جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعوم الصرفة

قسم رياضيات

المعادلات التفاضلية ذات الدوال المتسامية

بحث مقدم لمجلس كلية التربية للعلوم الصرفة جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد الطالب

ذو الفقار عبد الحسين رحيم علي

مشرف البحث

م . م عدي حاتم صاحب

1444 | 202 3 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَيَرَى الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ الَّذِي أُنْزِلَ إِلَيْكَ مِنْ رَبِّكَ هُوَ الْحَقَّ وَيَهْدِي إِلَى صِرَاطِ الْعَزِيزِ الْحَمِيدِ ﴾

صدق الله العلي العظيم

سبأ[6]

الاهداء

الى أصحاب العلم والنور المحمدي ائمتي(عليهم السلام) ....

الى من اضاء ذاكرتي بفيض من علمة وخلقة ....

الى من عطفها عون امي الحنون..

الى جميع اخواني اعزائي ....

الى كل قلب خفق حبأ ووفاء لي ....

الى من ساعدني ووقف الى جنبي في هذه المرحلة.........................

اهديهم ثمرة جهدي هذا عرفانا بفضلهم.

الشكر والتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم، والحمد لله رب العالمين الذي وفقنا وأعاننا على إنهاء هذا البحث والخروج به بهذه الصورة المتكاملة، فبالأمس القريب بدأنا مسيرتنا التعليمية ونحن نتحسس الطريق برهبة وارتباك، فرأينا أن (رياضيات) هدفًا ساميًا وحبًا وغاية تستحق السير لأجلها، وإن بحثنا يحمل في طياته طموح شباب يحلمون أن تكون أمتهم العربية كالشامة بين الأمم.

وانطلاقًا من مبدأ أنه لا يشكر الله من لا يشكر الناس، فإننا نتوجه بالشكر الجزيل للأستاذ (عدي حاتم صاحب) الذي رافقتني في مسيرتنا لإنجاز هذا البحث وكانت لها بصمات واضحة من خلال توجيهاتها وانتقاداتها البناءة والدعم كما نشكر عائلاتنا التي صبرت وتحملت معنا ورفدتنا بالكثير من الدعم على جميع الأصعدة، ونشكر الأصدقاء والأحباب وكل من قدم لما الدعم المادي أو المعنوي، وأخيرًا نتوجه بشكر خاص للدكتورة رئيس القسم ازل موسى جعفر ونشكر جميع أساتذة قسم الرياضيات

الفهرست.

الخلاصة

الهدف من هذا البحث هو التعرف على طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة في الفصل الاول يتضمن تعريف المعادلات التفاضلية وبعض المفاهيم الاساسية و رتبة المعادلة التفاضلية درجة المعادلة التفاضلية وحل المعادلات التفاضلية والحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية والشروط الابتدائية والحدية والثوابت الاختيارية هذا ما تناولناه في الفصل الاول اما الفصل الثاني يتحدث عن معادلات التفاضلية ذات الدوال المتسامية

الدوال المثلثية وتطبيقات الدوال المثلثية ومشتقات الدوال المثلثية

وكذلك عن الدالة الاسية هناك نوعان للدالة الاسية هي دالة التناقص الاسي و الرسم البياني للدالة الاسية وكذلك تحدثنا عن استخدامات الدوال الاسية وكذلك تحدثنا عن الدوال اللوغارتمية ومشتقات الدوال اللوغارتمية

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية المتسامية

المعادلات التفاضلية المتسامية

(1-1)المقدمة

في الرياضيات، **المعادلة التفاضلية** هي معادلة تربط دالة واحدة أو أكثر ومشتقاتها. في التطبيقات، تمثل الدوال عمومًا كميات مادية، وتمثل المشتقات معدلات التغيير الخاصة بها، وتعرف المعادلة التفاضلية العلاقة بين الاثنين. نظرًا لأن هذه العلاقات شائعة جدًا، تلعب المعادلات التفاضلية دورًا بارزًا في العديد من التخصصات بما في ذلك الهندسة والفيزياء والاقتصاد وعلم الأحياء.تتكون دراسة المعادلات التفاضلية بشكل أساسي من دراسة حلولها (مجموعة الوظائف التي تلبي المعادلة)، وخصائص حلولها. أبسط المعادلات التفاضلية يمكن حلها بواسطة صيغ واضحة. ومع ذلك، قد يتم تحديد العديد من خصائص حلول معادلة تفاضلية معينة دون حسابها بالضبط.في حالة عدم توفر تعبير مغلق للحلول، قد يتم تقريب الحلول عدديًا باستخدام أجهزة الحاسوب. تركز نظرية الأنظمة الديناميكية على التحليل النوعي للأنظمة التي تصفها المعادلات التفاضلية، في حين تم تطوير العديد من الطرق العددية لتحديد الحلول مع درجة معينة من الدقة. ظهرت المعادلات التفاضلية أولاً مع اختراع حساب التفاضل والتكامل من قبل نيوتن ولايبنز .في الفصل الثاني من عمله 1671، قام إسحاق نيوتن في كتابه *طريقة التدفقات* بأدراج ثلاثة أنواع من المعادلات التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$x_1 \ \frac{\vartheta y}{\vartheta x_1} + x_2 \ \frac{\vartheta y}{\vartheta x_2} = y$$

وفي عام 1695اقترح ياكوب بيرنولي معادلة بيرنولي التفاضلية.[6] معادلة تفاضلية عادية في شكلها التالي:

$$y` + p(x)y = Q(x)y^n$$

التي حاول لايبنز في العام التالي حلحلتها من خلال تبسيطها

تاريخيًا، درست معضلة اهتزاز حبل ما، حبل آلة موسيقية مثالاً، من طرف كل من لورن دالمبير وليونهارد أويلر ودانييل برنولي وجوزيف لوي لاغرانج. وفي عام 1746، اكتشف لورن دالمبير معادلة الموجة أحادية البُعد وبعد عشر سنين، اكتشف أويلر معادلة الموجة ثلاثية الأبعاد.[12]تم تطوير معادلة أويلر-لاغرانج في خمسينيات القرن الماضي من قبل أويلر ولاغرانج فيما يتعلق بدراساتهم لمشكلة التاوتكرون. هذه هي مشكلة تحديد منحنى تسقط عليه الجسيمات الموزونة إلى نقطة ثابتة في فترة زمنية محددة، بغض

النظر عن نقطة البداية. قام لاكرانج بحل هذه المشكلة في عام 1755 وأرسل الحل إلى أويلر . قام كلاهما بتطوير طريقة لاكرانج وتطبيقها على الميكانيكا، مما أدى إلى صياغة ميكانيكا لاكرانج.

في عام 1822، نشر فورييه عمله حول تدفق الحرارة في كتابه *النظرية التحليلية للحرارة*،[13] حيث استند في تفكيره على قانون نيوتن للتبريد، أي أن تدفق الحرارة بين جزيئين متجاورين يتناسب مع اختلاف بسيط للغاية في درجات الحرارة. يحتوي هذا الكتاب على اقتراح فورييه لمعادلة الحرارة الخاصة به من أجل نشر الحرارة الموصلة. يتم الآن تدريس هذه المعادلة التفاضلية الجزئية لكل طالب في الفيزياء الرياضية.

2-1المعادلات التفاضلية: هي علاقة تساويين المتغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن y(x) وواحد او اكثر من المشتقات التفاضلية $y`, y`` \dots \dots$ أي انها على الصورة العامة $f(x, y, y`, y``, \dots \dots)$ وهذة المعادلة تسمى المعادلة التفاضلية علادية اما اذا كان عدد المتغيرات المستقلة اكثر من واحد وليكن x ,y مستقلان وكان z(x,y) متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x,y جزئيا سميت معادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة ومشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية وهي على الصورة

$$G\left(x, y, z, \frac{\vartheta z}{\vartheta x}, \frac{\vartheta^2 z}{\vartheta y}, \frac{\vartheta z}{\vartheta x^2} \ , \dots \dots\right) = 0$$

مثال:

$$y```^2 + 2y`^3 - 5y = sinx \dots \dots \dots . (1)$$

$$y` + xy = x^2 \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\vartheta^2 z}{\vartheta x^2} + 2xy \ \frac{\vartheta^2 z}{\vartheta xy} + \frac{\vartheta z}{\vartheta y} = x \dots \dots (3)$$

نلاحظ ان المعادلتين 1و2 كلا منها معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة 3 معادلة تفاضلية جزئية

الدالة المتسامية

هي دالة غير جبرية. سميت بالمتسامية لا نها «تتسامى» على الجبر فلا يمكن تمثيلها بعدد محدود من كثيرات الحدود ومن أمثلة على الدوال المتسامية (اللوغاريتم والأسية الدوال الزائدية ومعكوساتهم وكل دالة ليست متسامية فهي جبرية والمثلثية.

3-1رتبة المعادلة : هي رتبة اعلى معادلة تفاضلية في المعادلة

4-1درجة المعادلة: هي درجة اعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط ان تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى لكسرية

مثال :اوجد رتبة ودرجة المعادلة $y`` = (5 - y`)^{\frac{3}{2}} = 0$

الحل: المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية

5-1 حل المعادلة التفاضلية: تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $f(x, y(x), y`(x), \dots\dots y^n(x)) = 0$ اذا كانت

1- قابلة للاشتقاق n من المرات
2- تحقق المعادلة التفاضلية أي $f(x, y(x), y`(x) \dots\dots . y`^n(x)) = 0$

مثال

اثبت ان $y`(x) = c\, sinx$ حلا للمعادلة التفاضلية وحيث c ثابت

الحل

$$y(x) = c \sin x \quad y`(x) = c \cos x \quad y``(x) = -c \sin x$$

وعلي نجد ان

$$y``(x) + y(x) \quad = -x \sin x + x \sin x$$

6-1 الحل العام والحل الخاص

1-الحل العام :الحفل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية

2-الحل الخاص : هو حل يحقق المعادلة التفاضلية لايشمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل علية احياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة

مثال :

الحل العام للمعادلة $y``` - 5y` + 6y` = 0$ ويكون $y(x) - c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ حيث

c_1, c_2, c_3 ثوابت الاختيارية

نجد ان بع الحلول الخاصة على الصور

$$y = e^{2x} + e^{3x} \quad y = 3 + 5e^{2x^2} \quad y = 5 - 2e^{3x}$$

7-1 تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت)

اذا اعطينا الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n نجد ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots \dots c_n) = 0$$

حيث $c_1, c_2, \ldots c_n$ ثوابت اختيارية وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجرى n من المشتقات المعادلة (i) ويكون لدينا n+1 من المعادلة عبارة عن المعادلة (i) وبالإضافة الى n معادلة من العمليات التفاضلية المطلوب

مثال :

اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $(1) \ldots\ldots\ldots \qquad y = c \sin x$

الحل

$$y` = c \cos x \ldots\ldots\ldots (2)$$

نحذف e من المعادلتين من(2) , (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة

$$y` = ycot\ x$$

<u>7-1 الشروط الابتدائية والحدية</u>

في بعض المسائل معادلات التفاضلية العادية نعطي بعض الشروط التي يجب ان تحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية وهذا الشرط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التي تضهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لايجاد الحل العام

مثال:

اوجد الحل المعادلة $y` = 2x$ التي تقق الشروط $y(2) = 3$

الحل :

بتكامل المعادلة التفاضلية $y(x) = x2 + c$

بالتعويض في الشروط $3 = 4 + c \rightarrow c = -1$

الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

والحل يعني هندسيا منحني يمر بالنقطة (3,2)

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثابتين اختياريين اذا يستلزم تحديد الثابتين وجود الشرطان اضافيان للمعادلة وهذان الشرطان يأخذ صورا مختلفة منها

1-اذا اعطى هذا الشرطان عند نفس النقط x_0 مثل

$$y(x_0) = a \qquad , y(x_b) = b$$

فان تلك الشروط تعرف بالروط الابتدائية عند x_0 نسمي المعادلة التفاضلية بالاضافة الى الشلروط الابتدائية مسالة قيمة ابتدائية

2-اذا اعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1 \quad , y(x_2) = y_2$ كانت الشروط شروطا حدية وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة الى الشروط الحدية مسالة القيمة الحدية

ملاحظة :الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى في الدالة المجهولة y هي $y` = f(x, y)$

والتي يمكن كتابتها بالصورة $p(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

مثال

اوجد حل مسالة القيمة الابتدائية

$$y` = x \quad y(0) = 1 \quad , y`(0) = -1$$

الحل

بأجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2$$

الذي يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة

$$y` = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$$y`(0) = -1 \rightarrow -1 = c_1 \quad \rightarrow c_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow 1 = c_2$$

يكون حل المسالة المعطاة هو

$$y = \frac{1}{6} \quad x^3 - x + 1$$

8-1 نظرية الوجود والحدودية لحل المعادلة التفاضلية العادية

سوف نعرض النظرية الأساسية لوجود ووحدوية حل المعادلة التفاضلية العادية

نظرية

نفرض المعادلة التفاضلية

$$y` = f(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

ونفرض الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

واذا كانت الدالة f(x,y) المعروفة في المنطقة المغلقة المحدودة R

$$R: |x-x_0| \ , |y-y_0| \le b$$

حيث a,b ثابتان تحقق

1- الدالة f(x,y) متصلة ومن ثم محدودة أي اذا وجد عدد موجب m فان $|f(x,y)| \le$ m
2- الدالة f(x,y) لها مشتقة جزئية بالنسبة الى y ومحدودة أي ان $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le k$
3- حيث k عدد موجب

فان المعتدلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ ويحقق الشروط الابتدائي 2 في المنطقة $|x-x_0| \le h$ حيث $h = \min\left(a, \frac{b}{m}\right)$

مثال

ابحث عن وجود حل وحيد المسالة الابتدائية $y` = x^2 + y^2; y(0) = 0$

اذن الحل باي شروط ابتدائية يكون وحيدا

نكون المستطيل R الذي مركزة (0,0) أي

$$a, b > 0 \ \ , R: |x| \le a \ \ , |y| \le b$$

$$|f(x,y)| = |x^2 + y^2| \le |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2 = m, h = \min\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

أي ان h تعتمد على a,b فاذا كانت مثلا a=b=1 نجد ان $h = \min\left(a, \frac{1}{2}\right)$ أي ان h=1/2

بالتالي فان المعادلة $y` = x^2 + y^2$ لها حل وحيد في الفترة $|x| \le \frac{1}{2}$ يحقق الشرط y(0)=0

9-1 الثوابت الاختيارية

عادة تظهر الثوابت الاختيارية في حل المعادلات التفاضلية ويكون الثابت اختياريا اذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على على المتغير التابع او المتغير المستقل وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبير ما جوهرية اا لم يكن دمج احدهما في ثابت اخر

مثال

لنعتبر $T(X) = Ae^{-x^2+B}$

وقد يبدو الاول و هلة ان هناك ثابتين A,B ولكن بإمكان النظر نرى انه يمكن دمج الثابتين في الثابت الجوهري واحد :

$$T(x) = Ae^{-x^2+B} \;\; = Ae^{B}.e^{-x^2} = ce^{-x^2}$$

$$c = Ae^{B}$$

لنعتبر التعبير $T(x) = A_{1\sin}\, x + A_2 \sin 3x + A_3 \sin^3 x$

الذي يتضمن ثلاثة ثوابت ولكن الحقيقة يمكن اختزالهم الى ثابتين جوهريين فقط حيث

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$T(x)A_1 \sin x + A_2 \sin 3x + A_3[\frac{3}{4} sijn\ x - \frac{1}{4}\sin 3x\ ]$$

$$= \left(A_1 + \frac{3}{4}A_2\right) sinx + \left(A_2 - \frac{1}{4}A_3\right)\sin 3x$$

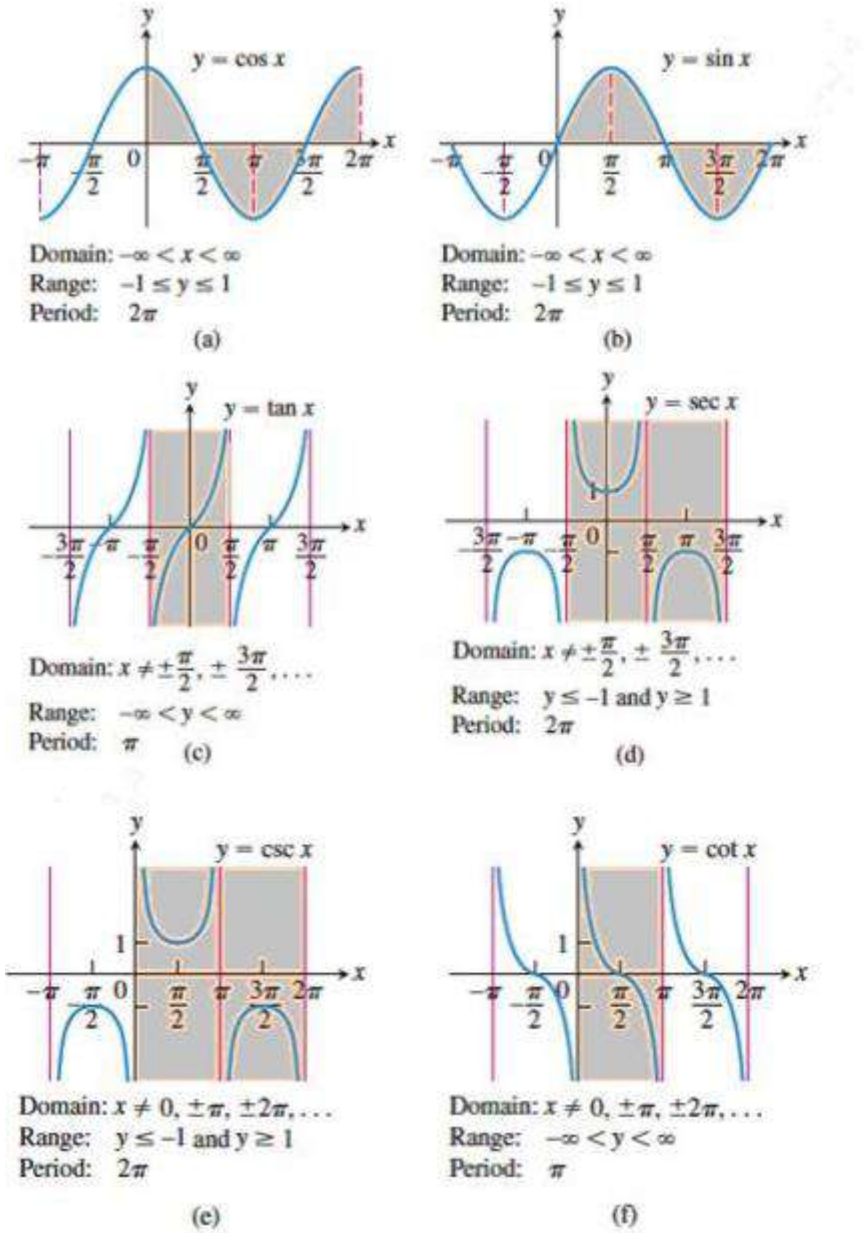
$$= A_4 \sin x + A_5 \sin 3x$$

$$A_4 = A_1 + \frac{3}{4}, A_5 - \frac{1}{4}A_3$$

الفصل الثانـي
طرق حل معادلات تفاضلية ذات الدوال المتسامية

(1-2) الدوال المثلثية

وهي دوال لزاوية هندسية وهي ذات اهمية لدراسة مثلث او عرض ظواهر دورية او متكررة كالموجات ويمكن تعريف هذه الدوال كنسبة بين اضلاع مثلث قائم يحتوي تلك الزاوية و الشكل ادناه يوضح رسم هذه الدوال و منطلق Domain ومدى Range ودورة period كل منها [6]



شكل رقم (1)

(2-2)بعض التطبيقات المثلثية

1-$\sin(x \pm y) = sinx\ cosy\ \pm \sin y\ \cos x$

2-$\sin 2x = 2sinx\ cosx$

$3 - \cos(x \pm y) = cosx\ siny\ \pm \sin x \sin y$

$4 - cos2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$5 - \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, 1 + \cot^2 = \csc^2 x$

6-$\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$

$$1 - \frac{d}{dx}(sinu) = cosu.\frac{du}{dx}$$

$$2 - \frac{d}{dx}(cosu) = -sinu\ .\frac{du}{dx}$$

$$3 - \frac{d}{dx}(tanu) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$4 - \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$5 - \frac{d}{dx}(\sec u) = secu \tan u \frac{du}{dx}$$

$$6 - \frac{d}{dx}(\csc u) = -cscu\ cotu\ .\frac{du}{dx}$$

مثال 1

جد مشتقة الدالة $\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 2x \times cos2x \times 2$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 2x \times cos2x \times 2$$

$$= 6\sin^2 2xcos2x$$

مثال 2

جد مشتقة الدالة

$$x = \pi\ , y = x^2sinx + 2xcosx - 2xsinx + 2cosx - 2cosx = x^2cosx$$

الحل

$$y' = x^2cosx + 2xsinx - 2xsinx + 2cosx - 2cosx = x^2cosx$$

$$y'(\pi) = \pi^2cos\pi = \pi^2(-1) = -\pi^2$$

المثال 3

اذا كانت $y = tant, x = \sec^2 t$ فاثبت ان $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt} = sect\ tant$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 t \times \frac{1}{sect\ tant}$$

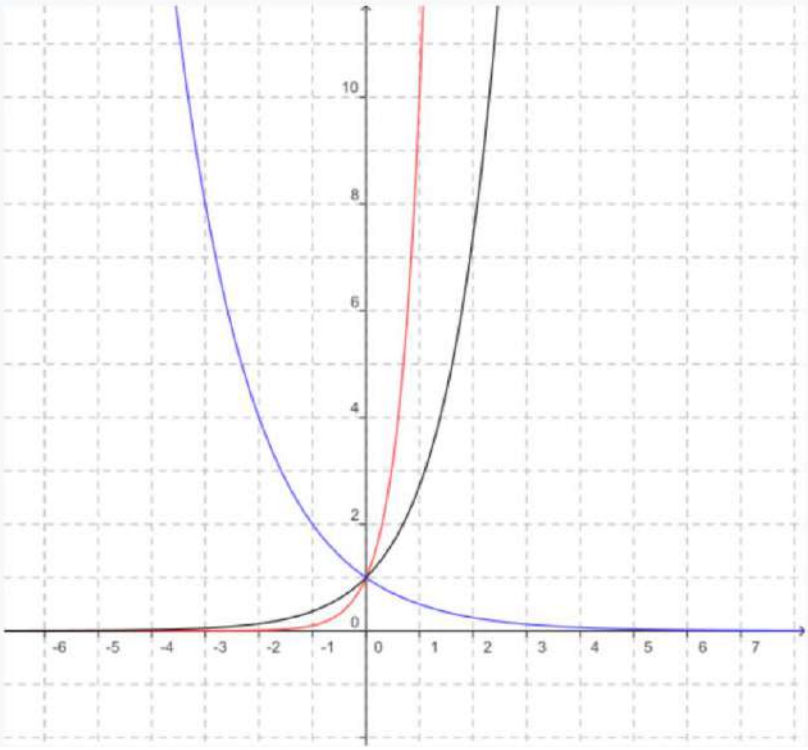
$$= \frac{sect}{tant} = \frac{\frac{1}{cost}}{\frac{sint}{cost}}$$

$$= \frac{1}{\sin t} = csct$$

(3-2)تعريف الدالة الاسية :

هي واحدةٌ من أكثر الدوال أهميةً في الرياضيات. تُستخدم للدلالة على علاقـةٍ يتغيـر وفقها متغيرٌ مستقلٌ بطريقةٍ ثابتةٍ، كما التغير النسبي للمتغير التابع، وغالبًا ما تُكتـب exp(x)، ويعتمـد عليهـا فـي الفيزيـاء والكيميـاء والهندسـة والبيولوجيـا الرياضـية والاقتصاد والرياضيات. تتميز الدوال الاسية عن بقية الدوال بوجـود الأس أو القـوة وهي المتغير ذاته، وهذا ما يخالف بقيـة الـدوال، حيـث يكـون المتغيـر هـو الأسـاس والقوة هي رقمًا . بينما في الدالة الأسية، يتغير الوضع فيصـبح المتغيـر هـو القـوة (الأس)، والأساس هو رقم للتعامل مع الدوال الاسية لا بدّ من معرفة كيفيـة عملهـا، فإن كان الأس سالبًا يجب نقل الأساس إلى الجهة الأخرى من خط الكسر؛ أي بمعنى إن كانت قيمة المتغير xسالبة مثلًا (-1) تصبح الدالة الأسية التي تكون قيمة b=2: بينما إن كانت قيمته موجبةً مثلًا 2 تصبح الدالة الأسية:1

دالة أسية



اذا يميز هذه الدالة عن باقي الدوال الرياضية هو وجود الأس، والأس في هذه الدالة يعتبر هو القوة وهو المتغير أيضاً، بينما في الدوال الرياضية الأخرى يكون المتغير هو الأساس وليس الأس كما في الدالة الأسية، للاستفادة من هذه الدالة يجب معرفة إذا ما كان الأس أي القوة سالباً أم موجباً، في حالة كون الأس سالب يلزم نقل الأساس من موضعه إلى الناحية الأخرى من الكسر

وهناك نوعان من الدوال الاسية:

النوع الأول : دالة النمو الأسي

هي دالةٌ تشير إلى قيمٍ متزايدةٍ تبدأ بشكلٍ بطيءٍ ثم تزداد بوتيرةٍ متسارعةٍ مع مرور الوقت وهذا ما يدعى بالنمو، حيث تعبر عن معدل النمو المتزايد للسكان والعائدات أو استخدام تقنيةٍ ما بشكلٍ ثابتٍ. يمكن التعبيرمن خلال علاقةٍ بين المتغير x ومعدل

النمو r والأس t الدال على الزمن كان يمكن ملاحظة أن النمو t الأسي أكبر وأسرع من النمو كثير الحدود. هي دالة من خلالها يمكن استنتاج الأحداث

النوع الثاني : دالة التناقص الأسي

هي إحدى الدوال الاسية المستخدمة في الرياضيات للدلالة على تناقص مقدارٍ معينٍ بمعدلٍ ثابتٍ خلال فترةٍ زمنيةٍ، ويمكن التعبير عنها بالصيغة:

Y:الكمية النهائية.

a: الكمية الأساسية.

B : عامل التناقص.

X: الفترة الزمنية.

يختلف التناقص الخطي في اعتماد عامل التناقص على نسبة الكمية الحقيقية التي سيتغير الرقم الحقيقي الدال عليها مع مرور الوقت، في حين يتناقص الرقم الحقيقي بنفس المقدار خلال فترةٍ زمنيةٍ محددةٍ في الدالة الخطية. تستخدم دالة التناقص الأسي في العديد من المجالات العملية مثل حساب تكلفة استخدام شيءٍ محددٍ خلال فترةٍ زمنيةٍ طويلةٍ.

الرسم البياني للدالة الاسية

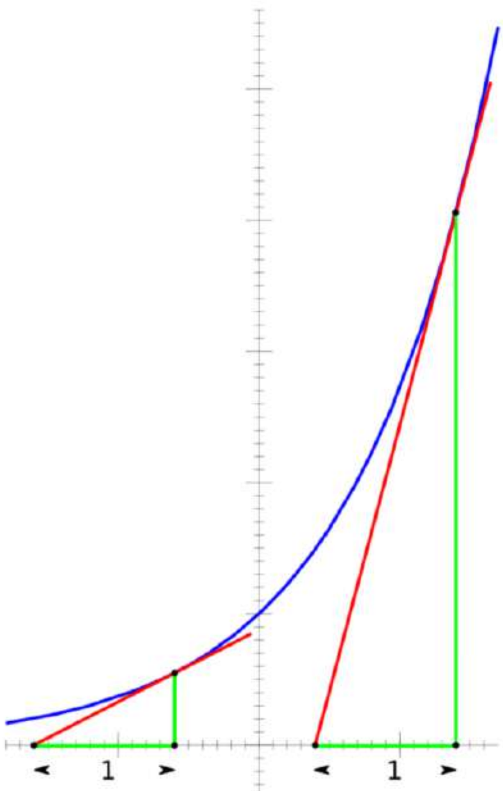
عند دراسة الدوال الاسية من المفيد جدًا معرفة الشكل العام لرسمها البياني، حيث يوجد لذلك خياران؛ الأول حين يكون الأساس أكبر من 1، والثاني أصغر من 1.

الأساس في الدوال الاسية أكبر من 1

في حال كان الأساس أكبر من 1، سيزداد طول الرسم البياني للدالة الأسية

كلما اتجه إلى اليمين ويصبح أقصر كلما اتجه إلى اليسار ويقترب من المحور x دون أن يلامسه.

الأساس في الدوال الاسية أصغر من



في حال كان الأساس في الدالة الأسية أصغر من 1 لكنه موجبٌ، سيتجه الرسم البياني للدلالة إلى الأسفل، كلما اتجه إلى اليمين، لكنه يبقى موجبًا بينما سيزداد طوله بسرعةٍ كلما اتجه إلى اليسار.

(5-2)استخدامات الدوال الاسية :

يرى العديد من الناس خاصة الطلاب الذين يدرسون الدوال الرياضية ومنها الدالة الأسية أنها ليس لها فائدة في حياتنا اليومية، وذلك غير صحيح لأن الدوال الأسية لها دور كبير في تطور حياة الإنسان فهي تتواجد وتستخدم في شؤون كثيرة منذ استيقاظ الإنسان من نومه مرورًا بأحداث يومه الكثيرة إلى أن يخلد الإنسان إلى النوم.

حيث يمكن استخدام الدوال الاسية في مجالاتٍ كثيرةٍ كحساب الفائدة المركبة في التعاملات المالية، ومعادلات النمو السكاني، والاضمحلال الإشعاعي كما ان له استخدامات واسعة في الفيزياء والكيمياء والهندسة الكهربائية والهندسة الميكانيكية والإحصاء وغيرها من العلوم.

مثال للدالة الأسية بصفة عامة

تزايد الميكروبات : ينقسم الميكروب إلى نصفين مكونا ميكروبين، وينقسم كل منهما إلى نصفين فيصبحوا أربعة ميكروبات. ثم تنقسم الأربعة ميكروبات وتصبح ثمانية ميكروبات.

أي يبلغ عدد الميكروبات بعد 3 انقسامات :

N=23

N=8

فإذا أردنا معرفة عدد الميكروبات بعد 6 انقسامات، صغنا المعادلة كالآتي:

N=26

N=64

أي أن عدد الميكروبات الناتجة عن ميكروب واحد بعد ستة انقسامات يبلغ 64 ميكروبا.[7]

(6-2)تعريف اللوغاريتم

ي الدالة العكسية للدوال الأسية ويُعرَّف **لوغاريتم** عدد ما بالنسبة لأساس ما، بأنه الأس المرفوع على الأساس والذي سينتج ذلك العدد. فعلى سبيل المثال فلوغاريتم 1000 بالنسبة للأساس 10 هو 3 لأن $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$.وعموما، يمكن القول أنه إذا كان $x = b^y$ فإن لوغاريتم x بالنسبة للأساس b هو y يعبر عن ذلك رياضيات بالعلاقة[8]:

$\log_b x=y$

وبالرجوع إلى المثال يصبح:

$\log_{10}(1000) = 3.$

يعرف اللوغاريتم العشري بأنه لوغاريتم عدد ما بالنسبة للأساس 10 والذي يستخدم بشكل كبير في حساب التطبيقات العلمية والهندسية .الأسس أو اللوغاريتم هي العملية العكسية للدوال الأسية ويُعرَّف اللوغاريتم الطبيعي بأنه لوغاريتم عدد بالنسبة لأساس هو العدد النيبيري (e) والذي له تطبيقات كثيرة في الحسابات الهندسية والعلمية وفي الرياضيات البحتة وخاصة في التفاضل والتكامل .في حين يعرف اللوغاريتم الثنائي لعدد ما بأنه لوغاريتمه بالنسبة للأساس 2 ويستخدم بشكل كبير في علم الحاسوب والدارات المنطقية.

كان اللوغاريتم معروفا لدى العرب نسبة إلى العالم الخوارزمي، ولقد أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر على يد العالم جون نابير وسيلةً لتبسيط الحسابات، ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحون والعلماء والمهندسون والفلكيون وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر، مستخدمين المساطر الحاسبة والجداول اللوغاريتمية .وتعود كلمة اللوغاريتم إلى العالم العربي الخوارزمي حيث يرد أسمه في اللغة الإنجليزية بكلمة Algorism و algorithmواللتان تنبعان من كلمة*Algoritmi* ، الشكل اللاتيني لاسمه الخوارزمي. كما استفادوا من خواص اللوغاريتمات باستبدال عمليات الضرب لإيجاد لوغاريتم جداء عددين بخاصية الجمع وفق الخاصية[8]:

$$\boldsymbol{log_b(xy) = log_b(x) + log_b(y)}$$

(7-2)مشتقة الدالة اللوغاريتمية

نستخدم القانون التالي لايجاد مشتقة الدالة اللوغاريتمية

اذا كان

$$y = \ln u$$

حيث u دالة او متغير

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

مثال

جد مشتقة الدالة

$$y = ln\, sinx$$

الحل : الدالة ه دالة لوغاريتمية اذن نطبق القانون السابق حيث $u = sinx$ اذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sinx}.cosx$$

مثال :جد مشتقة الدالة $y = ln\frac{x}{1+sinx}$

الحل : الدالة هي دالة لوغاريتمية $u = ln\frac{x}{1+sinx}$ نلاحظ ان الدالة هي عبارة حاصل قسمة دالتين اذن نطبق قانون مشتقة الدالة حاصل قسمة دالتين اذن

$$\frac{du}{dx} = (1 + sinx).\frac{(1 - x)(cosx)}{(1 + sinx)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1 + sinx - x)(cosx)}{(1 + sinx)^2}$$

نعوض قيمة الدالة المساعدة u ومشتقة الدالة u في قانون مشتقة الدالة اللوغاريتمية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + sinx} . \frac{1 + sinx - x(cosx)}{(1 + sinx)^2}$$

بالتبسيط

$$\frac{dy}{dx}\ \frac{1 + sinx}{x} . \left(\frac{1 + sin - x(cosx)}{(1 + sinx)^2}\right) = \frac{1 + sinx - xcosx}{x(1 + sinx)}$$

Refrence

المصادر الأجنبية

1. Dennis G. Zill (15 March 2012). A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Cengage Learning. ISBN 1-285-40110-7.
2. Cannon, John T.; Dostrovsky, Sigalia (1981). "The evolution of dynamics, vibration theory from 1687 to 1742". **6**. New York: Springer-Verlag: ix + 184 pp. ISBN 0-3879-0626-6. GRAY, JW (July 1983). "BOOK REVIEWS" (PDF). Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. **9** (1)
3. GRAY, JW (July 1983). "BOOK REVIEWS". Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. **9** (1).
4. Wheeler, Gerard F.; Crummett, William P. (1987). "The Vibrating String Controversy". Am. J. Phys. **55** (1): 33–37. Bibcode:1987AmJPh..55...33W. doi:10.1119/1.15311.
5. Paris: Firmin Didot Père et Fils. OCLC 2688081.

المصادر العربية

5- حسن مصطفى العويضي , المعادلات التفاضلية , الجزء الأول , مكتب الرشيد

6-فؤاد حمزة- الدوال المثلثية – جامعة بابل كلية العلوم قسم علوم الحياه مرحلة اولى محاضرات الرياضيات سنه 2015

7-محمد رضا عبيد-الدالة الاسية –الدالة الاسية -مرحلة ثالثة

المصادر الالكترونية

-8

https://wikimedia.org/api/rest_v1/media/math/render/svg/3b7e4e219e9ea63b9a829d034045c58579323f33