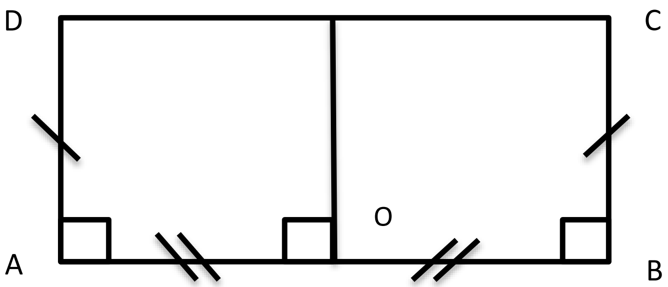
يهدف برهان القضية التاسعة والعشرين دون استخدام المصادرة الخامسة قام عمر الخيام بدراسة رباعي اضلاع ABCD حيث الجانبان [BC], [AD] عموديا على [AB] و متساويان فيما بينهما و قد هدف ان يبين أن الزاويتين D , C قائمان . لقد برهن عمر الخيام القضايا التالية :

القضية – 1 :- لنفرض أن لقطعتين [BC] , [AD] عموديان على [AB] و متساويتان . فإذا الزاوية C و الزاوية D متساويتان . [1]

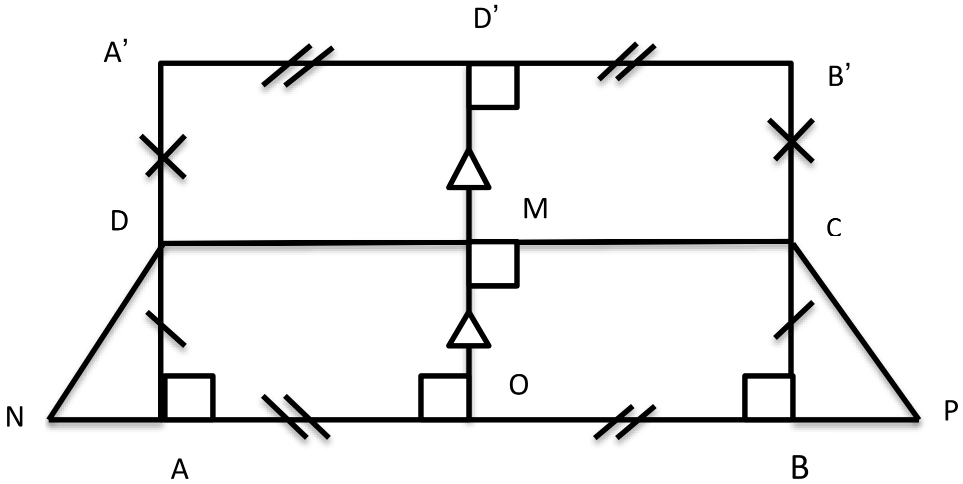


القيضة – 2 :- لنفرض أن ABCD كما في القضية – 1 و لنفرض أيضا أن O هي وسط القطعة [AB] و أن [OM] عموديا على [AB] على النقطة O .

فإذا [CM] = [MD] و [OM] عموديا على [CD] [1]



القضية – 3 :- إذا توفرت شروط القضية – 2 تكون الزاويتين C وD قائمتين .[1]



نبرهن القضيتان 1 , 2 ببساطة و دون استعمال المصادرة الخامسة فبلغةٍ حديثة يقال (OM) عمود منصف ل [AB] و إن التماثل العمودي بالنسبة إلى (OM) يحول [BC] إلى [AD] و بالتالي يحول C إلى D .

لنستعرض كيف يبرهن الخيام القضية – 3 : يبدأ يمد [OM] بطول مساو $OM = M\acute{O}$ و يرسم المستقيم العمودي على $O\acute{O}$ على النقطة $\acute{O}$. يقطع هذا المستقيم (BC) و (AD) بالنقطتين $\acute{B}$ و $\acute{A}$. و يبرهن العلاقة $C\acute{B}=D\acute{A}$ و منها و مما سبق يستنتج العلاقة $\acute{A}\acute{O} = \acute{O}\acute{B}$.

و يطرح عمر الخيام عندها الفرضية التالية : الزاويتان المتساويتان ADC BCD حادتان و من ثم يفترض انهما منفرجتان و في الحالتين يصل غلى تناقض , الامر الذي يجعله يستنتج أن الزاويتين BCD و ADC قائمتان .

لنتناول فرضية الزاوية الحادة بواسطة " الدوران حول (CD) " اي التماثل العمودي يؤتي ب

[$M\acute{O}$] إلى [MO] و ب ($\acute{A}\acute{B}$) و بالقطعة [$\acute{A}\acute{B}$] إلى القطعة [PN] الزاوية $B\ \acute{C}\ M$ هي اكبر

من الزاوية الحادة BCM و الطول $\acute{A}\acute{B}$ يساوي PN و لكنه اكبر من AB . و هكذا لاحظ الخيام أن المستقيمين (BC) و (AD) العموديين على (AB) يتباعدان من جهة من (AB) و لكن وفقاً لحجة التماثل فانهما سيتباعدان أيضاً من الجهة الاخرى .

و بنفس الطريقة , إذا كانت الزاويتان BCD و ADC منفرجين يمكن أن نبرهن ان الطول $\acute{A}\acute{B}$ اكبر من AB و لذلك فأن المستقيمان (BC) و (AD) سيتقاربان من جهة و من الاخرى من (AB) . و يستنتج عمر الخيام أن الزاويتان C و D قائمتين لان الحالتين الحادة و المنفرجة أبلى تناقض مع الفكرة القائلة : " لا يمكن لمستقيمين ان يتباعدا الواحد عن الاخر من جهتين معادلا أن يتقاربا من جهتين معا .

من الملاحظ أن الخيام قد استعمل في برهانه عدا عن الفكرة السابقة وجود النقطتين $\acute{B}$ و $\acute{A}$ و هذا الامر يصبح مبررا إذا اعتبرنا أتن المسافة بين متوازيين لا تتغير .

تجدر الاشارة إلى أن مجموعة كبيرة منت العلماء العرب غير الخيام و ابن الهيثم قد عملوا على حل إشكالية المصادر الخامسة و منهم البيروني و الكندي و حسام الدين السالار (1262م) و غيرهم و لكن أشهرهم هو نصير الدين الطوسي " الذي اعمل فكرة في الخطوط المتوازية و ذلك من خلال عملين , الاول : الرسالة الشافية عن شك أصول إقليدس مع زيادات مهمة عائدة للمؤلف . في كل من المؤلفين استخدم الطوسي , كالخيام , رباعي الاضلاع ساكيري و درس الفرضيات الثلاثة المتعلقة بزوايا العليا " . (الكلام لروزنفيلد و يوشكيفيتش) .

يقول روزنفيلد و يوشكيفيتش : " من خلال أعمالهم في نظرية المتوازيات , مارس علماء الرياضيات العرب تأثيرا مباشرا على أعمال نظائرهم الأوربيين في الميدان نفسه . فبمراجعتهم كتاب المناظر لابن الهيثم , قام العالم البولوني ويتلو في القرن الثالث عشر بالمحاولة الاوربية الاولى لبرهنة مصادر المتوازيات , و هذه المحاولة مستوحاة من دون شك من مصادر عربية . و في القرن الرابع عشر أعطى ليفي بن جرسون و الفونسو الاسباني , براهين تصب مباشرة في سباق براهين ابن الهيثم , و قد سبق أن أشرنا اشرنا إلى ان شرح إقليدس المنسوب زعما إلى الطوسي قد نشط دراسات ج.واليس وج.ساكيري المتعلقة بنظرية المتوازيات . ولا شك في أن التطابق في طرح الفرضيات المتعلقة بزوايا رباعي الاضلاع التي طرحها العلماء الشرقيون في القرون الوسطى من جهة , و كما طرحها ساكيري و لامبرت من جهة أخرى , هو تطابق له دلالته كما إن له أهمية البالغة ".

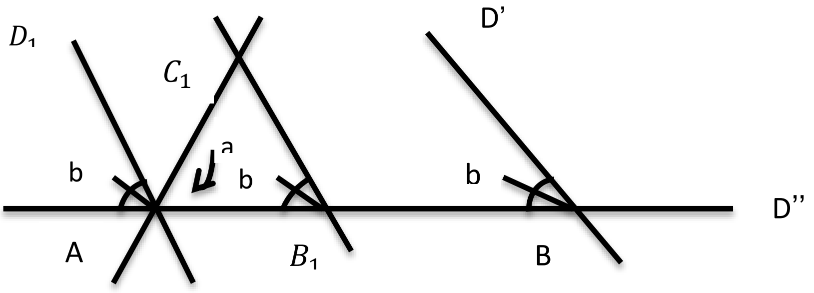
ت– محاولات المترجمين و الشارحين و الباحثين الأوربيين[1]:-

محاولات واليس (1616 – 1703):

لقد طرح واليس الموضوعة التالية : يوجد لكل شكل هندسي شكل اخر ذو حجم اختياري يكون متشابه معه " لنستعرض برهانه :

لنفرض إن المستقيمين D و'D يقطعان المستقيم 'D بالنقطتين A و B و لنفرض أن مجموعة الزاويتين الداخليتين a و b اقل من قائمتين لنبرهن إن D و 'D يتقاطعان . لنرسم من النقطة

مستقيما D_1 بشكل أن يشكل المستقيمان D_1 و 'D مع المستقيم ''D زوايا مشاركة متساوية , من الواضح إن الخط D_1 موجود داخل الزاوية المجاورة للزاوية a .



لنحرك المستقيم 'D يشكل متصل على طول القطعة [AB] على أن نبقى الزاوية المكونة من هذا المستقيم ومن ''D مساوية دائما ل b . قبل أن يحتل المستقيم موضعه النهائي D_1 فانه بالصورة يحب أن يقطع المستقيم D و هذا التقاطع يحدد مثلثا AB_1C_1حيث تساوي الزاويتان في النقطتين A و B_1 تباعا a و b .

لنرسم الان على القطعة [AB] مثلثا ABC متشابها مع AB_1C_1 . نسرى أن المستقيمين D و 'D يتقاطعان بالنقطة C .

في واقع الامر لقد استعمل واليس موضوعة ابسط من الموضوعة سابقة الذكر و هي :

" على القطعة معطاة , بمقدورنا أن نرسم مثلثا مشابهاً لمثلث معطى " ومن الملاحظ ايضاً أن اسلوب البرهان عند واليس مشابه الى لطرق ابن الهيثم من حيث استعمال الحركة البسيطة . و لذلك مع العلم أن موضوعة التشابه هي على ما يبدو فكرة واليس غيره غذ إنها لم تصادف سابقا لدى المعلقين على إقليدس .

لقد عرض واليس بعد ذلك في العام 1594 برهاناً لنصير الدين الطوسي مستوحى من مؤلفاته و قد كان هذا البرهان قريبا من برهان عمر الخيام و لكنه استعمل الموضوعة الأساسية التالية :

"اذا مال المستقيمان أحدهما بالنسبة للآخر في اتجاه ما فانهما سيتابعان ميلهما و في نفس الاتجاه "

تعتبر فكرة واليس عن التشابه الوحيدة الجديدة في هذه الفترة التي سبقت ساكيري .

ث– محاولات " الرواد " الاوربيين الاوائل[1]

لقد وردت كلمة " رواد " في كتابات بيلترامي في العام 1899 في ملحوظة عن " الرواد الذين سبقوا ليجاند ولوباتشيفسكي " وذلك اثر اكتشافه أعمالاً لساكيري (1667 -1733) بقيت مجهولة طيلة مائه و خمسين عاما .

من الاكيد انه ينبغي لساكيري و لامبرت (1728 – 1777) اللذان عاشا في الفترة المبينة أن يذهبا ابعد ممن سبقهم في الاقتراب من الهندسة الإقليدية . و بالفعل فانهما قد تمكنا من صياغة العديد من الاحكام القائمة في المهندسات الأقليدية بدقة ملفتة للنظر , و ذلك دون استعمال ظاهر او باطن لموضوعات تتضمن المصادرات أو تعادلها .

لقد أتت النتائج التي توصل عليها هذان الرياضيان بعيدة كل البعد عن أدراكهما الحسي الأمر الذي جعلهما يشكان بها . فمثلا , الاعتقاد الراسخ لساكيري بصدقية المصادرة الخامسة , اضافة الى تمسكه " الحسي " بهندسة إقليدس و بالأخص تصوره للمستقيم , جعله يكتب " إن فرضية الزاوية الحادة كاذبة بالمطلق لأنها متنافرة مع طبيعة الخط المستقيم " و ذلك رغم انه قد تعذر عليه أن يعثر على تناقض في هذه الفرضية .

اما لامبرت الذي تناول فرضية الاوية الحادة , استطاع ان يبرهن ان مساحة المثلث متناسبة مع الفرق الزاوي ($2\pi - \widehat{A_3} - \widehat{A_2} - \widehat{A_1}$) و من هنا يستنتج انه يوجد مقياس مطلق للأطوال , كما هو موجود للزوايا . و لكن لامبرت كما ساكيري يعتبر الهندسة المدروسة في الرياضيات ما هي إلا نموذج للفضاء الفيزيائي . و هكذا فإنه يرتكز إلى مقولة عدم وجود مقياس مطلق للفضاء الفيزياء لكي يدحض فرضية الزوايا الحادة و ذلك دون أن يصادف أي تناقض داخلي ناتج عن هذه الفرضية .

و لكن لامبرت أدرك أن منظومة معينة غير متناقضة من الموضوعات كفيلة بخلق هندسة مختلفة عن هندسة الفضاء الفيزيائي . وقد صاغ المبرهنة التالية تمكن بلترامي من أثباتها سنة 1868 :

ان هندسة الزاوية الحادة هي هندسة على الكرة التي تمتلك نصف قطر مساوٍ ل i (الوحدة التخيلية) .

اما ليجاندر (1794 – 1823) فقد حاول في مطلع القرن التاسع عشر أن يبرهن المصادر الخامسة , و مؤلفاته تحتوي على العديد من هذه البراهين غير الدقيقة بالطبع .

محاولات ساكيري (1667 – 1733)[1]

لقد درس ساكيري اشكالية المتوازيات في مؤلفه المعنون "إقليدس منقح من كل الشوائب " يفترض ساكيري ان اول ثمانية وعشرين حكما من الاصول الصحيحة من ثم يأخذ رباعي اضلاع عمر الخيام كما سبق ذكرنا , هو رباعي اضلاع ABCD حيث الجانبان (BC) و

(AD) عموديا على (AB) و متساويان فيما بينهما . و ذلك كله دون استنباط رباعي الاضلاع المذكور او الاشارة الى مصدره .

يبرهن ساكيري تساوي الزاويتين D , C و يطرح ثلاث فرضيات ممكنة

1 – فرضية الزاوية الحادة : C = D و هي أقل من زاوية قائمة .

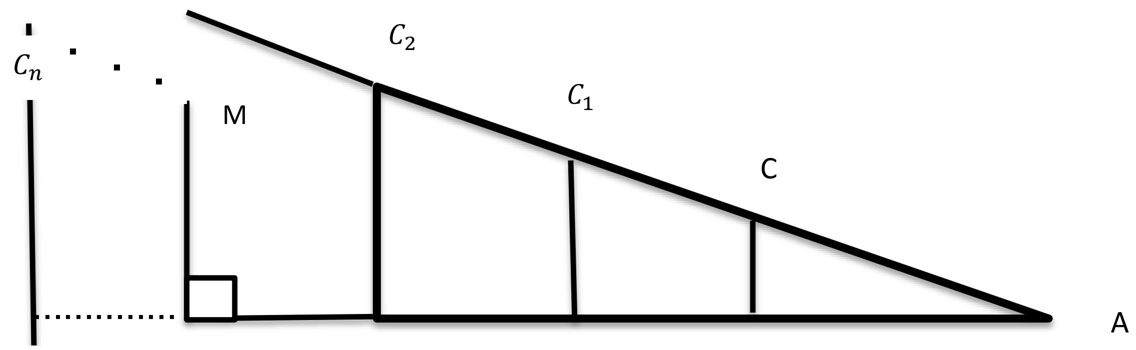
2 – فرضية الزاوية القائمة : C = D و هي تساوي زاوية قائمة .

3 – فرضية الزاوية المنفرجة : C = D و هي اكبر من زاوية قائمة .

و من ثم فإنه يبرهن إذا كانت إحدى فرضياته صادقة في رباعي أضلاع فإنها صادقة في أي رباعي أضلاع أخرى . و من ثم يحصل على النتائج التالية :

<u>فرضية الزاوية المنفرجة [1]:-</u>

يبرهن ساكيري ما يلي : في حالة الزاوية المنفرجة و حالة الزاوية القائمة , المستقيم العمودي على ما و المستقيم الذي يقطعه تحت زاوية حادة يلتقيان .



لنفرض أن (MN) و (: B مستقيمين B_1 ل عمودي B_2 مستقيم (N و الثان B_n
يشكل مع (AN) زاوية حادة . لنرسم على (AC) القطع

$$AC_1 = 2AC\ , AC_2 = 2AC_1\ , \ldots$$

و من ثم الخطوط المستقيمة (CB) , (C_1B_1) , (C_2B_2) , ... العمودية على (AB) . فنحصل على العلاقات :

$$AB_1 = 2AC , AB_2 = 2AB_1 , \dots , AB_n = 2^n AC$$

و هذا يعني أنه عندما يكبر العدد الطبيعي بما فيه الكفاية ستصبح العلاقة التالية صحيحة :

$$AB_n > AN$$

و لكن المستقيم العمودي (MN) الذي يقطع الجانب (AB_n) من المثلث AB_nC_n يجب أن يقطع أيضا وتر هذا المثلث , فغذا المستقيمان (AC) يتقاطعان .

لقد وفرت هذه النظرية لساكيري إمكانية استبعاد فرضية الزاوية المنفرجة .

وبالفعل فأن النتيجة تؤدي إلى مصادر إقليدس التي تعني أن الزاوية في رباعي أضلاع الخيام قائمة . يقول ساكيري بهذا الصدد " أن فرضية الزاوية المنفرجة كاذبة بالمطلق لأنها تعدم نفسها بنفسها " .

من الجدير بالملاحظة اتن استبعاد فرضية الزاوية المنفرجة من قبل ساكيري أنما يعادل استبعاد الهندسة الاهيليجية التي تم اكتشافها لاحقاً هي ابحاث ريمان .

و هذا الامر بديهي لان ساكيري يستعمل في برهانه مصادر إقليدس الثانية المتعلقة بإمكانية مد المستقيم الى ما لانهاية و هذا الامر كما هو معلوم في هندسة ريمان .

فريضة الزاوية الحادة [1]:-

لقد تمكن ساكيري من استبعاده الزاوية الاحادية فرضية الزاوية المنفرجة و لم يبق عليه سوى استبعاد الفرضية الثانية أي فرضية الزاوية الحادة و بذلك يكون قد برهن مصادرة إقليدس الخامسة و لهذا الامر فانه يعود لاستعمال الشكل السابق :

مستقيم عمودي و مستقيم مائل على نفس المستقيم لا يتقاطعان . لا يعود ساكيري في برهانه هنا الى الحدس الطبيعي و بالذات فانه لا يستعمل فرضيات مبطنة كما فعل السابقون و يبرهن في الحالة هذه إن اي مستقيمين يكونا :

1) اما متقاطعان
2) اما عموديين على المستقيم مشترك
3) اما مقاربين

و قد ورد هذا التصنيف عند لوباتشيفسكي لاحقاً . و من الجدير بالذكر قد تنتبه الى استعمال الحدس بما يخص المستقيم العمودي لا يجوز أن يبنى على الاشكال الاقليدية المتداولة و كنا بالنسبة لهذا الامر قد اشرنا سابقا الى فرضية الخيام المبطنة حول المستقيمات التي لا تتباعد من جهتين .

لقد ذهب ساكيري ابعد من ذلك في كشف بعض جوانب الهندسة الإقليدية (زائديه القطع) و قد حدد بدقة التصنيف السابق و بين بضوئه نقاط ارتكاز نقاط ارتكاز نظرية المتوازيات التي تبلورت لاحقاً عند لوباتشيفسكي .

لنفرض أن لدينا قطعة [AB] , يوجد زاوية BAX تعرف الخصائص التالية :

1 – المستقيم (AX) لا يقطع المستقيم العمودي (BC) على (AB) .

2 – كل مستقيم مائل (’A X) محصور في الزاوية BAX يقطع المستقيم العمودي (BC) .

3 – كل مستقيم مائل (’’AX) مكون لزاوية حادة اكبر من الزاوية BAX مع (AB) يملك مستقيما عموديا شركا مع (AB) .

لقد ارتكزت محاولة ساكيري على رباعي اضلاع استعمل بالأساس من قبل عمر الخيام و رباعي الاضلاع هذا يعرف بتاريخ الرياضيات باسم الخيام .

كما أن محاولة ليجاندر مرتبطا بنتائج نصير الدين الطوسي .

لقد تمكن ليجاندر من أن يبرهن نظرية نصير الدين الطوسي :

<u>نظرية [1]:</u>

إذا كان مجموع زوايا المثلث مساوٍ لزاويتين قائمتين فأن مصادرة إقليدس الخامسة صحيحة .

و من هنا نستنتج فوراً أن الحكم " مجموع زوايا المثلث مساوٍ لزاويتين قائمتين " يعادل المصادرة الخامسة انطلاقا من المصادرة الخامسة نستطيع أن نبرهن أن مجموع زوايا المثلث مساوٍ لزاويتين قائمتين .

<u>نظرية[1] :</u>

(نظرية ساكيري – ليجاندر الاولى) :

مجموع زوايا أي مثلث لا يتعدى زاويتين قائمتين .

<u>نظرية [1]:</u>

(نظرية ساكيري – ليجاندر الثانية) :

إذا كان مجموع زوايا مثلث ما مساوٍ لزاويتين قائمتين فأن مجموع زوايا اي مثل اخر يساوي زاويتين قائمتين .

و من هان ينتج مباشرة أنه إذا كان في مثلث ما مجموع الزوايا اقل من زاويتين قائمتين فأن مجموع الزوايا في اي مثلث اخر يكون ايضاً اقل من زاويتين قائمتين . [1]

مبرهنات الهندسة الإهليجية [4]

مبرهنة 1 /

اي مستقيمين في الهندسة الاهليجية المزدوجة يتقاطعان في نقطتين و يحيطان منطقة لمساحة منتهية A حيث $A \neq 0$.

عدد من المبرهنات المشتركة للهندسة الاحادية و المزدوجة .

مبرهنة 2 /

العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة .

نستنتج هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة , حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

من المناسب ان نفكره بأن سطح الأرض هو كرة تامة . خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على الخط الاستواء و بما أن كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي و الجنوبي , موضحة هذه المبرهنة التالية .

مبرهنة 3 /

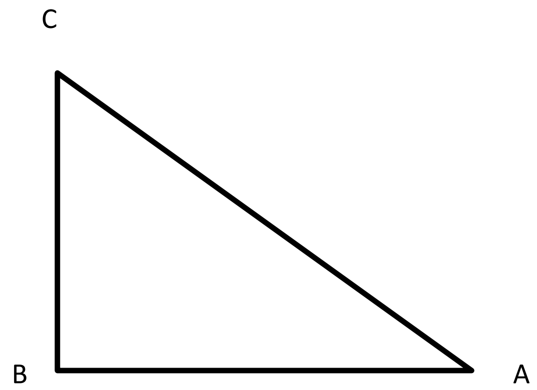
الاعمدة على كل النقاط لمستقيم تلتقي في نقطة يدعى قطب الخط , و بالعكس كل مستقيم يمر بالقطب يكون عموديا على المستقيم .

المسافة q من القطب مستقيم للمستقيم , هي المسافة القطبية للمستقيم

مبرهنة 4 /

هي اي مثلث ABC, الذي فيه

$\angle A$, $\angle B = \angle C = 90^{\circ}$ تكون اصغر من تساوي او اكبر من 90 نسبة الى ان القطعة BC اصغر من تساوي او اكبر من المسافة القطبية q .



توضيح المبرهنة بالشكل, حيث

$. BC < q \,,\ \angle A \ ,< 90\ \angle B = \ \angle C = 90$

فان $-A + \ \angle B + \angle C > 180$

ونفس الشكل يوضح المبرهنة التالية:

مبرهنة 5/

مجموع زوايا مثلث هو اكبر من$^{\circ}180.$

البرهان:

لتكن B , C نقطتين مختلفتين على مستقيم 1 نرسم مستقيمين عموديين على 1 . نرسم مستقيمين عموديين على 1 من B , C يتقاطعان هذان المستقيمان في نقطة A.

ولذلك مجموع زوايا المثلث ABC هو اكبر من$180°.$ [4]

المصادر ...

[1] حجيري , محمد يوسف (2023), *الهندسات الاإقليدية* و المصادر الخامسة .1990,

[2] حمد . محمد عبد الحميد ,(2023), *التأثير الآرامي في الفكر العربي* .2010

[3] شيخ. عوضة . كامل محمد محمد , (2023),*إقليدس بين الفلسفة و المنهج الرياضي* .1995

[4] مختار . آمال شهاب ,(2023), *مفاهيم اساسية في الهندسة* .2012

[5] شنطاوي . فاضل سلامة ,(2023), *اسس الرياضيات و المفاهيم الاسياسية* .2020