جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل / كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

سلاسل ماركوف وعلاقتها بحياتنا اليومية

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة / جامعة بابل
وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

إعداد الطالب

هشام عواد عبيد

إشراف الدكتور

م.م.حيدر فيصل غازي

1444هـ 2023م

بسم الله الرحمن الرحيم

(أَلَـمْ تَـرَ أَنَّ اللَّهَ أَنـزَلَ مِـنَ السَّـمَاء مَـاء فَأَخْرَجْنَـا بِـهِ ثَمَـرَاتٍ مُّخْتَلِفًـا أَلْوَانُهَـا وَمِـنَ الْجِبَـالِ جُـدَدٌ بِـيضٌ وَحُمْـرٌ مُّخْتَلِـفٌ أَلْوَانُهَـا وَغَرَابِيـبُ سُـودٌ، وَمِـنَ النَّـاسِ وَالـدَّوَابِّ وَالْأَنْعَـامِ مُخْتَلِـفٌ أَلْوَانُـهُ كَذَلِكَ إِنَّمَا يَخْشَى اللَّهَ مِنْ عِبَادِهِ الْعُلَمَاء إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ غَفُورٌ)

صدق الله العلي العظيم

سورة فاطر : الآية (27-28)

الشكر والتقدير

في الختام أحمد الله سبحانه وتعالى الذي منَّ علينا بنعمة العقل والدين، وهو القائل في محكم التنزيل: "فَٱذْكُرُونِىٓ أَذْكُرْكُمْ وَٱشْكُرُواْ لِى وَلَا تَكْفُرُونِ"، وقد قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: "مَنْ صَنَعَ إِلَيْكُمْ مَعْرُوفًا فَكَافِئُوهُ، فَإِنْ لَمْ تَجِدُوا مَا تُكَافِئُونَهُ فَادْعُوا لَهُ حَتَّى تَرَوْا أَنَّكُمْ قَدْ كَافَأْتُمُوهُ"، وأيضًا وفاءً وتقديرًا واعترافًا مني بالجميل والفضل الجزيل أتقدم بجزيل الشكر للأساتذة الأفاضل المخلصين الذين لم يبخلوا علينا بأي جهد في مساعدتنا في مجال البحث العلمي وفي دعمنا للوصول إلى نجاحنا، ولهم منِّي خالص آيات الشكر وأسمى باقات التقدير على هذه الدراسة، وهم أصحاب الفضل في توجيهي ومساعدتي في تجميع المادة البحثية، فجزاهم الله كل خير عني وعن جميع الطلاب، ولا أنسى أن أتقدم بجزيل الشكر للأستاذ (حيدر فيصل غازي) ، الذي قام بتوجيهي طوال فترة إعداد هذا البحث ، وأخيرًا أتقدم بجزيل الشكر إلى كل من مدَّ لي يد العون والمساعدة في إعداد هذه الدراسة على أكمل وجه، والحمد لله رب العالمين.

الإهـــداء

وصلت رحلتي الجامعية إلى نهايتها بعد تعب ومشقَّة وها أنا ذا أختم بحث تخرُّجي بكل همَّة ونشاط وأمتنُّ لكل من كان له فضل في مسيرتي، وساعدني ولو باليسير،

الأبوين، الأهل، الأصدقاء، الأساتذة المُبجَّلين..

أُهديكم بحث تخرُّجي

الفهرست

الآية الكريمة	I
الشكر والتقدير	II
الإهداء	III
المقدمة	1
التعريف	1
بعض التعاريف الأخرى لهذه السلسلة	2
أنواع سلاسل ماركوف	2
التحولات	3
التاريخ	4
الأمثلة	5
الإختلافات	6
هناك ثلاث تعريفات مكافئة للعملية	7
علاقة التوزيع الثابتة بالمتجهات الذاتية والمبسطة	8
سلسلة ماركوف المتجانسة زمنياً مع مساحة دالة محدودة	9
سرعة التقارب مع التوزيع الثابت	10
مساحة الحالة العامة	12
إستخدامات سلاسل ماركوف	13
فروض تحليل قرارات ماركوف	14
أهم الأساسيات الرياضية المتعلقة بسلاسل ماركوف مستمرة الزمن	15
إفتراضات تحليل ماركوف	15
مجالات استخدام سلاسل ماركوف	16
أمثلة عن سلاسل ماركوف	17
المصادر والمراجع	23

فهرست الأشكال

شكل (1)	2
شكل (2)	5
شكل (3)	12
شكل (4)	13
شكل (5)	17
شكل (6)	22

مقدمة

سلسلة ماركوف أو عملية ماركوف هي نموذج عشوائي يصف سلسلة من الأحداث المحتملة التي يعتمد فيها احتمال كل حدث فقط على الحالة التي تم تحقيقها في الحدث السابق. بشكل غير رسمي ، يمكن التفكير في هذا على أنه "ما سيحدث بعد ذلك يعتمد فقط على الوضع الآن". تسلسل لا نهائي قابل للعد ، حيث تتحرك السلسلة في خطوات زمنية منفصلة ، يعطي سلسلة ماركوف منفصلة الوقت (DTMC). تسمى عملية الوقت المستمر سلسلة ماركوف ذات الوقت المستمر (CTMC). سميت على اسم عالم الرياضيات الروسي أندريه ماركوف.

سلاسل ماركوف لها العديد من التطبيقات كنماذج إحصائية لعمليات العالم الحقيقي ، مثل دراسة أنظمة التحكم في التطواف في السيارات أو طوابير الانتظار أو طوابير العملاء الذين يصلون إلى المطار وأسعار صرف العملات وديناميكيات أعداد الحيوانات.

عمليات ماركوف هي الأساس لطرق المحاكاة العشوائية العامة المعروفة باسم سلسلة ماركوف مونت كارلو ، والتي تستخدم لمحاكاة أخذ العينات من توزيعات الاحتمالات المعقدة ، وقد وجدت تطبيقا في إحصاءات بايزي ، والديناميكا الحرارية ، والميكانيكا الإحصائية ، والفيزياء ، والكيمياء ، والاقتصاد ، والتمويل ، والإشارة المعالجة ونظرية المعلومات ومعالجة الكلام.

تستخدم الصفات ماركوفيان وماركوف لوصف شيء مرتبط بعملية ماركوف.

التعريف

عملية ماركوف هي عملية عشوائية تلبي خاصية ماركوف (توصف أحيانا بأنها "انعدام الذاكرة"). بعبارات أبسط ، إنها عملية يمكن من خلالها إجراء تنبؤات بشأن النتائج المستقبلية بناء على حالتها الحالية فقط - والأهم من ذلك - أن هذه التنبؤات جيدة مثل تلك التي يمكن إجراؤها مع معرفة التاريخ الكامل للعملية. وبعبارة أخرى، إذا كان الوضع الحالي للنظام، فإن حالاته المستقبلية والماضية مستقلة.

سلسلة ماركوف هي نوع من عمليات ماركوف التي تحتوي إما على مساحة حالة منفصلة أو مجموعة فهرس منفصلة (غالبا ما تمثل الوقت) ، لكن التعريف الدقيق لسلسلة ماركوف يختلف. على سبيل المثال ، من الشائع تعريف سلسلة ماركوف على أنها عملية ماركوف إما في وقت منفصل أو مستمر مع مساحة حالة قابلة للعد (وبالتالي بغض النظر عن طبيعة الوقت) ، ولكن من الشائع أيضا تعريف سلسلة ماركوف على أنها ذات وقت منفصل في فضاء الحالة القابل للعد أو المستمر (وبالتالي بغض النظر عن مساحة الحالة).

بعض التعاريف الاخرى لهذه السلسلة:

1- هي إحدى أدوات بحوث العمليات تبحث في تحليل الاتجاهات الحالية لبعض المتغيرات للتنبؤ باتجاهاتها في المستقبل .

2- هي عملية عشوائية تحمل خاصية ماركوفية , أي التكهن بالمستقبل إنطاقا من الحاضر دون الحاجة إلى معرفة الماضي.

أنواع سلاسل ماركوف :-

يجب تحديد مؤشر معلمة مساحة ووقت حالة النظام. يقدم الجدول التالي نظرة عامة على الحالات المختلفة لعمليات ماركوف لمستويات مختلفة من عمومية فضاء الحالة وللوقت المنفصل مقابل الوقت المستمر:

	مساحة حالة قابلة للعد	مساحة الحالة المستمرة أو العامة
الوقت المنفصل	(وقت منفصل) سلسلة ماركوف على مساحة حالة قابلة للعد أو محدودة	سلسلة ماركوف على مساحة حالة قابلة للقياس (على سبيل المثال ، سلسلة هاريس)
الوقت المستمر	عملية ماركوف في الوقت المستمر أو عملية قفزة ماركوف	أي عملية عشوائية مستمرة مع خاصية Markov (على سبيل المثال، عملية Wiener)

شكل (1)

لاحظ أنه لا يوجد اتفاق نهائي في الأدبيات على استخدام بعض المصطلحات التي تشير إلى حالات خاصة من عمليات ماركوف. عادة ما يتم حجز مصطلح "سلسلة ماركوف" لعملية ذات مجموعة منفصلة من الأوقات ، أي سلسلة ماركوف ذات الوقت المنفصل (DTMC) لكن عددا قليلا من المؤلفين يستخدمون مصطلح "عملية ماركوف" للإشارة إلى **سلسلة ماركوف المستمرة (CTMC)** دون ذكر صريح. بالإضافة إلى ذلك ، هناك امتدادات أخرى لعمليات ماركوف يشار إليها على هذا النحو ولكنها لا تندرج بالضرورة ضمن أي من هذه الفئات الأربع (انظر نموذج ماركوف). وعلاوة على ذلك، ليس من الضروري أن يكون المؤشر الزمني ذا قيمة حقيقية؛ بل يجب أن يكون ذا قيمة حقيقية. كما هو الحال مع مساحة الحالة ، هناك عمليات يمكن تصورها تتحرك عبر مجموعات

الفهرس مع تركيبات رياضية أخرى. لاحظ أن سلسلة ماركوف ذات الزمن المستمر في فضاء الحالة العامة عامة لدرجة أنه ليس لها مصطلح معين.

في حين أن معلمة الوقت عادة ما تكون منفصلة ، فإن مساحة الحالة لسلسلة ماركوف لا تحتوي على أي قيود متفق عليها بشكل عام: قد يشير المصطلح إلى عملية على مساحة حالة تعسفية. ومع ذلك ، فإن العديد من تطبيقات سلاسل ماركوف تستخدم مساحات حالة محدودة أو لا حصر لها ، والتي لها تحليل إحصائي أكثر وضوحا. إلى جانب معلمات مؤشر الوقت ومساحة الحالة ، هناك العديد من الاختلافات والامتدادات والتعميمات الأخرى (انظر الاختلافات). للتبسيط ، تركز معظم هذه المقالة على حالة مساحة الحالة المنفصلة والوقت المنفصل ، ما لم يذكر خلاف ذلك.

التحولات

تسمى التغييرات في حالة النظام التحولات. [1] تسمى الاحتمالات المرتبطة بتغيرات الحالة المختلفة احتمالات الانتقال. تتميز العملية بمساحة حالة ، ومصفوفة انتقالية تصف احتمالات انتقالات معينة ، وحالة أولية (أو توزيع أولي) عبر مساحة الحالة. وفقا للاتفاقية ، نفترض أن جميع الحالات والتحولات المحتملة قد تم تضمينها في تعريف العملية ، لذلك هناك دائما حالة تالية ، ولا تنتهي العملية.

تتضمن العملية العشوائية المنفصلة نظاما في حالة معينة في كل خطوة ، مع تغيير الحالة بشكل عشوائي بين الخطوات. غالبا ما ينظر إلى الخطوات على أنها لحظات في الوقت المناسب ، ولكن يمكن أن تشير بنفس القدر إلى المسافة المادية أو أي قياس منفصل آخر. رسميا ، الخطوات هي الأعداد الصحيحة أو الأعداد الطبيعية ، والعملية العشوائية هي تعيين هذه الحالات. تنص خاصية ماركوف على أن التوزيع الاحتمالي الشرطي للنظام في الخطوة التالية (وفي الواقع في جميع الخطوات المستقبلية) يعتمد فقط على الحالة الحالية للنظام ، وليس بالإضافة إلى حالة النظام في الخطوات السابقة.

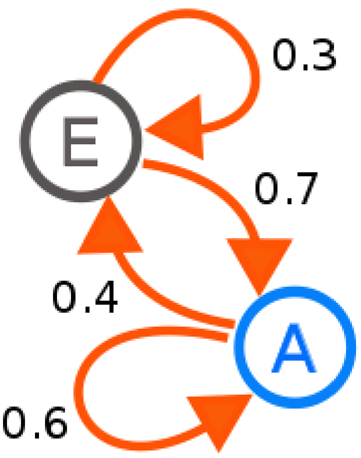
نظرا لأن النظام يتغير بشكل عشوائي ، فمن المستحيل عموما التنبؤ على وجه اليقين بحالة سلسلة ماركوف في نقطة معينة في المستقبل. ومع ذلك ، يمكن التنبؤ بالخصائص الإحصائية لمستقبل النظام. في العديد من التطبيقات ، تعتبر هذه الخصائص الإحصائية مهمة.

تاريخ

درس أندريه ماركوف عمليات ماركوف في أوائل القرن 20 ، ونشر ورقته الأولى حول هذا الموضوع في عام 1906.تم اكتشاف عمليات ماركوف في وقت مستمر قبل وقت طويل من عمله في أوائل القرن العشرين في شكل عملية بواسون. كان ماركوف مهتما بدراسة امتداد التسلسلات العشوائية المستقلة ، بدافع الخلاف مع بافل نيكراسوف الذي ادعى أن الاستقلال ضروري لاستمرار القانون الضعيف للأعداد الكبيرة في ورقته الأولى عن سلاسل ماركوف ، التي نشرت في عام 1906 ، أظهر ماركوف أنه في ظل ظروف معينة ، فإن متوسط نتائج سلسلة ماركوف سيتقارب إلى متجه ثابت للقيم ، مما يثبت وجود قانون ضعيف للأعداد الكبيرة دون افتراض الاستقلال ، والذي كان ينظر إليه عموما على أنه شرط لمثل هذه القوانين الرياضية. استخدم ماركوف لاحقا سلاسل ماركوف لدراسة توزيع حروف العلة في يوجين أونيجين ، الذي كتبه ألكسندر بوشكين ، وأثبت نظرية الحد المركزي لمثل هذه السلاسل.

في عام 1912 ، درس هنري بوانكاريه سلاسل ماركوف على مجموعات محدودة بهدف دراسة خلط البطاقات. تشمل الاستخدامات المبكرة الأخرى لسلاسل ماركوف نموذج الانتشار ، الذي قدمه بول وتاتيانا إهرينفيست في عام 1907 ، وعملية التفرع ، التي قدمها فرانسيس جالتون وهنري ويليام واتسون في عام 1873 ، قبل عمل ماركوف. بعد عمل جالتون وواتسون ، تم الكشف لاحقا عن أن عملية التفرع الخاصة بهم قد تم اكتشافها ودراستها بشكل مستقل قبل حوالي ثلاثة عقود من قبل إيرينيه جول بينايمي. ابتداء من عام 1928 ، أصبح موريس فريشيه مهتما بسلاسل ماركوف ، مما أدى في النهاية إلى نشره في عام 1938 دراسة مفصلة عن سلاسل ماركوف.

طور أندريه كولموغوروف في ورقة عام 1931 جزءا كبيرا من النظرية المبكرة لعمليات ماركوف المستمرة الزمن.استلهم كولموغوروف جزئيا من عمل لويس باشلييه عام 1900 حول التقلبات في سوق الأوراق المالية وكذلك عمل نوربرت وينر على نموذج أينشتاين للحركة البراونية. قدم ودرس مجموعة معينة من عمليات ماركوف المعروفة باسم عمليات الانتشار ، حيث اشتق مجموعة من المعادلات التفاضلية التي تصف العمليات. بشكل مستقل عن عمل كولموغوروف ، اشتق سيدني تشابمان في ورقة عام 1928 معادلة ، تسمى الآن معادلة تشابمان-كولموغوروف ، بطريقة أقل صرامة من الناحية الرياضية من كولموغوروف ، أثناء دراسة الحركة البراونية. تسمى المعادلات التفاضلية الآن معادلات كولموغوروف أو معادلات كولموغوروف-تشابمان. علماء الرياضيات الآخرون الذين ساهموا بشكل كبير في أسس عمليات ماركوف يشملون ويليام فيلر ، بدءا من ثلاثينيات القرن العشرين ، ثم في وقت لاحق يوجين دينكين ، بدءا من خمسينيات القرن العشرين.



شكل (2) يمثل عملية ماركوف ذات الحالتين. الأرقام هي احتمال التغيير من ولاية إلى أخرى.

أمثلة

- المشي العشوائي على أساس الأعداد الصحيحة ومشكلة خراب المقامر هي أمثلة على عمليات ماركوف. تمت دراسة بعض الاختلافات في هذه العمليات قبل مئات السنين في سياق المتغيرات المستقلة. مثالان مهمان لعمليات ماركوف هما عملية وينر ، والمعروفة أيضا باسم عملية الحركة البراونية ، وعملية بواسون ، والتي تعتبر أهم العمليات العشوائية المركزية في نظرية العمليات العشوائية. هاتان العمليتان هما عمليات ماركوف في وقت مستمر ، في حين أن المشي العشوائي على الأعداد الصحيحة ومشكلة خراب المقامر هي أمثلة على عمليات ماركوف في وقت منفصل.

- سلسلة ماركوف الشهيرة هي ما يسمى ب "مسيرة السكير" ، وهي مسيرة عشوائية على خط الأعداد حيث ، في كل خطوة ، قد يتغير الموضع بمقدار +1 أو −1 مع احتمال متساو. من أي موضع ، هناك انتقالان محتملان ، إلى العدد الصحيح التالي أو السابق. تعتمد احتمالات الانتقال فقط على الموقف الحالي ، وليس على الطريقة التي تم بها الوصول إلى الموقف. على سبيل المثال ، احتمالات الانتقال من 5 إلى 4 و 5 إلى 6 كلاهما 0.5 ، وجميع احتمالات الانتقال الأخرى من 5 هي 0. هذه الاحتمالات مستقلة عما إذا كان النظام سابقا في 4 أو 6.

- سلسلة من الدول المستقلة (على سبيل المثال ، سلسلة من تقلبات العملة) تفي بالتعريف الرسمي لسلسلة ماركوف. ومع ذلك ، عادة ما يتم تطبيق النظرية فقط عندما يعتمد التوزيع الاحتمالي للحالة التالية على الحالة الحالية.

سلسلة ماركوف المنفصلة

سلسلة ماركوف المنفصلة هي سلسلة من المتغيرات العشو $X_1, X_2, X_3,$ ... مع خاصية ماركوف ، أي أن احتمال الانتقال إلى الحالة التالية يعتمد فقط على الحالة الحالية وليس على الحالات السابقة

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

إذا تم تحديد كلا الاحتمالين الشرطين بشكل جيد ، أي إذا

$$\Pr(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) > 0.$$

تشكل القيم المحتملة لـ Xi مجموعة قابلة للعد S تسمى مساحة الدالة للسلسلة.

الاختلافات

- سلاسل ماركوف المتجانسة زمنيا هي عمليات حيث

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = y) = \Pr(X_n = x \mid X_{n-1} = y)$$

للجميع احتمال الانتقال مستقل عن n.

- سلاسل ماركوف الثابتة هي عمليات حيث

$$\Pr(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \Pr(X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_k)$$

لجميع n و k. يمكن إثبات أن كل سلسلة ثابتة متجانسة زمنياً بواسطة قاعدة بايز.

الشرط الضروري والكافي لكي تكون سلسلة ماركوف المتجانسة زمنياً ثابتة ، هو أن X_0 هو توزيع ثابت لسلسلة ماركوف.

- سلسلة ماركوف ذات الذاكرة (أو سلسلة ماركوف من الترتيب م) حيث م محدودة ، هي عملية مرضية

$$\begin{aligned} &\Pr(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_1 = x_1) \\ =&\Pr(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_{n-m} = x_{n-m}) \text{ for } n > m \end{aligned}$$

بمعنى آخر ، تعتمد الحالة المستقبلية على حالات m الماضية. من الممكن بناء سلسلة (Y_n) من (X_n) التي لها خاصية ماركوف "الكلاسيكية" من خلال أخذ مجموعات m مرتبة لقيم X كمساحة رسمية ، i.e., $Y_n = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-m+1})$.

سلسلة ماركوف ذات الزمن المستمر *Continuous-time Markov chain*

يتم تعريف سلسلة ماركوف ذات الزمن المستمر $(X_t)_{t\geq 0}$ بواسطة فضاء حالة محدود أو قابل للعد S ، مصفوفة معدل الانتقال Q بأبعاد مساوية لأبعاد فضاء الحالة وتوزيع الاحتمال الأولي المحدد على فضاء الحالة. بالنسبة إلى $i \neq j$ ، فإن العناصر q_{ij} غير سالبة وتصف معدل انتقالات العملية من الحالة i إلى الحالة j. يتم اختيار العناصر q_{ii} بحيث يصل مجموع كل صف من مصفوفة معدل الانتقال إلى الصفر ، في حين أن مجموع صفوف مصفوفة انتقال الاحتمال في سلسلة ماركوف (منفصلة) كلها تساوي واحدا.

هناك ثلاثة تعريفات مكافئة للعملية :

- تعريف متناهي الصغر

لنفرض X_t هو المتغير العشوائي الذي يصف حالة العملية في الوقت t ، وافترض أن العملية في حالة i في الوقت t. ثم ، مع العلم $X_t = i, X_{t+h} = j$ القيم السابقة $(X_s : s < t)$ وكما $h \to 0$ لجميع j ولكل t ،

$$\Pr(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = \delta_{ij} + q_{ij}h + o(h)$$

حيث δ_{ij} هي دلتا كرونكر ، باستخدام الترميز الصغير. يمكن النظر إلى q_{ij} على أنها تقيس مدى سرعة حدوث الانتقال من i إلى j.

- سلسلة القفز / تحديد وقت الانتظار

حدد سلسلة ماركوف ذات الوقت المنفصل Yn لوصف القفزة التاسعة للعملية والمتغيرات S1، S2 ، S3 ، ... لوصف أوقات الاحتفاظ في كل حالة من الحالات التي تتبع فيها Si التوزيع الأسي بمعامل المعدل –qYiYi.

- تعريف احتمالية الانتقال

لأي قيمة n = 0، 1، 2، 3 ، ... والأوقات المفهرسة حتى هذه القيمة من n: t0، t1، t2 ، ... وجميع الحالات المسجلة في هذه الأوقات i0، i1، i2، i3 ، ... يحمل ذلك

$$\Pr(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$

حيث pij هو حل المعادلة الأمامية (معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى)

$$P'(t) = P(t)Q$$

مع الشرط الأولي P (0) هي مصفوفة الوحدة.

- مساحة دالة محدودة

إذا كانت مساحة الحالة محدودة ، يمكن تمثيل توزيع احتمالية الانتقال بواسطة مصفوفة تسمى مصفوفة الانتقال ، مع العنصر (i، j) من P يساوي

$$p_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

نظرًا لأن كل صف من مجموع P إلى واحد وجميع العناصر غير سالبة ، فإن P هي مصفوفة عشوائية صحيحة.

علاقة التوزيع الثابتة بالمتجهات الذاتية والمبسطة

التوزيع الثابت π هو متجه (صف) ، إدخالاته غير سالبة ومجموعها 1 ، لا يتغير من خلال تشغيل مصفوفة الانتقال P عليه وبالتالي يتم تحديده بواسطة $\pi\mathbf{P} = \pi.$

بمقارنة هذا التعريف مع تعريف eigenvector ، نرى أن المفهومين مرتبطان وذاك $\pi = \frac{e}{\sum_i e_i}$

هو $(\sum_i \pi_i = 1)$ مضاعف eigenvector الأيسر من الانتقال مصفوفة P بقيمة ذاتية تبلغ 1. إذا كان هناك أكثر من وحدة eigenvector ، فإن المجموع المرجح للحالات الثابتة المقابلة هو أيضًا حالة ثابتة. ولكن بالنسبة لسلسلة ماركوف ، عادة ما يكون المرء أكثر اهتمامًا بحالة ثابتة تمثل حد تسلسل التوزيعات لبعض التوزيعات الأولية.

ترتبط قيم التوزيع الثابت π_i بمساحة حالة P ويتم الحفاظ على النسب النسبية الخاصة بها. نظرًا لأن مكونات π موجبة ويمكن إعادة كتابة القيد بأن مجموعها هو الوحدة على النحو التالي

$$\sum_i 1 \cdot \pi_i = 1$$

نلاحظ أن حاصل الضرب القياسي لـ π مع متجه جميع مكوناته 1 هو واحد وأن π تقع على مفرد.

سلسلة ماركوف المتجانسة زمنياً مع مساحة دالة محدودة

إذا كانت سلسلة ماركوف متجانسة مع الوقت ، فإن مصفوفة الانتقال P هي نفسها بعد كل خطوة ، لذلك يمكن حساب احتمالية الانتقال k-step على أنها القوة k لمصفوفة الانتقال ، P^k.

إذا كانت سلسلة ماركوف غير قابلة للاختزال وغير دورية ، فهناك توزيع ثابت فريد π. بالإضافة إلى ذلك ، في هذه الحالة ، يتقارب P^k إلى مصفوفة من المرتبة الأولى يكون فيها كل صف هو التوزيع الثابت π :

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}^k=\mathbf{1}\pi$$

حيث 1 هو متجه العمود مع كل الإدخالات تساوي 1. هذا مذكور في نظرية Perron – Frobenius. إذا ، بأي وسيلة ، $\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}^k$ تم العثور عليه ، ثم يمكن تحديد التوزيع الثابت لسلسلة Markov المعنية بسهولة لأي توزيع بدء ، كما سيتم شرحه أدناه.

بالنسبة لبعض المصفوفات العشوائية P ، الحد $\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}^k$ غير موجود أثناء وجود التوزيع الثابت ، كما هو موضح في هذا المثال:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{P}^{2k}=I\qquad \mathbf{P}^{2k+1}=\mathbf{P}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(يوضح هذا المثال سلسلة ماركوف الدورية.)

نظرًا لوجود عدد من الحالات الخاصة المختلفة التي يجب مراعاتها ، فإن عملية العثور على هذا الحد إذا كان موجودًا يمكن أن تكون مهمة طويلة. ومع ذلك ، هناك العديد من التقنيات التي يمكن أن تساعد في إيجاد هذا الحد. دع P يكون مصفوفة n × n ، وحدد $\mathbf{Q}=\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}^k$

هذا صحيح دائما

$$\mathbf{QP}=\mathbf{Q}.$$

ينتج عن طرح Q من كلا الجانبين والعولمة

$$\mathbf{Q}(\mathbf{P}-\mathbf{I}_n)=\mathbf{0}_{n,n},$$

حيث In هي مصفوفة الوحدة بالحجم n ، و 0 ‎n، n هي المصفوفة الصفرية بالحجم n × n. يؤدي ضرب المصفوفات العشوائية معًا دائمًا إلى الحصول على مصفوفة عشوائية أخرى ، لذلك يجب أن تكون Q مصفوفة عشوائية (انظر التعريف أعلاه). يكفي أحيانًا استخدام معادلة المصفوفة أعلاه وحقيقة أن Q هي مصفوفة عشوائية لحلها من أجل Q. بما في ذلك حقيقة أن مجموع كل صفوف في P هو 1 ، هناك معادلات n + 1 لتحديد n مجهول ، لذلك من الأسهل من الناحية الحسابية إذا اختار أحدهم صفًا واحدًا في Q من ناحية واستبدل كل عنصر من عناصره بواحد ، ومن ناحية أخرى استبدل العنصر المقابل (العنصر الموجود في نفس العمود) في المتجه 0 ، ثم اليسار التالي - يضاعف هذا المتجه الأخير بعكس المصفوفة السابقة المحولة لإيجاد Q.

إليك طريقة واحدة للقيام بذلك: أولاً ، حدد الوظيفة f (A) لإرجاع المصفوفة A مع استبدال العمود الموجود في أقصى اليمين بكل 1. إذا كان 1 - [f (P - In)] موجود ثم $\mathbf{Q} = f(\mathbf{0}_{n,n})[f(\mathbf{P} - \mathbf{I}_n)]^{-1}$

اشرح: معادلة المصفوفة الأصلية تعادل نظام المعادلات الخطية n × n في متغيرات n × n. وهناك المزيد من المعادلات الخطية من حقيقة أن Q هي مصفوفة عشوائية صحيحة مجموع كل صف منها إلى 1. لذا فهي تحتاج إلى أي معادلات خطية مستقلة n × n من المعادلات (n × n + n) لحلها من أجل n × متغيرات n. في هذا المثال ، تم استبدال المعادلات n من "Q مضروبًا في العمود الموجود في أقصى اليمين من (P-In)" بالمعادلات العشوائية n.

شيء واحد يجب ملاحظته هو أنه إذا كان P يحتوي على عنصر Pi ، فإن i على قطريه الرئيسي الذي يساوي 1 ويكون الصف أو العمود i مملوءًا بأصفار ، فسيظل هذا الصف أو العمود بدون تغيير في جميع القوى اللاحقة Pk . ومن ثم ، فإن الصف i أو العمود من Q سيكون له 1 و 0 في نفس المواضع كما في P.

<u>سرعة التقارب مع التوزيع الثابت :-</u>

كما ذكرنا سابقًا ، من المعادلة $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ (إن وجد) التوزيع الثابت (أو الحالة الثابتة) π هو متجه eigenvector الأيسر لمصفوفة عشوائية للصف P. ثم بافتراض أن P قابلة للقطر أو مكافئة أن P لديها n متجهات ذاتية مستقلة خطيًا ، يتم تفصيل سرعة التقارب على النحو التالي. (بالنسبة إلى المصفوفات غير القابلة للقطر ، أي المصفوفات المعيبة ، يمكن للمرء أن يبدأ بالصيغة الأردنية العادية لـ P والمضي قدمًا بمجموعة من الحجج الأكثر انخراطًا بطريقة مماثلة.

لنفترض أن U هي مصفوفة المتجهات الذاتية (تم تطبيع كل منها بحيث يكون لها معيار L2 يساوي 1) حيث يكون كل عمود متجهًا ذاتيًا يسارًا لـ P والسماح Σ أن تكون المصفوفة المائلة لقيم eigenvalues اليسرى لـ P ، أي ، Σ = دياج (λ1، λ2، λ3، ...، λn).

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{-1}$$

دع قيم eigenvalues يتم تعدادها بحيث :

$$1 = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

نظرًا لأن P عبارة عن مصفوفة عشوائية للصف ، فإن أكبر قيمة eigenvalue اليسرى لها هي 1. إذا كان هناك توزيع ثابت فريد ، فإن أكبر قيمة eigenvalue والمتجه الذاتي المقابل تكون فريدة أيضًا (لأنه لا يوجد π آخر يحل معادلة التوزيع الثابتة أعلاه). دع ui يكون العمود الأول من مصفوفة U ، أي ، ui هو المتجه الذاتي الأيسر لـ P المقابل لـ i. لنفترض أيضًا أن x متجهًا بطول n يمثل توزيعًا احتماليًا صالحًا ؛ منذ امتداد u_i المتجهات الذاتية $\mathbb{R}^n$ يمكننا الكتابة

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

إذا ضربنا x مع P من اليمين واستمرنا في هذه العملية بالنتائج ، في النهاية نحصل على التوزيع الثابت π. بمعنى آخر ، π = ui ← xPP ... P = xPk مثل k ← ∞. هذا يعني

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^{(k)} &= \mathbf{x}\left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{-1}\right)\left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^{-1}\right) \\
&= \mathbf{x}\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^k\mathbf{U}^{-1} \\
&= \left(a_1\mathbf{u}_1^\mathsf{T} + a_2\mathbf{u}_2^\mathsf{T} + \cdots + a_n\mathbf{u}_n^\mathsf{T}\right)\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^k\mathbf{U}^{-1} \\
&= a_1\lambda_1^k\mathbf{u}_1^\mathsf{T} + a_2\lambda_2^k\mathbf{u}_2^\mathsf{T} + \cdots + a_n\lambda_n^k\mathbf{u}_n^\mathsf{T} && u_i \bot u_j \text{ for } i \neq j \\
&= \lambda_1^k\left\{a_1\mathbf{u}_1^\mathsf{T} + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}_2^\mathsf{T} + a_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}_3^\mathsf{T} + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}_n^\mathsf{T}\right\}
\end{aligned}$$

نظرًا لأن π = u1 ، فإن π (k) تقترب من π مثل k ← ∞ بسرعة في ترتيب λ2 / 1 بشكل أسي.

يتبع ذلك بسبب $|\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ ومن ثم فإن λ1 / λ2 هو المصطلح السائد. كلما كانت النسبة أصغر ، كان التقارب أسرع. يمكن للضوضاء العشوائية في توزيع الحالة π أيضًا تسريع هذا التقارب إلى التوزيع الثابت.

مساحة الحالة العامة

سلاسل هاريس

يمكن تعميم العديد من النتائج لسلاسل ماركوف ذات مساحة الدالة المحدودة على سلاسل ذات مساحة غير معدودة للولاية من خلال سلاسل هاريس.

يغطي استخدام سلاسل ماركوف في أساليب مونت كارلو لسلسلة ماركوف الحالات التي تتبع فيها العملية مساحة حالة مستمرة.

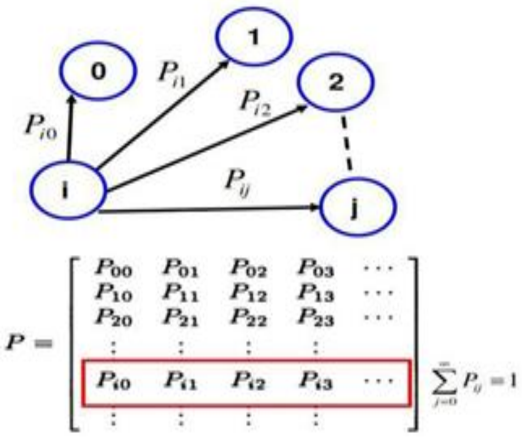
سلاسل ماركوف المتفاعلة محليًا:

بالنظر إلى مجموعة سلاسل ماركوف التي يأخذ تطورها في الاعتبار حالة سلاسل ماركوف الأخرى ، يرتبط بفكرة سلاسل ماركوف المتفاعلة محليًا. هذا يتوافق مع الموقف عندما يكون لمساحة الدولة نموذج منتج (ديكارتي). انظر تفاعل نظام الجسيمات والأوتوماتا الخلوية العشوائية (الأوتوماتا الخلوية الاحتمالية).

سلاسل ماركوف المتجانسة زمنيا :

يقال ان سلاسل ماركوف ذات احتماليات انتقال ثابته متجانسة زمني ا (عندما يكون احتمال انتقال الخطوة الواحدة مستقل عن الزمن n.)

- Pij احتمال الانتقال من الحالة i الى الحالة j بخطوة واحدة:



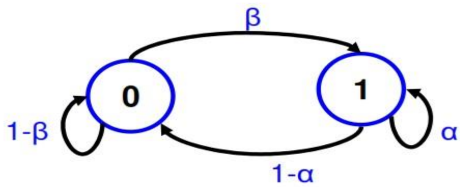
شكل (3)

$$P[(X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P_{ij},\ n, i, j = 0,1,2...$$

- أو احتمالية كون النظام في الحالة j في اللحظة +1n علما انه كن في الحالة i في اللحظة n.
- في حال كان عدد حالات سلسلة ماركوف محدود n يوجد مصفوفة احتمالات الانتقالات من البعد nxn.

<u>مثال حالة الطقس:</u>

- بفرض احتمال المطر غدا يعتمد على ظروف طقس سابقة فقط من خلال كونها تمطر اليوم أو لا بغض النظر عن الظروف السابقة.
- بفرض انها امطرت اليوم فستمطر غدا باحتمال α وفيمالو لم تمطر اليوم فإنها ستمطر غدا باحتمال β اوجدtransition probability matrix:
- انها سلسلة ماركوف من حالتين 0 غير ممطرة و 1 ممطرة.



$$P = \begin{bmatrix} 1-\beta & \beta \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

شكل (4)

استخدامات سلاسل ماركوف :

سلاسل ماركوف لديها العديد من التطبيقات كنماذج إحصائية لعمليات العالم الحقيقي ، مثل دراسة أنظمة التحكم في التطواف في السيارات ، وقوائم الانتظار أو خطوط العملاء الذين يصلون إلى المطار ، وأسعار صرف العملات وديناميكيات أعداد الحيوانات. يتم استخدامها لحساب احتمالات الأحداث التي تحدث من خلال رؤيتها كحالات تنتقل إلى حالات أخرى ، أو الانتقال إلى نفس الحالة التي كانت عليها سابقًا.

تُستخدم سلاسل ماركوف حتى في خوارزميات محرك البحث والتأليف الموسيقي والتعرف على الكلام.

في مجالات الاقتصاد والتمويل ، تُستخدم سلاسل ماركوف لغرض التنبؤ بحالات الاقتصاد الكلي مثل انهيار السوق والدورات بين الركود والتوسع. كما أنها تستخدم للتنبؤ بأسعار الأصول والخيارات ، واحتساب مخاطر الائتمان. عند التفكير في سوق مالي مستمر ، يتم استخدام سلاسل ماركوف لغرض

نمذجة العشوائية. يتم استخدامها أيضًا لنمذجة احتمالات بعض مناخات السوق المالية ، وبالتالي التنبؤ باحتمالية ظروف السوق المستقبلية مثل الأسواق الصاعدة والأسواق الهابطة والأسواق الراكدة.

تعتبر سلاسل ماركوف مهمه ايضا فى العديد من المجالات ، مثل

- الفيزياء
- كيمياء
- مادة الاحياء
- اختبارات
- تقلب الإشعاع الشمسي
- التعرف على الكلام
- نظرية المعلومات
- نظرية الاصطفاف
- تطبيقات الإنترنت
- إحصائيات
- الاقتصاد والتمويل
- العلوم الاجتماعية
- ألعاب
- موسيقى
- البيسبول

فروض تحليل قرارات ماركوف :

يستند تحليل قرارات ماركوف إلى أربعة افتراضات أساسية:

1. أن هناك عدد محدود ونهائي من المواقف الممكنة.
2. أن احتمالات تغير الموقف من وقت لآخر تظل كما هي ثابتة دون تغيير.

3. أنه يمكننا التنبؤ بأي موقف في المستقبل من خلال مصفوفة التغير ومعرفة الموقف الحالي.

4. أن الحالة التالية للموقف تعتمد على الحالة السابقة لها مباشرة دون الاعتماد على ما قبل ذلك.

أهم الأساسيات الرياضية المتعلقة بسلاسل ماركوف مستمرة الزمن :

- عملية قرار ماركوف تعتمد علي 5-الصفوف.(S , A , (.,.)P, (.,.)R ,ϒ) (tuple-5)
- Sهي مجموعة محدودة من الدوال وهي تمثل الحالة.
- Aهي مجموعة محدودة من الدوال، As)هو مجموعة محدودة من الخيارات المتاحة خلال S).
- هو احتمالية حدوث a في s في وقت t وهذا يؤدي الي Ś عند وقت.t+1
- حيث أن Ra هو الناتج (المكافأة) المتوقعة من الانتقال من S الي.Ś
- discount factor) γ) [0,1]عامل متقطّع، وهو يمثّل الفرق في الأهمية بين النواتج المستقبلية والحالية.

المشكلة الأساسية من قرارات عملية ماركوف هي العثور علي السياسة لصانع القرار، وهي تهدف إلى اختيار السياسة التي تقوم بتعظيم بعض الدوال التراكمية للحالات العشوائية. ويمكن لقرارات عملية ماركوف أن تحل من خلال البرمجة الخطية والبرمجة الديناميكية

افتراضات تحليل ماركوف :

يستند تحليل ماركوف إلى أربعة افتراضات أساسية :

a. أن هناك عدد محدود ونهائي من المواقف الممكنة .

b. أن احتمالات تغير الموقف من وقت لآخر تظل كما هي ثابتة دون تغيير.

c. أنه يمكننا التنبؤ بأي موقف في المستقبل من خلال مصفوفة التغير و معرفة الموقف الحالي.

مجالات إستخدام سلاسل ماركوف :

-التسويق

-البنوك

-العمليات التجارية

يمكن أن تطبق سلاسل ماركوف في الحالات التالية :

1-حالة السوق :

هناك عوامل متعددة في مجال السوق التي يمكن إستخدامها لتصف أسلوب سلاسل ماركوف مثل- :

-الماركات المستخدمة حاليا بواسطة المستهلكين.

-تحول المستهلكين من ماركة لاخرى

-الوضع الحالي لسياسة الدعاية و الترويج.

-التنبؤ بالحصة السوقية من حيث الزيادة أو النقصان.

2-حالة الانتاج :

و ذلك مثل

-عدد الآلات التي تعمل وفقا لمتطلبات العملية الإنتاجية .

-عدد الآلات التي تحتاج إليها المؤسسة.

-عدد العمال الحالي.

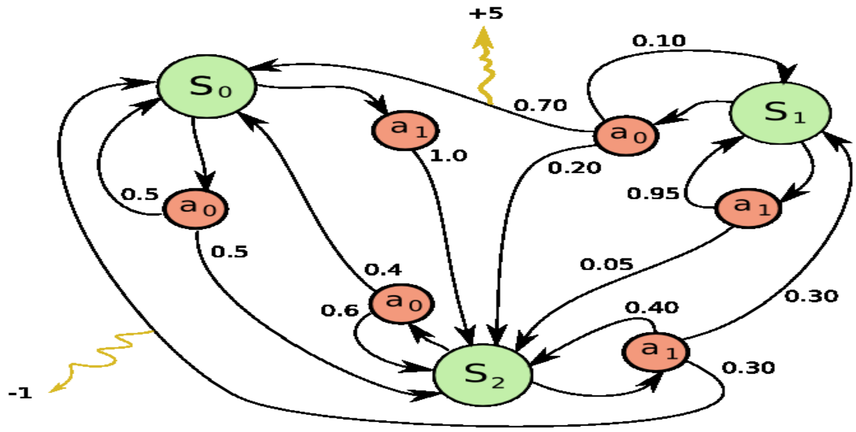
3-حالة التمويل :

وذلك في عدة حالات أهمها:

-مصادر التمويل الحالية للمشروع

-مصادر التمويل في نهاية مدة زمنية معينة

-هيكل رأس المال في نهاية السنة المالية



شكل (5)

امثله عن سلاسل ماركوف :

مثال1: لتوضيح تكوين مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (المصفوفة التصادفية) مكونة من حالتين.

- **على افتراض ان احتمال ان يكون الطقس جاف أو مشمس (state 0) يتبع إلى طقس ممطر(state 1) هو (1/2) د، واحتمال ان يكون الطقس ممطر يتبع إلى طقس جاف أو مشمس هو (1/3). كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (أو المصفوفة التصادفية).**

الحل: اذن يوجد هناك حالتين لسلسة ماركوف وتكون الاحتمالات كما يلي:

$\mathbf{P_{01} = 1/2}$, $\mathbf{P_{10} = 1/3}$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال2: لتوضيح تكوين مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

- عملية السير العشوائي البسيطة مع حدين للامتصاص أو التميع (الانتهاء) في الحد الاول (x=0 , x=a) حالات سلسلة ماركوف سوف تكون كما يأتي (0، 1، 2، .... ، a)

المطلوب: كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وفقاً للاحتمالات الآتية:

الحل: هذه الاحتمالات حددت قيمها من منطوق السؤال $\mathbf{P_{00} = 1}$ $\mathbf{P_{aa} = 1}$

$\mathbf{P\,(z = -1) = q}$ **or** $\mathbf{P_{i,i-1} = q}$

$\mathbf{P\,(z = +1) = p}$ **or** $\mathbf{P_{i,i+1} = p}$

$P(z=0) = 1-p-q$ **or** $P_{i,i} = 1-p-q$

$P_{i,j} = 0$ **other wise** **for more than one step,** **لأكثر من خطوة واحدة**

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & (a-1) & a \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ a-1 \\ a \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
q & 1-p-q & p & 0 & 0 & . & . \\
0 & q & 1-p-q & p & 0 & . & . \\
0 & 0 & q & 1-p-q & p & . & . \\
. & . & . & q & 1-p-q & p & . \\
. & . & . & . & q & 1-p-q & p \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

مثال3 : لتوضيح تكوين مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

- عملية السير العشوائي البسيطة مع العلم ان نقطة الانطلاق (الاصل) قابلة للانعكاس (الارتداد – إلى الداخل) ، حالات سلسلة ماركوف تكون كما يأتي (4,3,2,1,0,........)

المطلوب : كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وفقاً للاحتمالات الآتية:

$P(z=-1) = q$ **or** $P_{i,i-1} = q$

$P(z=+1) = p$ $P_{i,i+1} = p$

$P(z=0) = 1-p-q$ $P_{i,i} = 1-p-q$

لأكثر من خطوة واحدة $P_{i\,j} = 0$ ، $P_{0\,0} = 1-p$ ،$P_{0\,1} = p$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ . \\ . \end{array} &
\begin{bmatrix}
1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\
q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & . & . \\
0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & . & . \\
0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

مثال 4: لتوضيح تكوين مصفوفة الاحتمالات الانتقالية في عملية السير العشوائي الغير محدود تكون الحالات لسلسلة ماركوف كما يأتي [. . . . . 1,2,3, 0 ,1-,2-,3- . . . . .]

المطلوب : كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وفقاً للاحتمالات الآتية:

$P_{i,\,i+1} = p \quad , \quad P_{i,\,i-1} = q \quad , \quad P_{i,\,i} = 0$

$P_{i,\,j} = 0$ **الانتقال لأكثر من خطوة واحدة**

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & . & . \\
\hline
-2 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & . & . \\
-1 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & . & . \\
0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & . & . \\
1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & . & . \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

مثال5: شخصين هما A ، B، بدأوا سلسلة من المباريات بينهم ومع كل واحد (3) دينار كرأسمال لممارسة اللعبة ، وفي نهاية كل مباراة الخاسر من الشخصين اعلاه يدفع إلى الرابح دينار واحد ، ويكون احتمال ان اللاعب A يربح هو (0.6) واحتمال ربح B (0.4) وتنتهي كل المباريات عندما يخسر احد اللاعبين كل رأسماله المخصص للعب أو احد اللاعبين يربح كل رأسمال الموجود عند الشخص الخصم

المطلوب : كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية مع اثبات سلسلة ماركوف متحققة.

الحل : افتراض ان C_n هو رأسمال اللاعب A بعد (n) من المباريات اذن يكون

باحتمال قدره (0.4) $\quad C_{n+1}=C_n - 1$

باحتمال قدره (0.6) $\quad C_{n+1}=C_n + 1$

وواضح جداً ان C_{n+1} يعتمد فقط على C_n اذ ان هنا سلسلة ماركوف (تحققت)، ويجب ملاحظة ان $(C_n = C_{n+1})$ تحصل فقط عندما تنتهي المباراة وتكون الاحتمالات الانتقالية كما يلي:

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

وتكون امكانية الانتقال بين الحالات الآتية:

The possible transition are:

$$(0 \longrightarrow 0)(1 \longrightarrow 0)(1 \longrightarrow 2)(2 \longrightarrow 1)(2 \longrightarrow 3)(3 \longrightarrow 2)(3 \longrightarrow 4)(4 \longrightarrow 3)$$

$$(4 \longrightarrow 5)(5 \longrightarrow 4)(5 \longrightarrow 6)(6 \longrightarrow 6)$$

مثال 6: جزئي (particle) ينتقل وفقاً لمبدأ السير العشوائي (random walk) وبوجود مصدرين أثنين أو حدين لامتصاص قوة تنقله (الانتهاء absorbing barriers) ، بالنقاط (0) ، (4) وعندما يكون الجزئي في أي موقع موجب (r) (4 > r > 0) ، فانه سوف يتحرك إلى الموقع (r+1).

باحتمال مقداره (p) ، أو ينتقل إلى (r-1) باحتمال مقداره (q) على فرض ان (p+q=1) ولكن سرعان ما يصل هذا الجزئي إلى الموقع (0) أو (4) سوف يبقى هناك (يتمحور بالمركز) في تلك المواقع ولا يستطيع الأنتقال أو مغادرة المحور إلى محور آخر.

المطلوب: كون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

الحل : أفترض (x_n) هو حالة الجزئي بعد (n) من النقلات (jumps) فالحالات المختلفة إلى (x_n) هي ناتجة من مواقع مختلفة يصلها الجزئي اذن (x_n) يكون سلسة ماركوف ، وتكون الاحتمالات الانتقالية كما يلي:

$$P_r\,\{X_{n+1} = r + 1 | X_{n-1} = r\} \ = p$$

$$P_r\,\{X_n = r - 1 | X_{n-1} = r\} \ = q$$

$$P_r\,\{X_n = 0 | X_{n-1} = 0\} \ = 1$$

$$P_r\,\{X_n = 4 | X_{n-1} = 4\} \ = 1$$

وتكون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية كما يلي:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال7- أفترض ان $(x_n\ ,\ n \geq 0)$ هي سلسله ماركوف وبثلاث حالات (0, 1, 2) وبمصفوفة احتمالات انتقالية:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

وبتوزيع ابتدائي $P_r\{x_0 = i\} = 1/3$

اوجد قيمة الاحتمالات الآتية :

1-$P_r\{x_1 = 1 / x_0 = 2\} = 3/4$

2-$P_r\{x_2 = 2 / x_1 = 1\} = 1/4$

3-$P_r\{x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1 / x_0 = 2\} = P_r\{x_2 = 2 / x_1 = 1\} * P_r\{x_1 = 1 / x_0 = 2\} = 1/4 * 3/4 = 3/16$

4-$P_r\{x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1\ , x_0 = 2\} = P_r\{x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1 / x_0 = 2\} * P_r\{x_0 = 2\} = 3/16 * 1/3 = 1/16$

5-$P_r\{x_3 = 1, x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1\ , x_0 = 2\} = P_r\{x_3 = 1 /\ x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1\ ,\ x_0 = 2\} * P_r\{x_2 = 2,\ x_1 = 1\ , x_0 = 2\} = P_r\{x_3 = 1 /\ x_2 = 2\} * \underbrace{P_r\{x_2 = 2\ ,\ x_1 = 1\ , x_0 = 2\}}_{\text{هذا المقدار تم إيجاد قيمته في الفقرة (4) أعلاه}}$

$$= \frac{3}{4} * \frac{1}{16} * \frac{3}{64}$$

مثال8- :أفترض ان $x = \{ x_n\ ,\ n \in N \}$، هي سلسلة ماركوف مع فضاء حالة $E = (a, b, c)$ وبمصفوفة احتمالات انتقالية هي كما يلي :

$$p = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

حدد قيمة الاحتمالات الآتية:

$P_r\{x_1= b, x_2 = c , x_3 = a , x_4 = c , x_5 =a , x_6 =c , x_7 = b / x_0 = c\} = P_r(c,b) * P_r(b,c)* P_r(c,a)* P_r(a,c)* P_r(c,a)* P_r(a,c)* P_r(c,b) =$

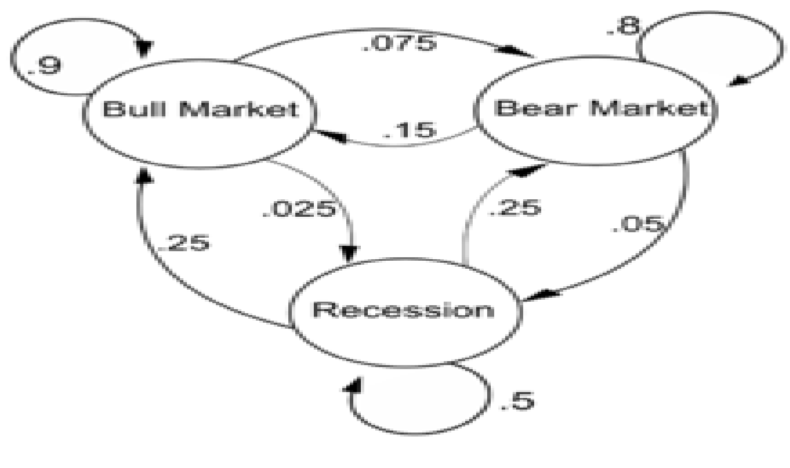
$$= \frac{2}{5} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{3}{5} * \frac{1}{4} * \frac{2}{5} = \frac{3}{2500}$$

مثال9: أفترض ان T_n هو وقت محاولة النجاح ذات الترتيب n في عمليات برنولي . أثبت أن $\{T_n , n \geq 0\}$ هو سلسلة ماركوف وبحالات كما يلي (0 , 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , ...) مع العلم ان (T_0 =0) ووفقاً للصيغة الآتية. واوجد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية:

$P_{(i, j)} = P_r \{ T_{n+1} = j / T_n = i \} = P_r \{ T_{n+1} - T_n = j-i \}$

$$P(i,j) = \begin{cases} pq^{j-i-1} & if\ j \geq i+1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P = \begin{array}{c|ccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & \\ \hline 0 & 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & . & . & . \\ 2 & 0 & 0 & 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & . & . \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & pq & pq^2 & pq^3 & . \\ 4 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 5 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$



شكل (6)

المصادر والمراجع

المصادر العربية :

1. "معلومات عن سلسلة ماركوف على موقع d-nb.info". d-nb.info. مؤرشف من الأصل في 2019-12-08.
2. مؤرشف من الأصل في2019"معلومات عن سلسلة ماركوف على موقع thes.bncf.firenze.sbn.it". thes.bncf.firenze.sbn.it. -09-03
3. "معلومات عن سلسلة ماركوف على موقع jstor.org". jstor.org. مؤرشف من الأصل في 2020-03-12
4. معلومات عن قرارات عملية ماركوف على موقع psh.techlib.cz". psh.techlib.cz. مؤرشف من الأصل في 2019-12-12.
5. دور سلاسل ماركوف في تقليل من حدة المخاطر التي تهدد المؤسسات الاقتصادية
6. أحمد ، ريكان (2008) " سلاسل ماركوف بين النظرية والتطبيق في المجال الاقتصادي أو المالي أو الاداري", تنمية ال رافدين, العدد (92), مجلد (30), جامعة الموصل, العراق.
7. أحمد , مصطفي (1982) " تحليل احصائي للسلاسل الزمنية واتخاذ القرار مع التطبيق على صناعة السكر في الجمهورية العربية السورية " رسالة ماجستير غير منشورة, سوريا.
8. الزيادي , صفاء (2003) استخدام سلاسل ماركوف وبرمجة الاهداف في مخطط القوى العاملة مع التطبيق", رسالة ماجستير غير منشورة, العراق.
9. الحنجوري , مؤمن و التلباني , شادي (2015). " استخدام سلاسل ماركوف الامتصاصية في تحليل حركة الطلبة خلال المراحل الدراسية – دراسة تطبيقية على طلبة كلية الهندسة بالجامعة الاسلامية بغزة", مجلة جامعة القدس للأبحاث والدراسات , العدد الخامس والثلاثون) (, غزة, فلسطين.).
10. سلمان, ماهر 2014(. " التنبؤ باحتمالات تغير سعر صرف الدينار العراقي مقابل الدولار الامريكي باستعمال سلاسل ماركوف للفترة (2014-2008), المديرية العامة للإحصاء والابحاث, بحوث الاسواق المالية.

المصادر الأجنبية :

11. Markov (1906) "Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga". Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete, 2-ya seriya, tom 15, pp. 135–156.
12. Markov (1971). "Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain". reprinted in Appendix B of: R. Howard. Dynamic Probabilistic Systems, volume 1: Markov Chains. John Wiley and Sons.
13. Classical Text in Translation: Markov, A. A. (2006). Translated by Link, David. "An Example of Statistical Investigation of the Text Eugene Onegin Concerning the Connection of Samples in Chains". Science in Context. 19 (4): 591–600. doi:10.1017/s0269889706001074. S2CID 144854176.
14. Leo Breiman (1992) [1968] Probability. Original edition published by Addison-Wesley; reprinted by Society for Industrial and Applied Mathematics ISBN 0-89871-296-3. (See Chapter 7)
15. J. L. Doob (1953) Stochastic Processes. New York: John Wiley and Sons ISBN 0-471-52369-0.
16. .R. Bellman. A Markovian Decision Process . Journal of Mathematics and Mechanics 6, 1957
17. X. Guo and O. Hernández-Lerma. Continuous-Time Markov Decision Processes, Springer, 2009.
18. Markov Chains /Amjad Y.Mahfoud and Mouhammad Wardeh.
19. A.A. Markov. "Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain". reprinted in Appendix B of: R. Howard. Dynamic Probabilistic Systems, volume 1: Markov Chains. John Wiley and Sons, 1971.