جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم رياضيات

تدوير المحاور والدوران

بحث مقدم الى قسم رياضيات - كلية التربية - للعلوم الصرفة - جامعة بابل – و هو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

اسم الطالبة
مريم مسلم عبد

بأشراف أ . د.
زاهر عبد الهادي

٢٠٢٣م

١٤٤٤ هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَلَقَدْ آتَيْنَا دَاوُودَ وَسُلَيْمَانَ عِلْمًا ۖ وَقَالَا الْحَمْدُ لِلَّهِ

الَّذِي فَضَّلَنَا عَلَىٰ كَثِيرٍ مِّنْ عِبَادِهِ الْمُؤْمِنِينَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ

الاهداء

الى سندي في كل خطوة ونبراس العلم محمد وال بينه الطيبين الطاهرين الى من كلت أنامله ليقدم لنا لحضة سعادة الى القلب الكبير. . . (والدي العزيز)الى من كل في هذا الوجود بعد الله ورسوله الى سندي وقوتي وملاذي بعد الله... أمي الغالية (الى من غمروني بفيض حبهم ورعايتهم أساتذتي الكرام إلى كل باحث عن فكرة مضيعة تنير له زقاق الطريق مع خالص شكري وتقديري لكم

الباحثة

شكر و تقدير

من لم يشكر الناس . . . . لم يشكر الله

نتقدم بالشكر أولا واخرا للباري عز وجل الذي وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي والذي ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة

ويسرني ان اتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى الدكتور الفاضل

" زاهر عبد الهادي "

على كل ما قدمه لنا من توجيهات ومعلومات قيمة ساهمت في اثراء موضوع دراستنا في جوانبها المختلفة، ويسرني أن أقدم لكافة الأساتذة الكرام أعضاء الهيئة التدريسية والإدارية في كلية التربية ا فلهم جميعا كل الشكر والتقدير على تفضلهم بقرائهم مناقشة هذا البحث وابدا

ملاحظاتهم القيمة .

الباحثة

المحتويات

الخلاصة

هذا البحث تحت عنوان (تدوير المحاور والدوران) و يتضمن فصلان الفصل الأول و عنوانهُ تدوير المحاور و فيه يتم التطرق إلى صورة نقطة بعد تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند دوران المحاور حول نقطة الاصل و صورة نقطة عند تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند تغير نقطة الاصل و دوران المحاور كما يتناول البحث المعادلة العامة من الدرجة الثانية والتي بصيغة

$$A\,x^2 + Bxy + c\,y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

و تحويلها الى معادلة خالية من حد يحوي على xy بإيجاد تحويل دوراني المحاور بزاوية قيمتها .

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

و الفصل الثاني يتضمن موضوع دوران جسيم حول نقطة الاصل و علاقة الجسيم بالنسبة إلى موقعهُ الجديد وبالعكس بالإضافة إلى دوران جسيم حول أي نقطة في المستوي الاحداثي

المقدمة

التحويلات الهندسية : هي مفهوم واسع في الرياضيات ومن الذين كتبوا في هذا الموضوع (اي جي برسل) الهندسة التحليلية[٢] و التحويلات الهندسية أهمية في الرياضيات و لها تطبيقات عديدة منها تدوير المحاور و التي تفيدنا في كثير من المسائل يكون وضع المحاور بجعل من المعادلة الخاصة بالمسألة الصعبة الحل لهذا فأن اللجوء الى تدوير المحاور يصبح ضرورياً لجعل الحل سهلا و صحيحا . ولنقل المحاور أهمية كبيرة عند دراسة الاستقرارية في موضوع نظرية المعادلات التفاضلية. و كذلك يلعب دور بارز في أغلب التطبيقات الهندسية و الفيزيائية و لدراسة الدوران أهمية كبيرة في دراسة بعض الحالات الفيزيائية مثل حركة الكوكبية.

الفصل الأول
تدوير المحاور

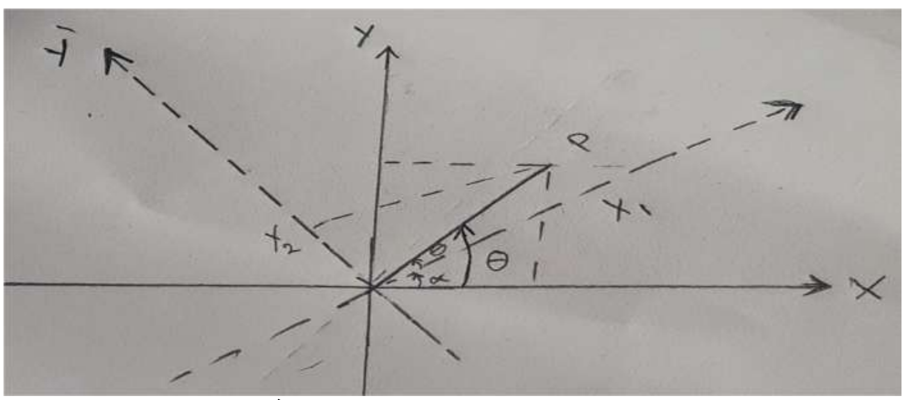
١-١ المقدمة

في هذا الفصل يتم دراسة تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند دوران المحاور .

و تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند تغير نقطة الاصل و دوران المحاور.

2-1 تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند دوران المحاور .[2]

نتناول اولا علاقات تحويل الاحداثيات الكارتيزيه المتعامدة عند دوران المحاور اي عند ذلك التغير لمجموعه احداثيات المتعامدة الذي يتم فيه دوران المحورين في ناحية وبزاويه واحدة ، وتبقى نقطه الاصل و مقياس الرسم دون تغير. نفرض إن ΔX ،Δy هما المحورين القديمين للإحداثيات وإن ΔX ،Δyهما محورين جديدين .



شكل (1.1)يوضح الرسم البياني ايجاد العلاقة بين المستوى الاحداثي القديم والاحداثي الجديد.

يتحدد موضع المحورين الجديدين بالنسبة الى القديمين لإعطاء زاويه دوران اللازمة لينطبق المحوران القديمان على الجديدين ترمز لهذه الزاوية (x)نفهمها كما هو مصطلح عليه في حسبان المثلثات (نحدد الاتجاه الموجب للدوران). فإن كل نقطة اختيارية (p)في المستوي عدا (Δ)سيكون لها مجموعتين من الإحداثيات (x,y)، (x,' 'y) الإحداثيات الاصليات (x,y)هما مسقط النقطة (p)على المحورين الاصليين ΔX ,Δyالاحداثيان الجديدان (x,'y')هما مسقط النقطة (p)على المحورين الجديدان 'Δy، 'ΔX.

نبحث الان عن صيغة تربط بين الاحداثيات القديمة والجديدة لأية نقطة (p),نرمز (V, θ)الى الاحداثيات القطبية للنقطة (p)بالنسبة الى المحورين القديمين

, (x,y) بـالرمز (V , θ)الـى الاحـداثيات القطبيـة لـنفس النقطـة (p)بالنسبة الـى المحورين الجديدين وفي كلتا الحالتين (|v=|op) و كذلك من الواضح.

مما يؤدي الى

θ=θ-α

$$x' = v\cos\theta$$
$$y' = v\sin\theta$$
$$y = v\sin\theta \qquad\qquad x = v\cos\theta$$
$$x' = v\cos\theta = v\cos(\theta-\alpha)$$
$$= v(\cos\theta\,.\,\cos\alpha + \sin\theta\,.\,\sin\alpha)$$
$$= v\cos\theta\,.\,\cos\alpha + v\sin\theta\,.\,\sin\alpha$$
$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$$y' = v\sin\theta$$
$$= v\sin(\theta-\alpha)$$
$$= v(\sin\theta\,.\,\cos\alpha - \cos\theta\,.\,\sin\alpha)$$
$$= v\sin\theta\,.\,\cos\alpha - v\cos\theta\,.\,\sin\alpha$$
$$= y\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$\left.\begin{array}{l} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{array}\right\} \ldots(1.1)$$

و هما العلاقتان المطلوبتان اي العلاقتان المعبرتان عن دوران المحورين بزاوية (α) و النقطة (p) . المعبرتان عن x' , y' الاحداثيان الجديدان بدلالة الاحداثيان القديمين x , y للنقطة (p) بدلالة احداثيهما الجديدين (x', y') و كما يلي :

$$x = v\cos\theta$$
$$= v\cos(\theta+\alpha)$$
$$= v(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)$$
$$= v\cos\theta\cos\alpha - v\sin\theta\sin\alpha$$

$= x' \cos \alpha - y' \sin\alpha$

$y = v \sin\theta$

$= v \sin(\theta + \alpha)$

$= v (\sin\theta \cos \alpha + \cos \theta \sin\alpha)$

$= v \sin \theta \cos \alpha + v \cos \theta \sin\alpha$

$= y' \cos \alpha + x' \sin\alpha$

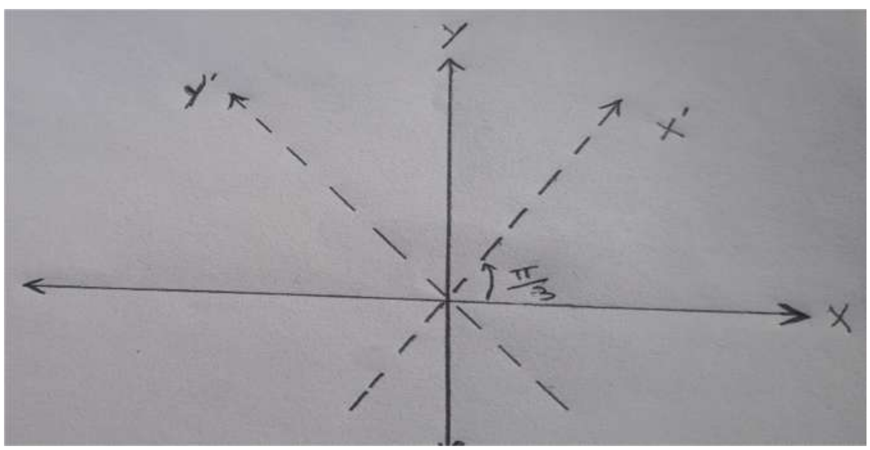
و بذلك يكون

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin\alpha \\ y &= y' \cos \alpha + x' \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1.2)$$

و هما العلاقتان المطلوبتان.

مثال(1.1) جد الإحداثيات الجديدة للنقطة P(4,6) بعد التحويل الدوراني للمحاور بزاوية $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ؟

الحل/



شكل (2.1) يوضح الرسم البياني تدوير زاوية قدرها $\alpha = \frac{\pi}{3}$

و بتعويض x=4 , y=6

$\mathrm{Sin}\alpha = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{Cos}\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

باستخدام معادلتي (١).

$x'\ = 4(\frac{1}{2})+6(\frac{\sqrt{3}}{2}\ )=2+3\sqrt{3}$

$y' = 6\left(\frac{1}{3}\right)-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3-2\sqrt{3}$

هكذا فأن الإحداثيات للنقطة P(4,6) بعد تحويل دوراني للمحاور و بزاوية

$\alpha=\frac{\pi}{3}$) هي $2+3\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3}$)(

مثال (1-2)[4]جد المعادلة الجديدة للمخطط xy=1 بعد تدوير المحاور بزاوية $\alpha=\frac{\pi}{3}$؟

الحل /

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

و باستخدام العلاقة (1.2) نحصل على

X= $\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$

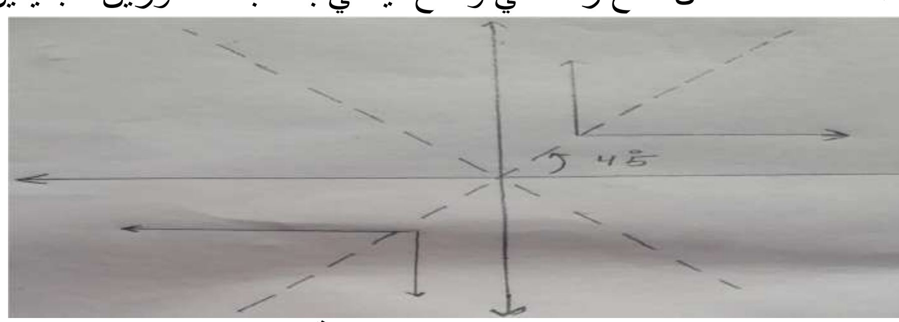
و بتعويض هذين المعادلتين في المعادلة المعطاة xy=1 نحصل على

$\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')*\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=1$

$\frac{1}{2}(x'^2-\ y'^2)=1$

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

و هذه المعادلة تمثل قطع زائداً في وضع قياسي بالنسبة المحورين الجديدين x' , y'



شكل (3.1) يوضح الرسم البياني معادلة للقطع زائد

في مثال(2.1) نلاحظ المعادلة الأصلية تحتوي حد x y، و المعادلة الجديدة التي حصلنا عليها لا تحوي الحد x' y' و لان نتطرق إلى المعادلة من الدرجة الثانية ب x y وهي

$$Ax^2 + B\,xy\ + C\,x^2 + Dx + Ey + F\ = 0\ \ldots (1.3)$$

حيث ليست جميع A , B , C اصفاراً و هي أعداد حقيقية لأنه إذا كانت المعادلة(١) تحتوي على xy (اي إنه أذا كان B≠0) عندئذ يمكن إيجاد تحويل دوراني دائما كالذي يحول المعادلة(١) إلى معادلة من الدرجة الثانية ب x' y' و التي لا تحتوي الحد x' y' بتعويض معادلتي الدوران.

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y =\ y'\cos\theta + x'\sin\theta$$

في معادلة (1.3) نحصل على

$$\text{A}(\ x^2\cos\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin\theta + B(x'^2\cos\theta + x'y'sin\theta\cos^2\theta - x'y'\sin^2\theta) + D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0$$

اذا جمعنا الحدود تصبح هذه المعادلة

$$\text{A}'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + F'y' + F' = 0$$

حيث فيها

A' = $A\cos^2\theta$ + $B\sin\theta\cos\theta$ + $C\sin^2\theta$

B' = $B(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$– 2($A$ – C) $\sin\theta\cos\theta$

C' = $A\sin^2\theta\ B\sin\theta\cos\theta$ + $C\cos^2\theta$

D' = $D\cos\theta$ + $E\sin\theta$

F' = $D\sin\theta$ + $E\cos\theta$

F' = F

لكن $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta$

و $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

المقدار (B') يمكن أعادة كتابتهُ على نحو التالي

B'=B cos 2θ –(A-C) sin 2θ

B cos θ -(A-C)sin θ =0. اذا كان B'=0

cot 2θ B≠0

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B} \quad \dots (1.4)$$

أي ان المعادلة من الدرجة الثانية بصيغة

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \dots (1)$$

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0 \quad \dots (1.5)$$

بواسطة دوران بزاوية (θ) التي لها

$$\cot 2\theta=\frac{A-c}{B}$$

مثال (3.1) بواسطة الدوران جد معادلة جديدة لمخطط

$$41x^2+24xy+34y^2-80x-60y-150=0$$

الحل / نختار زاوية الدوران (θ) بحيث ان

$$\text{Cot}2\,\theta=\frac{A-c}{B}=\frac{41-34}{24}=\frac{7}{24}$$

من $\cot 2\theta=\frac{7}{24}$ يجب ان نحصل على $\sin\theta$, $\cos\theta$

$\text{Cos}\,2\theta=\frac{7}{25}$ و استعمال صيغ نصف الزاوية في المثلثات و نحصل على

$$\sin\theta=\frac{3}{5} \qquad \text{Cos}\,\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{4}{5}$$

سوف تكون معادلتي الدوران

$$y=\frac{1}{5}(3x'+4y') \qquad X=\frac{1}{5}(4x'-3y')$$

و بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على:-

$$\frac{1}{25}[41(16x'^2-24x'y'+9y'^2)+24(12x'^2+7x'y'+12)$$
$$+34(9x'^2+24x'y'+16y'^2)]-16(4x'-3y')$$
$$-\ 12(3x'+4x'-150)=0$$

اذا جمعنا الحدود المتشابهة نحصل

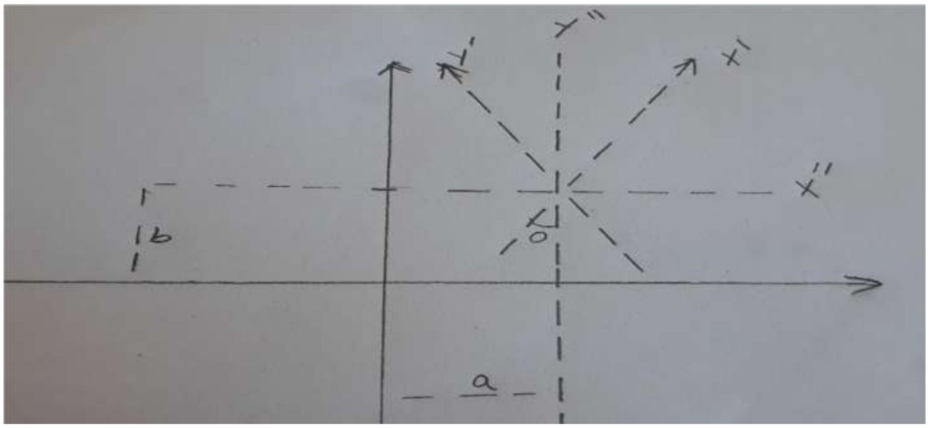
$$\frac{1}{25}[(656+288+306)x'^2+24(-41+34+7)x'y''$$
$$+(f\,369-288+544)y'^2]-(64+36)x'+(48-48)y'-150=0$$

أي ان

$$\frac{1}{25}(1250x'^2+625y'^2)-100x'-150=0$$
$$50x'^2+25y'^2-100x'-150=0$$
$$2x'^2+y'^2-4x'-6=0$$

*3-1*تحويل الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند تغير نقطة الاصل و دوران المحاور. [*1*]

سنبحث تلك الازاحة للمحاور التي يمكن تحقيقها بواسطة النقل المتوازي للمحورين ثم د ورانها (عدم تغيير مقياس الرسم،) نرمز للمقدار أزاحه المجموعة في اتجاه ΔXبالرمز (a)لمقدار ازاحة المجموعة في اتجاه المحور Δyبالرمز) b(ولزاوية دوران المحاور بالرمز .α نفرض ان $\Delta y'$ $\Delta x'$، هما المحوران الجديدان يمكن لأي نقطه(p) احداثيات x)، (y بالنسبة الى المحورين القديمين ولنفس هذه النقطة (p)احداثيات (x' , 'y)مختلفتان على وجه العموم بالنسبة الى المحورين الجديدين وهدفنا هنا هو الحصول على العلاقات التي تعبر عن 'x'، yبدلاله y، x وكذلك العلاقات التي تعبر عن x, y بدلاله . 'y , 'x ولحل هذه المسألة ندخل مجموعة مساعدة من الاحداثيات ينطبق اتجاه محوريها مع أتجاه محوري المجموعة القديمة وتنطبق نقطة أصلها على نقطة أصل المجموعة الجديدة.



شكل (4.1) يوضح الرسم البياني تحول الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة عند دوران المحاور تغير نقطة الاصل و دوران

مركز لمحوري المجموعة المساعدة بالرمزين "Δ'X و "Δ'Y و الاحداثي النقطة (P) بالنسبة لهذين المحورين بالرمزين ''x وحيث أن المجموعة المساعدة تنتج بالإزاحة محوري مجموعة الإحداثيات القديمات بصورة متوازية بمقدار (a) في الاتجاه (x) وبمقدار (b) في الاتجاه (y) وفق العلاقة التالية:-

$$x = x'' + a$$

و بعد ذلك بما إن المجموعة الجديدة تنتج بدوران المجموعة الجديدة تنتج بدوران المجموعة المساعدة بزاوية (α) وفق العلاقة (1.2) نحصل على

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

$$y'' = y' \cos\alpha + x' \sin\alpha$$

و بالتعويض بصيغتي ''x'' , y العلاقتين السابقتين نحصل على

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a$$

$$y = y' \cos\alpha + x' \sin\alpha + b \;\; \dots \;\; (1.6)\text{العلاقة}$$

و اعتبار ان 'x' ,y مجهولان و تحديدهما من مجموعة المعادلتين السابقتين نجد ان

$$x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha$$

$$y' = (y - b)\cos\alpha - (x - a)\sin\alpha \qquad \dots (1.7)\text{العلاقة}$$

مثال (4.1) كون علاقات تحويل الإحداثيات المناظرة لنقل نقطة الأصل في النقطة $\Delta''(2, 3)$ و دوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ؟

الحل / نفرض $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، *b=3* ، *a=2* و نعوضها في علاقة *(1.6)* نحصل على صيغتي الاحداثين القديمين بدلالة الجديدين.

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 2$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 3$$

و بطرح هاتين المعادلتين تارة و جمعها تارة أخرى نحصل على

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حل أخر / نعوض $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ،b=3 a=2 *في العلاقة (٧) و نحصل على العلاقة المطلوبة*

$$x' = (x - 2)\frac{1}{\sqrt{2}} + (y - 3)\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y' = (y - 3)\frac{1}{\sqrt{2}} - (x - 2)\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{x + y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad y' = \frac{-x + y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال (5.1) جد المعادلة الجديدة $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ بعد تحويل الإحداثيات المناظرة لنقل نقطة الاصل في النقطة (*-2,-1*)و دوران المحاور بزاوية$(-\frac{\pi}{4})$؟ [١]

الحل/ بتعويض a=-2 , b=-1

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ; \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

في الصيغة(1.6)

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ y' - \frac{1}{\sqrt{2}}x' - 1$$

و بتعويض هاتين المعادلتين في المعادلة المعطاة

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - 2\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{x'}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} - 2\right)$$
$$- 2\left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{x'}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + 1 = 0$$

$$x'y' = 1$$

الفصل الثاني

الدوران

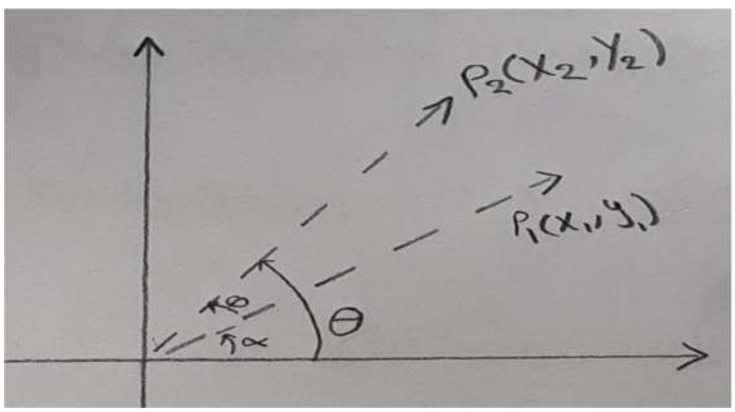
1-2 المقدمة

في هذا الموضوع يتم دراسة دوران جسيم حول نقطة الاصل من نقطة إلى نقطة أخرى و بزاوية دوران وإيجاد العلاقة بين إحداثيات النقطة.

وايضا يتم دراسة دوران جسيم حول نقطة في المستوي.

(2-2)دوران جسيم حول نقطة الاصل [4]

سنتناول في هذا الفصل دوران جسيم حول نقطة الاصل من النقطة $p_1(x_1, y_1)$ إلى النقطة $p_2(x_2, y_2)$ بزاوية دوران قدرها (θ) و إيجاد العلاقة بين إحداثيات النقطة $P_1(x_1, y_1)$ بدلالة $p_1(x_1, y_1)$ وبالعكس بوجود زاوية دوران قدرها (θ) ولحساب هذه العلاقة نفرض إن جسيم يتحرك من النقطة $P_1(x_1, y_1)$ إلى النقطة $p_2(x_2, y_2)$ بزاوية دوران قدرها (θ) بالاتجاه الموجب كما في الشكل.



شكل (5.1) يوضح الرسم البياني دوران جسيم حول نقطة الاصل

يمكن الاستعانة بالإحداثيات القطبية لإيجاد العلاقة بين الإحداثيات النقطة $p_1(x_1, y_1)$ والنقطة $p_2(x_2, y_2)$

كالآتي:-

$X_1 = v\cos\alpha$ $\qquad$ $Y_1 = v\sin\alpha$

$X_2 = v\cos\phi$ $\qquad$ $Y_2 = v\sin\phi$

لكن. $\phi=\alpha+\theta$ لذلك يكون .

$X_2 = v\cos(\alpha+\theta)$

$Y_2 = v\sin(\alpha+\theta)$ ...(2.1)

$X_2 = v\cos(\alpha+\theta)$

$X_2 = v(\cos\alpha\ \cos\theta - \sin\alpha\ \sin\theta)$

$X_2 = v\cos\alpha\ \cos\theta - v\sin\alpha\ \sin\theta$

$X_2 = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$

و كذلك.

$Y_2 = v\sin(\alpha+\theta)$

$Y_2 = v(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$.

$Y_2 = v\sin\alpha\cos\theta + v\cos\alpha\ \sin\theta$.

$Y_2 = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta$.

وبذلك يكون.

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ Y_2 = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta \end{array}\right\} \quad ...(2.2)$$

وهما العلاقتان، أي العلاقتان المعبرتان عن دوران جسيم بزاوية (θ) للنقطة $p_2(x_2, y_2)$ بدلالة النقطة

$P_1(x_1, y_1)$

و كذلك يمكن الحصول على العلاقتين المعبرتين عن النقطة $p_1(x_1, y_1)$ بدلالة إحداثيات النقطة $p_2(x_2, y_2)$

وكما يلي :-

لدينا $\alpha=\phi-\theta$

$X_1 = v\cos\alpha$

$X_1 = v\cos(\phi-\theta)$

$X_1 = v(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta)$

$X_1 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta.$

و كذلك

$Y_1 = v \sin\alpha.$

$Y_1 = v \sin(\phi - \theta)$

$Y_1 = v(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta)$

$Y_1 = v\sin\phi\cos\theta - v\cos\phi\sin\theta.$

$Y_1 = y_2 \cos\theta - x_2 \sin\theta.$

و بذلك العلاقتان المعبرتان عن $p_1(x_1, y_1)$ بدلالة إحداثيات النقطة $p_2(x_2, y_2)$ هي :-

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta. \\ Y_1 = y_2 \cos\theta + x_2 \sin\theta \end{array}\right\} \quad \ldots(2.3)$$

مثال (6.2) جد إحداثيات موقع جسيم بعد أن يتحرك من النقطة $p(4,2)$ تحت تأثير دوران حول نقطة الأصل بزاوية. $6/\pi$؟

الحل:-

بتعويض $x=4$, $y=2$

$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

في الصيغة (2.2) نحصل على

$$x^2 = 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} - 1$$

$$y^2 = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

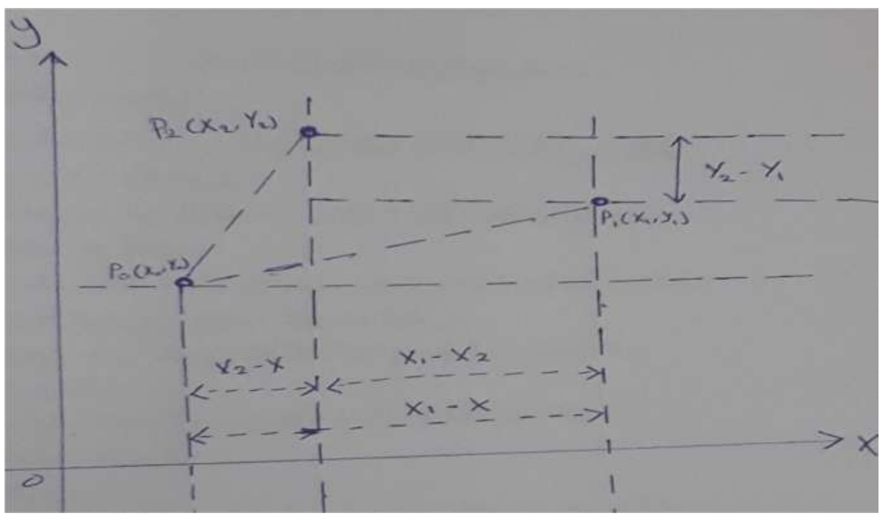
$$y_2 = \sqrt{3} + 2$$

إحداثيات الجسيم بعد دوران بزاوية $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ من النقطة $P(4,2)$ هي :-

[٢] $(2\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+2)$

3-2 دوران جسيم حول نقطة في المستوي

سنتناول في هذا الفصل دوران جسيم حول أي نقطة في المستوي من النقطة P(x,y) إلى النقطة P(x,y) بزاوية دوران قدرها(θ) ، إيجاد العلاقة بين الإحداثيات النقطة P(x,y) بدلالة P(x ,y) و نقطة مركز الدوران وبالعكس بوجود زاوية دوران قدرها(θ) . و لحساب هذه العلاقة نفرض إن جسيم يتحرك من النقطة P(x,y) إلى P(x,y) بزاوية دوران قدرها (θ) بالاتجاه الموجب حول النقطة P(x,y) كما في الشكل .



شكل (6.2) دوران جسيم حول نقطة في المستوي

في Δ $P_0P_2P_1$ نجد أن.

$$\cos\alpha=\frac{x_1-x_0}{v} \qquad\qquad \sin\alpha=\frac{y_1-y_0}{v}$$

$$x_1-x_0=v\cos\alpha \qquad\qquad y_1-y_0=v\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\ \theta)=\frac{x_2-x_0}{v}$$

$$x_2-x_0=v\cos(\ \alpha+\theta\ )$$

$$x_2-x_0=v(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)$$

$$x_2-x_0=v\cos\alpha\cos\theta-v\sin\alpha\sin\theta$$

لكن $x_1-\ x_0=v\cos\alpha$ $\qquad y_1-y_0=\ v\sin\alpha$

$$x_2 - x_0 = (x_1 - x_0)\cos\theta - (y_1 - y_0)\sin\theta$$

$$x_2 = [(x_1 - x_0)\cos\theta - (y_1 - y_0)\sin\theta] + x_0$$

كذلك $\frac{y_2 - y_0}{v} = \sin(\alpha + \theta)$

$$y_2 - y_0 = v\sin(\alpha + \theta)$$

$$y_2 - y_0 = v(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$$

$$y_2 - y_0 = v\sin\alpha\cos\theta + v\cos\alpha\sin\theta$$

لكن $x_1 - x_0 = v\cos\alpha \quad , \quad y_1 - y_0 = v\sin\alpha$

$$y_2 - y_0 = (y_1 - y_0)\cos\theta - (x_1 - x_0)\sin\theta$$

$$y_2 = [(y_1 - y_0)\cos\theta - (x_1 - x_0)\sin\theta] + y_0$$

اي ان موقع الجسيم بعد دوران من النقطة P(x,y) *بتأثير دوران بزاوية حول النقطة* P(x,y) هو

$$x_2 = [(x_1 - x_0)\cos\theta + (y_1 - y_0)\sin\theta] + x_0$$

$$y_2 = [(y_1 - y_0)\cos\theta + (x^1 - x^0)\sin\theta] + y_0 \ldots (2.4)$$

و كذلك يمكن الحصول على العلاقتين المعبرتين عن الاحداثين القديمين *P(x,y)* بدلالة الإحداثيات الجديد *(x,y)* و كما يلي

في Δ $P_0 P_1 P_2$ نجد أن.

$$\frac{x_1 - x_0}{v} = \cos(\varphi - \theta)$$

$$x_1 - x_0 = v\cos(\varphi - \theta)$$

$$x_1 - x_0 = v(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta$$

$$x_1 - x_0 = v\cos\varphi\cos\theta + v\sin\varphi\sin$$

لكن

$$x_2 - x_0 = v\cos\varphi$$

$$Y_2 - y_0 = v\sin\varphi$$

$$X_1 - x_0 = (x_2 - x_0)\cos\varphi + (y_2 - y_0)\sin\varphi$$

$X_1 = [(x_2 - x_0)\cos\varphi + (y_2 - y_0)\sin\varphi] + x_0$

$\frac{y_1 - y_0}{v} = \sin(\varphi - \theta)$ كذلك

$Y_1 - y_0 = v \sin(\varphi - \theta)$

$y_1 - y_0 = v(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta)$

$y_1 - y_0 = v\sin\varphi\cos\theta - v\cos\varphi\sin\theta$

لكن. $x_2 - x_0 = v\cos\varphi$ ، $Y_2 - y_0 = v\sin\varphi$

$Y_1 - y_0 = (y_2 - y_0)\cos\theta - (x_2 - x_0)\sin$

$y_1 = [(y_2 - y_0)\cos\theta - (x_2 - x_0)\sin\theta] + y_0$

أي إن موقع الجسيم بعد دوران من النقطة $P_1(x_1, y_1)$ *بتأثير دوران بزاوية* (θ) *حول النقطة* $P_0(x_0, y_0)$ هو

$x_1 = [(x_2 - x_0)\cos\theta + (y_2 - y_0)\sin\theta] + x$

$y_1 = [(y_2 - y_0)\cos\theta + (x_2 - x_0)\sin\theta] + y$...(2.5)

مثال (7.2) جد موقع جسيم يتحرك من النقطة (2, 4) لمسار دائري تحت تأثير دوران بزاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ حول النقطة (2,4) ؟

الحل / بتعويض $x = 2, y = 4$ $\quad y = 6 \;,\; x = 4$

$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ في الصيغة (2.4)

$$x_2 = \left[(2-4)\frac{1}{2} - (4-6)\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 4$$

$$x_2 = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 4 = 3 + \sqrt{3}$$

$$y_2 = \left[(4-6)\frac{1}{2} - (2-4)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 4$$

$$y_2 = \left(-1 - \sqrt{3}\right) + 6 = 5 - \sqrt{3}$$

P(3+√ 3 , 5- √3) موقع جسيم هو النقطة

مثال (8.2) جد صورة للمخطط x+2y=1 بعد تحويل دوراني بزاوية قدرها $\boldsymbol{\theta = \sin - \frac{3}{5}}$ حول النقطة(1,0) ؟

الحل/ بتعويض $x = 1$ $y = 0$ $\sin\theta = \frac{-3}{5}$

$\cos\theta = \frac{-4}{5}$

في صيغة (2.5) نحصل على $x_1 = \left[(x_2 - 1)\left(\frac{4}{5}\right) + y_2\left(-\frac{3}{5}\right)\right] + 1$

$$x_1 = \left[\frac{4}{5}(x_2 - 1) - \frac{3}{5}y_2\right] + 1$$

$$y_1 = \left[y_2\left(\frac{4}{5}\right) - (x_2 - 1)\left(-\frac{3}{5}\right)\right] + 0$$

$$y_1 = \left[\frac{4}{5}y_2 + \frac{3}{5}(x_2 - 1)\right]$$

بتعويض x and y في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\left[\frac{4}{5}(x_2 - 1) - \frac{3}{5}y_2\right] + 1 + 2[\frac{4}{5}y_2 + \frac{3}{5}(x_2 - 1) = 1$$

$$4x_2 - 4 - 3y_2 + 8y + 6x = 5$$

$$2x_2 + y_2 = 2$$

المصادر :-

[١] أمال المختار / ١٩٩١/ المفاهيم الاساسية في الهندسة / جامعة بغداد .

[٢] اي . جي برسل / ١٩٨٣/ حساب التفاضل والتكامل مع الهندسة التحليلية.

[٣] ماكس جيجر /١٩٧٩/ هندسة التحويلات والهندسة التألفية .

[٤] download – engineering- pdf- e book.com /2790-free-book