وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل /كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

مشروع بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة بابل

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى في بعض تطبيقاتها

بأشراف : د . غازي عبدالله مدلول

اعداد الطالبة :حنان حسين عبد جاسم

بسم الله الرحمن الرحيم

((اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ مَثَلُ نُورِهِ كَمِشْكَواةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارُ نُورُ عَلَى نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَلَ لِلنَّاسِ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ))

صدق الله العظيم

سورة النور الآية 35

الاهداء

الى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة .... الى نبي الرحمة ونور العالمين " سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم " الى من كلله الله بالهيبة والوقار ... الى من علمني العلاء بدون انتظار الى من احمل اسمه بكل افتخار .... ارجو من الله من ان يمدكم في عمرك لترى ثمار قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك بها اليوم وفي الغد" أبي الغالي" الى من تتسابق الكلمات لتخرج معبرة عن مكنون ذاتها الى من علمتي وكانت الصعاب الاصل الى ما انا فيه وعندما تكسوني الهموم اسبح في بحر حانها لأخفف من الأمي الى القلب الى الناصح البياض "امي الحبيبة"

الى الاخوة والاخوات الى ينابيع الصدق الصافي الى من معهم سعدت وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت الى من كانوا معي على طريق النجاح" اخوتي"

الى من عملني حروفاً من ذهب وكلمات من وعبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم " أصدقائي"

شكر وتقدير

الحمد لله الذي بفضله وكرمه تتم الصالات احمده سبحانه وتعالى ان وفقني للشروع في هذه الدراسة ثم وفقي واعانني على اكمالها. وانطلاقا من قول الرسول الكريم محمد (صل الله وعليه وسلم): لا يشكر الله من لا يشكر الناس واعترافا بالفضل لأهله وحفظاً لنعمة ربي، واتباع السنة النبي (صلى الله عليه وسلم اتوجه بخالص شكري وتقديري لمن كان لهم الفضل في خروج هذه الدراسة. وأول ما أتقدم له بالشكر والدي الكريمان على ما بذلاه حتى وصلت لهذه المرحلة من العمر والتعليم فأسال الله تعالى ان يطل عمرهما على الطاعة وان يمتعهما بالصحة والعافية وان يجعل عاقبتهما جنة عرضها السماوات والأرض.

وبعد انجاز هذا البث لا يسعني الا ان اوجه خالص شكر وتقدير وعظيم امتناني الى د . غازي عبدالله مدلول لما ابدى من حسن ورعاية ورحابة صدر وروح علميه مخلصة وما قدمه لي من توجيهات ونصائح سديدة وملاحظات قيمة ومستمرة فدعائي له بالخير والعافية والتوفيق.

كما تقدم بجزيل الشكر والتقدير الى عمادة كلية التربية للعلوم الصرفة على عملها الدائم وسعيها الدؤوب لخدمة مسيرة العلم والعطاء واتوجه بجزيل الشكر الى رئيس قسم الرياضيات

والى اساتذتي الافاضل في قسم الرياضيات ولا يفوتني ان أقدم الشكر والتقدير الى رئيس لجنة المناقشة لما سيدونه من ملاحظات قيمة في اعتاء البحث.

والى جميع أهلي وأصدقائي والى كل من شد ازري وكل من ساندني في عملي جزاهم الله خير الجزاء. فهذا ما امن الله به وأعان عليه فإنكن صوابا فمن الله الكريم وان يكن فيه خطا او نقص فتتك حال ابن ادم والكمال لله وحده وحسبي أني قد حاولت التسديد والمقاربة وبذلت الجهد ما استطعت بتوفيق من الله

هذا وصلي وسلم حين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم

قائمة المحتويات

قائمة المصطلحات

English	العربي	
Differential equation	معادلة تفاضلية	1
Order of differential equation	رتبة المعادلة التفاضلية	2
Degree ofdifferential equation	درجة المعادلة التفاضلية	3
Partial differential equation	المعادلة التفاضلية الجزئية	4
Solution ofdifferential equation	حل المعادلة التفاضلية	5
General solutions	الحل العام	6
Particular solution	الحل الخاص	7
Separation of variable	فصل المتغيرات	8
Homogeneous ofdifferential equation	معادلة تفاضلية متجانسة	9
Exact of differential equation	المعادلات التفاضلية التامة	10
Linearity of differential equation	المعادلات التفاضلية الخطية	11

ملخص البحث

يناقش هذا البحث المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها استعرضنا في الفصل الأول من هذا البحث المفاهيم الاساسية التي كان الهدف منها التعرف على معنى المعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها وبعض انواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبعض طرق حلها والتي من ضمنها حل المعادلة التفاضلية العادية وتكوين المعادلة التفاضلية.

أما الفصل الثاني فقد تناولنا بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى باستخدام تطبيقها على التطبيقات الفيزيائية والتطبيقات الكيميائية

المقدمة -

بسم الله والصلاة والسلام على سيد الخلق سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله وسلم والتابعين ومن تبعهم بإحسانك يوم الدين

تكتسب المعادلات التفاضلية أهمية كبرة علوم الرياضيات والفيزياء والكيمياء والهندسة فبواسطه المعادلات التفاضلية أمكن فهم الكثير من الظواهر المعقدة في حياتنا اليومية أبرزها ظاهرة الكهرومغناطيسية لذلك فهي تخبرنا عما جرى سابقا وعما سيجري لاحقاً واصفة تلك الحادثة بمتحولات ترمز للزمان والمكان وعوامل تؤثر في الحادثة نفسها لذلك ما من تخصص يعمل في حقل العلوم التطبيقية الا ويجد نفسه أمام معادلة تفاضلية او أكثر وعليه حلها لان حل كل معادلة هو وصف أوضح من المعادلة نفسها للحادثة التي تمثلها تلك المعادلة.

وما زالت العلوم التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسة والحيوية بالإضافة الى مساهمتها في دراسة التحليل وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها.

إن المعادلات التفاضلية أساسية لفهم كثير من المسائل الفيزيائية والرياضية المهمة لقد أدرك ذلك أسحاق نيوتن في القرن السابع عشر اذ استخدم المعادلات في دراسته لحركة الجسيمات والأجرام السماوية. تعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمة الرياضيات البحثية والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسة، فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والانشائية من أنواع المعادلات التفاضلية.

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية، وهناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية.

وتمثل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية والمتجانسة وغير المتجانسة ومعادلات تفاضلية اعتيادية ومعادلات تفاضلية جزئية وكذلك نستطيع تصنيف المعادلات الاعتيادية حسب رتبة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى او من الرتب العليا فقد اختص هذا البحث على المعادلات الخطية المتجانسة والغير متجانسة من الرتب العليا ذات المعاملات الثابتة والمعاملات المتغيرة وطرق حلها مع ذكر بعض الأمثلة لتوضيح طرق الحل.

هيكلية البحث

نبذة تاريخية –

نشا موضوع المعادلات التفاضلية مرافقا لنشوء موضوع حساب التفاضل والتكامل وتطورا سويا. وقد كان للعرب فضل كبير للتمهيد في حساب التفاضل والتكامل فقد ثبت ان ثابت ابن قرة ولد في بحران عام 835م وتوفي في بغداد عام (900م) استعمل نظرية افناء (Theory of Exhaustion) في حساب حجم الجسم الناتج من دوران القطع المكافئ حول محوره وهي تقابل عملية التكامل في حساب الحجوم الدورانية

وقد ألف أبو الفتح عبد الرحمن المنصور الخازني وهو من علماء العرب الذين عاشوا في النصف الأول من القرن الثاني عشر الميلادي كتاب ميزان الحكمة وهو من أحد الكتب التي وصلت الى الأوربيين وترجمت إلى لغاتهم ابان عصور النهضة ومهدت في تطوير العلوم الحديثة. لقد في كتاب ميزان الحكمة العلاقة الصحيحة بين السرعة التي يسقط فيها جسم نحو سطح الأرض والبعد الذي يقطعه والزمن الذي يستغرقه وهي العلاقات التي تنص عليها القوانين والمعادلات التي نسبت الى غاليو (1564 (1642) ومن المواضيع التي مهدت الى اكتشاف التفاضل وبالتالي المعادلات التفاضلية هو الرقاص بندول الساعة المنسوب الى غاليو، لكن ابن يونس المصري المتوفي عام 1009م) كان قد اخترع الرقاص واستعمله في الساعات الدقاقة في حساب الفترات الزمنية اثناء الرصد.

يتضح من هذا انه كان لهذه المواضيع التي بحثها العرب أثر كبير غير مباشر على اكتشاف موضوع المعادلات التفاضلية. فالدقة والتعميق في دراسة هذه المواضيع العلمية التي اوجدت المعادلات التفاضلية ومن اجل حلولها تجردت وأصبحت موضوعاً قائما بذاته. فمثلا، دراسة حركة بندول الساعة تؤدي الى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، وكذلك بالنسبة لقوة الجذب والسرعة والمسافة وكلها الى معادلات تفاضلية مختلفة.

ولولا العرب لبدأ الأوربيين من النقطة التي انتهى بها اليونان وربما ابعد من ذلك لان العرب حفظت هذا التراث اليوناني وزادت عليه وتأخر عصر النهضة عدة قرون.

وشهدت الرياضيات في القرن السابع عشر والثامن عشر ميلادي تطوراً واسعا في نظرية المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها

حيث يرجع تاريخ المعادلات التفاضلية النظرية الى بداية علم التفاضل والتكامل الذي بداه إسحاق نيوتن (1642 – 1727م) وجو نغرد بنتيتز (1715 – 1946م) في القرن السابع عشر ميلادي.

مشكلة البحث:

المعادلات التفاضلية وتعدد أنواعها تشكل غموضا في كيفية الحل وكيفية التفريق بين أنواعها المختلفة، وكذلك توجد صعوبة في تطبيق هذه المعادلات في مختلف المجالات الفيزيائية والكيميائية وغيرها لاختلاطها بالعلوم الأخرى ولصعوبة هذه المجالات نفسها لأنها متعددة الفروع وشاملة من العلوم لذلك تطبيق هذه المجالات ليس بالأمر السهل.

اهداف البحث: -

التعرف على المعادلات التفاضلية ومن الرتبة الأولى.

1-التعرف على بعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

2 تطبيق مفهوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى في بعض مجالات مختلفة.

أهمية البحث: -

بين البحث المعادلات التفاضلية بطرية سهلة مبسطة تساعد في تكوين خلفية علمية ثابته.

توضيح التطبيقات التي تؤكد ان للرياضيات أهمية كبرى في الحياة العامة.

الفصل الأول

.المفاهيم الاساسية

.حل المعادلات التفاضلية العادية

.تكوين المعادلات التفاضلية

.معادلة تفاضلية خطية

(1-1) المفاهيم الأساسية للمعادلة التفاضلية

تعريف (1-1) المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير التابع (المتغيرات والمتغير المستقل ... نقلة تدخل فيها المشتقات او التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية العادية إذا كان المتغير التابع ي متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي الا على مشتقات عادية. الصيغة العامة لها

مثال (1-1) ليكن x المتغير المستقل ولا المتغير التابع فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية

F(x,y', y'',...) = 0

1. $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} \ . \frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$

(3-1) درجة المعادلة التفاضلية (Degree)

تعريف (3-1) هي درجة (قوة) اعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط ان تكون جميع العاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.

مثال (3-1) جد درجة كلا من المعادلات التفاضلية التالية.

1. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = k^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - x^2y = \sin(x)$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة

3. $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى

(4-1) المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial)

تعريف (4-1) هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع دالة لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية.

الصيغة العامة لها تكون من المرتبة الثانية بالشكل:-

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F(u) = G(x,y)$$

3. المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

مثال (1-4) ليكن u المتغير التابع و x , y , z المتغيرات المستقلة. فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$

3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{dxdy} + 3y\frac{du}{dx} + (x - y^2)u = 0$

(1-5) حل المعادلة التفاضلية (Solution of D.E)

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ اذا كانت

1. قابلة للاشتقاق n مرة
2. تحقق المعادلة التفاضلية أي: $F\left(x, y(x), \dots, y^n(x)\right) = 0$

مثال (1-5) اثبت ان $y(x) = c\sin(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت.

الحل:

$$y(x) = c\sin(x) \Rightarrow y'(x) = c\cos(x) \Rightarrow y''(x) = -c\sin(x)$$

وعلى ذلك نجد ان:

$$y''(x) + y(x) = -c\sin(x) + c\sin(x) = 0$$

∴ تمثل حلاً للمعادلة

(6-1) الحل العام والحل الخاص (General and Particular Solution)

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية.

اما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة.

مثلاً المعادلة $y'' - 5y' + 6y = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ حيث ان c_1 , c_2 , c_3 ثوابت اختيارية.

ونجد ان بعض الحلول الخاصة على الصور:

$$y = e^{2x} + e^{3x} , y = 3 + 5e^{2x} , y = 5 - 2e^{3x}$$

تعريف (1-6-1) الحل العام: هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت n الاختيارية ويكون مساويا للعد الذي يمثل رتبة المعادلة التفاضلية.

مثال (1-6-1) اثبت ان $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

يمثل الحل العام للمعادلة $y'' + 4y = 0$

الحل: نشتق العلاقة مرتين

$$y' = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x)$$

$$y''(x) = -4c_1\cos(2x) - 4c_2\sin(2x)$$

$$y'' + 4y = (-4c_1\cos(2x) - 4c_2\sin(2x)) + 4(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x))$$

$$= 0$$

ومن ثم فان الدالة $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$ تكون حلاً حيث ان الحل يحتوي على ثابتين اختيارين ويكون مساويا لعدد رتبة المعادلة التفاضلية اذا فانه يمثل الحل العام.

مثال (2-6-1) بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y' - 6y = 0$$

الحل:

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}) = 0$$

∴ الدالة $y = e^{2x} + e^{-3x}$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

مثال (3-6-1) اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 6x + 2$ مع الشروط الحدية.

$$y(0) = 2 \quad , \quad y(2) = 8$$

الحل:

$$y'' = 6x + 2$$

$$y' = 3x^2 + 2x + A$$

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية نحصل على.

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow B = 2$$

$$y(2) = 8 \quad \Rightarrow 8 = 8 + 4 + 2A + 2$$

$$\Rightarrow A = -3$$

فيكون الحل المطلوب هو.

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

(8-1) المعادلة التفاضلية الخطية (Linearity)

تعريف (8-1) تسمى المعادلة التفاضلية خطية اذا كان:

i- كل متغير تابع وكل مشتاقته من الدرجة الأولى

ii- لا تحتوي المعادلة التفاضلية على حاصل ضرب للمتغير التابع مع مشتقاته او حاصل ضرب مشتقات مع بعضها

واذا لم تكن المعادلة التفاضلية فأنها تسمى غير خطية.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي:

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} \dots \dots . + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x) \_\_\_\_\_\_\_\_(*)$$

مثال (8-1)

1. المعادلة التفاضلية: $x^3y' + 3xy = \frac{\ln(x)}{x+1}$ هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى
2. المعادلة التفاضلية: $x^2\sqrt{y''} - e^{-2x}y' - 3(\tan(x))y = 0$ هي معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الثانية وذلك لوجود $\sqrt{y''}$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الاولى

Ordinary Differential equation of order and Degree one

المقدمة:

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعميلة التفاضل أي يقوم على عمليات التكامل ومن المعروف انه لا يمكن إيجاد عكس التفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة. فلا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة. ومن ذلك فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى أنواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام. يمكن كتابة هذا النوع من المعادلات التفاضلية بأحدى الاشكال الاتية:-

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$g(x,y)dx + h(x,y) = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

حيث ان f , g , h لا تحتوي على المشتقة y′

ومع ان هذا النوع هو من المعادلات التفاضلية التي تبدو بسيطة. ألا انه ليس من الممكن إيجاد حل عام لأي منها بصورة عامة. ولا توجد طريقة عامة الحل.

(1-2) طريقة فصل المتغيرات (Separation of Variables)

تعريف (1-2) اذا امكن وضع المعادلة على الصورة:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث ان $f(x)$ دالة في x فقط و $g(y)$ دالة في y وبذلك فان عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ونستخدم التكامل المباشر فيكون الحل:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = c$$

حيث c ثابت اختياري، ويسمى ذلك بالحل العام، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط الحل العام.

واذا علم شرط الابتدائي، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً.

مثال (1-1-2) اوجد الحل العام والمنحني الخاص الذي يمر بالنقطة (0 ، 0) للمعادلة التفاضلية

$$e^x\cos(y)\;dx + (1+e^x)\sin(y)\,dy = 0$$

الحل: بفصل المتغيرات. وذلك بقسمة طرفي المعادلة المعطاة على $\cos(y)\,(1+e^x)$

فنحصل على: $\frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,dy = 0$

بالتكامل المباشر

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)}\,dy = 0$$

$$\ln(1+e^x) - \ln(\cos(y)) = \ln c$$

$$\ln\frac{1+e^x}{\cos(y)} = \ln c$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو:- $1 + e^x = c(\cos(y))$

بالتعويض عن $x = 0 \;\; , \;\; y = 0$

$$1 + 1 = c \;\; \Rightarrow c = 2$$

ويكون الحل الخاص $1 + e^x = 2\cos(y)$

مثال (2-1-2) جد حل المعادلة التفاضلية

$$xy\,dy - \frac{1 + y^2}{1 + x^2}\,dx = 0$$

الحل: بفصل المتغيرات نحصل على:

$$\frac{y}{1 + y^2}dy - \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ليكن $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

بمساواة الحد المطلق في الطرفين نحصل على: $A = 1$

وبمساواة معامل x^2 في الطرفين نحصل على: $A + B = 0 \;\Rightarrow B = -1$

وبمساواة معامل x في الطرفين نحصل على: $C = 0$

أي ان

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة

$$\frac{y}{1 + y^2}\,dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}\right]dx = 0$$

بالتكامل المباشر نحصل على

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) - \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = \ln c$$

$$\frac{(1 + y^2)(1 + x^2)}{x^2} = c \;\Rightarrow (1 + y^2)(1 + x^2) = cx^2$$

(2-2) المعادلة التفاضلية المتجانسة (Homogenous Equation)

تعريف (2-2) يقال ان المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ متجانسة اذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة

$f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n اذا كان:

$$f(\lambda_x, \lambda_y) = \lambda^n f(x,y) \quad , \lambda \in R$$

مثال (2-2-1) اختبر الدالة $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

$$\Rightarrow f(\lambda_x, \lambda_y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore$ f(x,y) متجانسة من الدرجة 2

أي المعادلة على الصورة $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ تكون معادلة متجانسة

في هذه الحالة نستخدم التعويض $v = \frac{y}{x}$ أي $y = vx$ وبالتالي

$dy = xdv + vdx$ ثم تتحول المعادلة الى معادلة يمكن فصل متغيراتها. ثم تحل كما سبق

مثال (2-2-2) اوجد الحل العام للمعادلة: $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

الحل: من الواضح ان المعادلة متجانسة

$\therefore$ نستخدم التعويض $y = vx \Leftarrow dy = vdx + xdv$

$$\therefore (x^2 + v^2x^2)dx - 2x^2v(vdx + xdv) = 0$$

$\therefore$ بالقسمة على x^2 نحصل على

$$(1 + v^2)dx - 2v(vdx + xdv) = 0$$

أي ان

$$[1 + v^2 - 2v^2]dx - 2vxdv = 0$$

$$\therefore (1 - v^2)dx - 2vxdv = 0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2v}{1 - v^2}dv = 0$$

$\therefore$ بالتكامل المباشر $\quad \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$

حيث ان $v = \frac{y}{x}$

$$\therefore x\left[1 - \frac{y^2}{x^2}\right] = c$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية $\quad x^2 - y^2 = cx$

مثال (3-2-2) اوجد حل المعادلة التفاضلية $\left(x + \sin\frac{y}{x}\right) dx - \sin\frac{y}{x} dy = 0$

الحل:

من الواضح ان المعادلة متجانسة

$\therefore$ نستخدم التعويض $v = \frac{y}{x} \Rightarrow dy = vdx + xdv$

$$\therefore (x + vx\sin v)dx - x\sin v\ (xdv + vdx) = 0$$

$$xdx + \cancel{vx\sin v\, dx} - x^2 \sin v\, dv - \cancel{xv\sin v\, dx} = 0$$

نقسم على x^2 فنحصل على :- $\quad xdx - x^2 \sin v\, dv = 0$

بالتكامل المباشر $\quad \frac{dx}{x} - \sin v\, dv = 0$

حيث ان $v = \frac{y}{x}$ $\quad \ln x + \cos v = c$

الحل العام للمعادلة التفاضلية $\quad \ln x + \cos\frac{y}{x} = c$

بالتكامل المباشر

$$\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln(2v^2 - 2v - 3) = \frac{1}{2}\ln c$$

$$\ln x_1^2 + \ln(2v^2 - 2v - 3) = \ln c$$

$$\ln x^2(2v^2 - 2v - 3) = \ln c \quad \Rightarrow x^2(2v^2 - 2v - 3) = c$$

$$\because v = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\Rightarrow 2y_1^2 - 2x_1y_1 - 3x_1^2 = c$$

$$\because x_1 = x + 1 \ \ , y_1 = y - 2$$

$$2(y-2)^2 - 2(x+1)(y-2) - 3(x+1)^2 = c$$

الحالة الثانية:

اذا كان المستقيمان متوازيان أي ان.

$$ab_1 = a_1 b$$

نفرض ان $z = ax + by$

نعوض قيمة dy , z بما يساويها في المعادلة التفاضلية حيث المعادلة تتحول الى معادلة قابلة لفصل متغيراتها. نجد الحل بدلالة x , z ثم نعوض قيمة z بدلالة x , y لإيجاد الحل العام.

مثال (2-3-2) جد حل المعادلة التفاضلية

كل

$$(6x - 8y - 5)dy = (3x - 4y - 2)dx$$

الحل:

$$(2(3x - 4y) - 5)dy = \big((3x - 4y) - 2\big)dx$$

∴ نفرض

$$z = 3x - 4y$$

$$\Rightarrow dz = 3dx - 4dy \Rightarrow dy = \frac{1}{4}(3dx - dz)$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية تتحول الى.

$$(2z-5).\frac{1}{4}(3dx - dz) = (z-2)dx$$

$$(6z-15)dx - (2z-5)dz = (4z-8)dx$$

$$(2z-7)dx - (2z-5)dz = 0$$

بفصل المتغيرات نحصل على

$$dx - \frac{2z-5}{2z-7}dz = 0$$

$$dx - \frac{2z-5-2+2}{2z-7}dz = 0$$

$$dx - dz - \frac{2}{2z-7}dz = 0$$

التكامل المباشر

$$x - z - \ln(2z-7) = c$$

$$\because z = 3x - 4y$$

$$x - 3x + 4y - \ln(6x - 8y - 7) = c$$

$$2x - 4y + \ln(6x - 8y - 7) = c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

(4-2) المعادلة التفاضلية التامة (Exact Differential Equation)

تعريف (2-4-1) اذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة على مجال التعريف لها فان التفاضل الكلي (التفاضل التام)

لهذه الدالة يعرف بـ $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

ولإيجاد الدالة f نجري تكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة في y ولتعين ثابت التكامل نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y

مثال (2-4-1) حل المعادلة التفاضلية $2xydx + (x^2-1)dy = 0$

الحل:

$$M = 2xy \quad , \qquad N = x^2 - 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ المعادلة التفاضلية تامة

∴يوجد دالة f تحقق $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

حيث $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

ولها الحل العام $f = c$

ولإيجاد الدالة f نجري التكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة للمتغير y.

$$f = \int 2xy\,dx = x^2y + \emptyset(y)$$

ولتعين ثابت التكامل $\emptyset(y)$ نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \emptyset'(y)$$

$$x^2 - 1 = x^2 + \emptyset'(y) \Rightarrow \emptyset'(y) = -1 \Rightarrow \emptyset(y) = -y$$

$$\therefore x^2y - y = c$$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية

الفصل الثاني

تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

3.2 تطبيقات في الفيزياء (Applications in Physics)

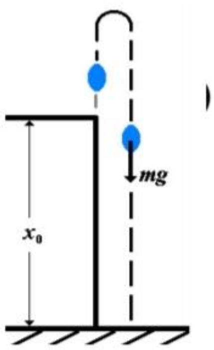
لننتقل الآن الى تطبيقات من نمط آخر تتعلق بالفيزياء، سنبدأ بالاجسام الساقطة سقوطاً حراً (Free fall) بالقرب من سطح الارض. من المعروف في الفيزياء أنَّ الجسم الساقط تكون سرعته الابتدائية v_0 (بالطبع يمكن أن تساوي صفراً)، ويسير على خط مستقيم ذي اتجاه عمودي على سطح الارض وحركته تكون بتسارع ثابت يسمى التعجيل الارضي ويرمز له بالرمز g أما قيمته فهي تقترب من 9.8 م/ثا^2 (حسب نظام الوحدات الدولي - IS) أو 32 قدم/ ثا^2 (حسب نظام الوحدات البريطاني). سنستخدم في هذا الكتاب نظام الوحدات الدولي تماشياً مع الاتجاه المعاصر في كتب الفيزياء الحديثة، وقد نستخدم احياناً نظام الوحدات البريطانية وخاصة في التمارين لتعويد الطالب على النظامين وسهولة مراجعة المصادر في كتب المعادلات التفاضلية التي غالبيتها تستخدم النظام البريطاني كون الحسابات أيسر و أبسط. والجدول الآتي يوضح الفرق بين النظامين:

جدول نظام الوحدات المستخدمة في قانون نيوتن الثاني في الحركة

المادة	النظام البريطاني	النظام العالمي
الكتلة	سلج (رطل- ثا^2/قدم) *slug*	كيلوغرام (كغم) *kg*
القوة	رطل *lb*	نيوتن (متر- كغم/ ثا^2) *N*
المسافة	قدم *ft*	متر *m*
الزمن	ثانية (ثا) *sec*	ثانية (ثا) *sec*

كما سنبين ذلك في المثال الآتي.

المثال (1): قذف جسم كتلته m رأسياً نحو الأعلى من سطح بناية ارتفاعها x_0 بسرعة ابتدائية مقدارها v_0، جد الارتفاع $x(t)$ والسرعة $v(t)$ عند أي زمن t إذا علمت أنّ التعجيل الأرضي الثابت g. كما مبين في الشكل (3.8).



الشكل (3.8)

الحل: لنفترض أنّ الاتجاه الموجب هو نحو الاعلى. فعندئذٍ حسب قانون نيوتن الثاني: $F = ma$

$$-mg = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ومنه نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

وجود الاشارة السالبة يعزى لأنّ وزن الجسم هو قوة متجهة نحو الأسفل أي عكس الاتجاه. وبإجراء عملية التكامل والتعويض في الشرط الابتدائي $v(0) = v_0$، نحصل على سرعة الجسم عند أيّ زمن t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

وبإجراء عملية التكامل ثانيةً والتعويض في الشرط الابتدائي $x(0) = x_0$ ، نحصل على ارتفاع الجسم عند أيّ زمن t:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

ملاحظة: عندما تكون السرعة الابتدائية صفراً، أي $v_0 = 0$ ، فإنّ ارتفاع الجسم عند أيّ زمن t يصبح:

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

المثال (2): سقطت كرة من أعلى بناية ارتفاعها 16 متراً . جد ارتفاع الكرة $x(t)$ عن سطح الارض عند أي زمن t ، ثم جد ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة.

الحل: بما أنّ الجسم سقط من أعلى بناية دون دفع، فعليه تكون السرعة الابتدائية تساوي صفراً.

باعتبار أنّ التعجيل الارضي يساوي $g = 9.8\, m/\sec^2$ **، وبتطبيق المعادلة :** $x(t) = x_0 - \frac{1}{2} g t^2$

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ **وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى فيها عامل المكامل:** $\mu(t) = e^{\frac{k}{m} t}$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$v = \frac{mg}{k} + c e^{-\frac{k}{m} t}$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $v(0) = 0$ **، نحصل على:** $c = -\frac{mg}{k}$ **. أي أنّ سرعة الجسم هي:**

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$

نلاحظ عندما $t \to \infty$ **أنّ** $v = v_e = \frac{mg}{k}$.

للحصول على الازاحة $x(t)$ **، نعوض عن** $v = \frac{dx}{dt}$ **، فنحصل على:**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m} t})$$

بإجراء عملية التكامل والتعويض بالشرط الابتدائي $x(0) = 0$ **، نحصل على الإزاحة:**

$$x(t) = \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-\frac{k}{m} t}).$$

ليكن وزن الجسم mg **يؤثر رأسياً نحوالأسفل (أي له اتجاه موجب). عندئذٍ المقاومة هي** kv **، حيث إنّ** $k > 0$ **ثابت التناسب. وبذلك قانون نيوتن يأخذ الصيغة:** $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$ **. أي أنّ :**

3.5 تطبيقات في الكيمياء (Application in Chemistry)

نتناول في هذا البند بعض تطبيقات الكيمياء. سوف نركز على مسائل الخلط (Mixture problems) بين محلولين مختلفين في التركيز ومسائل البرودة (Cooling problems). سنبدأ بالمسألة المتعلقة بـ "قانون نيوتن في التبريد": ليكن لدينا جسم درجة حرارته هي $T(t)$ درجة فهرنهايت $\left(T(t)^{o}F\right)$ عند زمن معين t، بالطبع إنّ معدل تغيّر درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t هو $\frac{dT}{dt}$.

نفرض أنّ درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم هي الثابت $T_1^{o}F$ (درجة فهرنهايت). إنّ قانون نيوتن في التبريد ينص على: معدل تغيّر درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t يتناسب مع حاصل الفرق بين درجة حرارة الجسم $T(t)$ ودرجة حرارة الوسط المحيط بالجسم. أي أنّ:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_1)$$

حيث k ثابت التناسب.

المعادلة السابقة من الرتبة الأولى ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات، كما هو موضح:

$$\frac{dT}{(T-T_1)}=k\,dt$$

بإجراء عملية التكامل نحصل على: $Ln\left|T-T_1\right|=kt+c_1$ حيث إنّ c_1 ثابت التكامل. ومنها نحصل على:

$$T=T_1+ce^{kt} \qquad (3.15)$$

حيث إنّ $c=e^{c_1}$ هي ثابت.

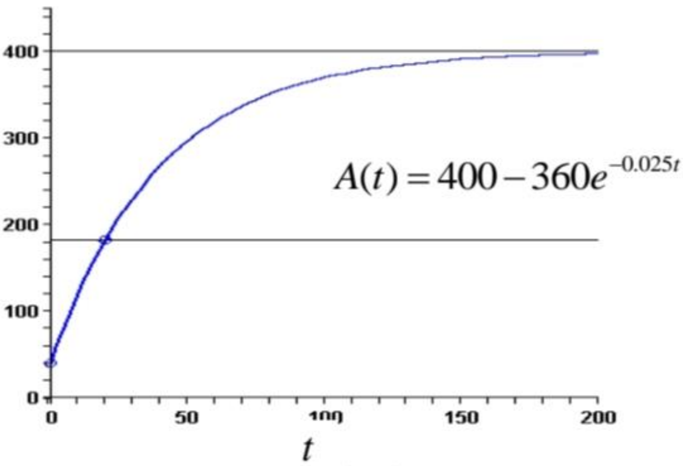
المثال (1): لتكن درجة حرارة غرفة عند البدء، أي عندما $t=0$ ، هي $66^{o}F$. بعد ساعتين اثنتين أصبحت درجة حرارة الغرفة $63^{o}F$. كم تصبح درجة الحرارة بعد **10** ساعات من البدء، إذا علمت إنّ درجة حرارة الوسط المحيط هي $32^{o}F$؟

الحل: نبدأ من المعادلة (3.15) ، وبالتعويض بالمعطيات نجد أنّ الحل هو: $T=32+ce^{kt}$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $T(0)=66$ ، نحصل على: $66=32+ce^{k(0)}$

أي أنّ الثابت: $c=34$ ، ومنها يصبح الحل: $T=32+34e^{kt}$.

الآن، عندما $t \to \infty$ ، إنّ $e^{-0.025t} \to 0$. فعليه إنّ كمية الملح بعد زمن طويل جداً هو **400** رطل. وهذا الجواب منطقي لإنّ البرميل يحتوي على **200** غالون ماء، وبعد زمن طويل يكون التركيز **2** رطلي ملح لكل غالون، أي أنّ الجواب مطابق. انظر الشكل (3.17):



الشكل (3.17)

المصادر:

• [1] د. إسماعيل بوقفه وعايش الهنادرة "المعادلات التفاضلية العادلة حلول وتطبيقات" جامعة العلوم والتكنلوجيا ، الجمهورية اليمنية. 2013.

• [2] أ.د السيد محمد أبو دهب خضيري وظاهر عبدالحميد نوفل ، مراجعة أ.د عبدالمعطي محمد عبدالله "مقدمة في المعادلات التفاضلية" الطبعة الأولى (1441هـ - 2020م).

• [3] أ.د حسن مصطفى العريفي واخرون "المعادلات التفاضلية" الجزء الأول ، دار النشر مكتبة الرشيد الطبعة الأولى (1427هـ - 2006م)

• [4] د. خالد احمد السامرائي ، د. يحيى عبد سعيد "طرق حل المعادلات التفاضلية" وزارة التعليم العالي والبحث العلمي العراقي، 1980.

• [5] د. مجدي امين كتبي ومروان امين كتبي "الرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية" مكتبة الملك فهد الوطنية الطبعة الأولى (1419هـ - 1999م).

- معدل خروج كميه الملح = معدل خروج المحلول × التركيز = 5 × $\frac{[illegible]}{200}$ **رطل**