جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة / قسم الرياضيات

عنوان البحث:

اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبة

بحث تخرج مقدم لمجلس كلية التربية للعلوم الصرفة كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد الطالبة
زهراء صباح جليل عبد الحسين

بأشراف
م.م.حيدر فيصل غازي

2023 م

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل رب زدني علما

صدق الله العظيم

الاهداء

الى نور عيوني الى من جاهدوا في تربيتي ووصولي الى هنا وأول من آمن بقدراتي ووقفوا بجانبي بكل قرارتي واختياراتي **أمي وابي** واخوتي

الى السند من بعد امي وابي **زوجي** العزيزالذي شد على يدي وقت الصعاب و جعلني اكمل ما بقي من دراستي بجانبه

الى كل من شجعني على الوصول وساعدني في تربية طفلي وقت دراستي **اهل زوجي**

الى **صديقاتي** اللاتي لم يبخلن يوماً في مساعدتي وارشادي

الى كل هؤلاء اهديهم هذا العمل المتواضع سائلين المولى ان ينفعنا به ويمدنا بتوفيقه

الشكر والعرفان

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلَام على سيد المرسلين وعلى اله اجمعين

لابد لنا ونحن نخطوا خطواتنا الاخيرة في الحياة الجامعية

من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد تبعث الأمة من جديد

وقبل أن نمضي أقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة . . .

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة .

إلى أساتذتنا الأفاضل وبالأخص الي الأستاذ حيدر فيصل

المحتويات

ترتيب الاشكال

المقدمة

التحليل المركب واحد من اكثر فروع الرياضيات نجاحاً وتشويقاً ،فنتائجة تساعد على اثبات نظريات مهمة وتفتح آفاقًا لعدة مفاهيم في مجالات أخرى للرياضيات وتعتمد الكثير من الطرق الفعالة المستخدمة في تطبيقات الرياضيات في الهندسة والعلوم الأخرى في نظريات الدوال المركبة

كمـــا يعطـــي التحليـــل المركـــب مقدمـــة ممتـــازه للرياضـــيات المعاصـــرة بســـبب ســـعة تطبيقاتـــة وجمعـــة بـــين المفـــاهيم الهندســـية والتحليلية ويسر الكثير من نتائجة

تعـــد التطـــورات الحديثـــة فـــي نظريـــة الدالـــة المركبـــة ونظريـــة المتغيـرات المركبـة بإعطـاء تطبيقـات مفيـدة فـي كثيـر مـن مجـالات الهندسة .

ولقـد ركـزت فـي بحثـي المتواضـيع فـي خصـائص بعـض الـدوال المشـابهة للـدوال الحقيقيـه الاوليـة (الاساسـية)مثل الدالـة الاسـية والدالـة اللوغارتميـة والـدوال المثلثيـة والزائديـة وركـزت علـى خصـائص هـذة الـدوال المركبـة التـي تختلـف عـن تلـك لمثيلاتهـا الحقيقية

الفصل الأول

الفصل الاول

العدد المركب *the* complex number

1.1 مقدمة تاريخية للعدد المركب[4]

بسبب نمو وتعقد الحياة الانسانية مع تطور الحضارة فقد احتاج الانسان في كل مرحلة الى نظام اعداد يلبي متطلباته الحياتية لقد شهد تطور العدد المركب لعدة مراحل يمكن تلخيصها في النقاط الاتية:

- في عام 1545نشر جيرولاما كاردامو كتابة الفن العظيم مع حل المعادلة $Z^3 + Z^2a_2 + Za_1 + a_0 = 0$
- في عام 1572،اظهر رافائيل بومبيلي في كتابة "الجبر" ان الارقام السالبة لها فائدة كبيرة
- في عام 1732،قدم ليونهارد اويلر صيغته لحل $x^n - 1 = 0$، والتي $\cos \theta \sqrt{-1} \sin \theta$ وهو اول من استخدم الرمز $i = \sqrt{-1}$

في عام 1831، كارل فريدريك غاوس ،انتج تمثيل هندسي واضح ل x+yi

1.2 اصل الاعداد المركبة [4]

متعددة الحدود بصيغتها العامة $aP^2 + bp + c = 0$ يمكن حلها بواساطة الحل العام :

$$P = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

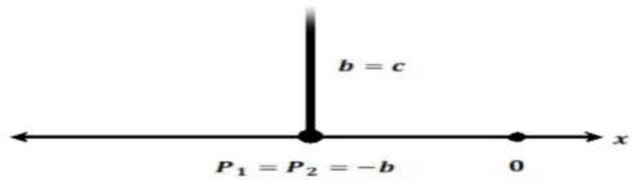
فاذا اعدنا صياغة المعادلة العامة لتصبح بالشكل :

$$a=1 \quad ، \quad P^2 + 2bP + c^2 = 0$$

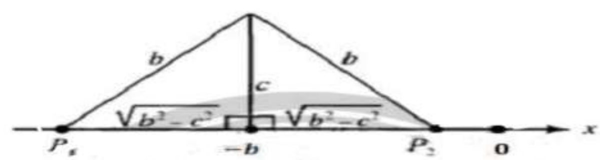
فان الحل العام سيصبح بالشكل التالي $P = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$

حيث يمكن تمثيل الحل بسهولة على خط الارقام كأزاحة الى اليسار واليمين من النقطة (b-) بقيمة تساوي $\sqrt{b^2 - c^2}$ في هذه الحاله ،لدينا ثلاث احتمالات :

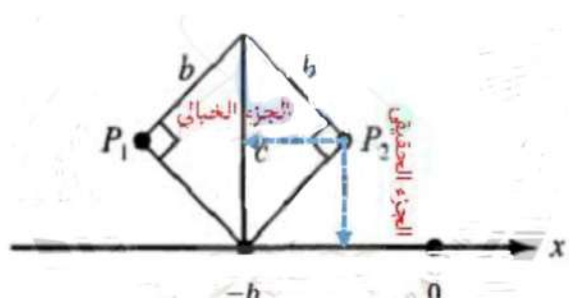
- $if\ b{=}c\ then P_1 = P_2 = -b \quad \& \quad b^2 - c^2 = 0$



- if b>c then $P_1 \neq P_2 \,\&\, b^2 - c^2 > 0$



- if b<c then $P_1 \neq P_2 \,\&\, b^2 - c^2 < 0$



شكل (1-1) يوضح الاحتمالات الثلاث لازاحة الى اليسار اواليمين

كما هو موضح ان نقاط الحل P_1 وP_2 لا تقع على خط الاعداد في الواقع يجب اعادة تمثيلها هندسيا بمستوي بدلا من الخط لتحقيق الموقع الجديد ل P_1 وP_2

1.3 أنظمة الاعداد number systems [4]

قبل ابتكار نظام الارقام المركبة ،كانت هناك عدة أنظمة اعداد اخرى سبقته ، وهي :

1. نظام الاعداد الصحيحة

يساعد نظام الاعداد هذا في اجراء عملية العد وحل المعادلات ذات الشكل التالي :

$$X + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = -c$$

2. نظام الاعداد الكسرية

يمنحنا نظام الارقام هذه القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$b x + c = 0 \quad \rightarrow \quad X = -\frac{-c}{b} \quad ، \quad b \neq 0$$

3. نظام الاعداد الحقيقية

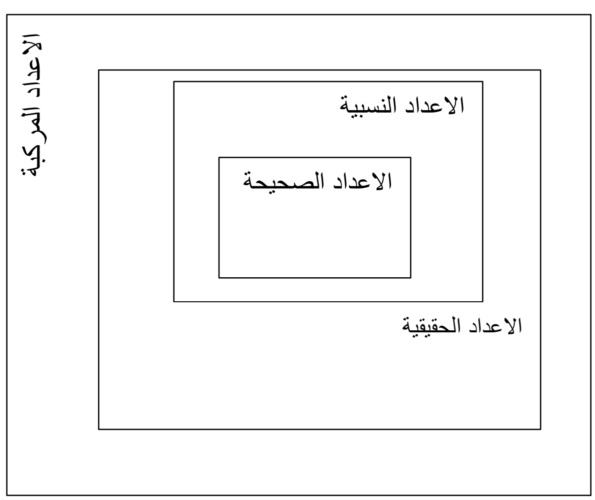
يمنحنا نظام الارقام هذه القدرة على حل المعادلات ذات الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لكن جميع الانظمة السابقة عاجزه عن حل المعدلة البسيطة التالية:

$$x^2 + 1 = 0$$

من هذه الحقيقة تأتي الحاجة الى نظام اعداد جديد قادر على حل مثل هذه المعادلة، وقد اطلق على نظام الاعداد هذا نظام الاعداد المركبة



شكل (1-2) يوضح حجم نظام الاعداد المركبة نسبة لباقي الانظمة

1.4العدد المركب complex number [4]

يمكن تعريف العدد المركب على انه ازواج مرتبة $z=(x,y)$ حيث x,y ارقام حقيقيه ويمكن تشكيلها على النحو التالي:

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=-1 \qquad i^{3=-\sqrt{-1}} \qquad i^4=1 \qquad .....$$

حيث xيسمى الجزء الحقيقي و y يسمى الجزء التخيلي :

$$x=\ Re(z) \qquad y=I\ m\ (z)$$

مثال 1.1 ليكن a ,b اعداد صحيحة فان :
(a,0)=a+i0=a عدد حقيقي تام
(0,a)=0+ia=ia عدد خيالي تام
(a ,b)=a+ ib عدد مركب

مثال 1.2 حدد الجزء الحقيقي والجزء الخيالي للعدد (1+i2)
2=im(1+i2) 1=real(1+i2)

1.4.1 خصائص عملية المساواة[4]

1- رقمين معقدين متساويان اذا وفقط اذا كانت احداثياتهما xوالاحداثيات y متساوية:

$$z_1=z_2 \quad \text{iff} \quad x_1=x_2 \quad \& \quad \mathbf{y_1}=y_2$$

$$\mathbf{x_1+iy_1=x_2+y_2i}$$

2- يكون الرقم المركب مساويا للصفر اذا كان كلا الجزئين (الخيالي والحقيقي) يساوي الصفر اي ان $x=0$ $y=0$

If $z=0 \quad x+yi=0 \quad x=0 \quad y=0$

1.4.2 قانون الجمع

$$z_1 = z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + y_2 i) = i(x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2)$$

1.4.3 قانون الطرح

$$z_1 = z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + y_2 i) = i(x_1 - y_1 \; i(x_2 - y_2)$$

1.4.4 قانون الضرب

$$Z_1 Z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

$$= x_1 x_2 + i x_2 y_1 + i x_1 y_2 - y_2 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_2 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$Z_1 Z_2 = (x_1 x_2 - y_2 y_2 , x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

1.4.5 المرافق المركب[4]

المرافق المركب لعدد مركب $Z = x + yi$ والذي يرمز له $(\bar{z})$ هو Z=x- yi.

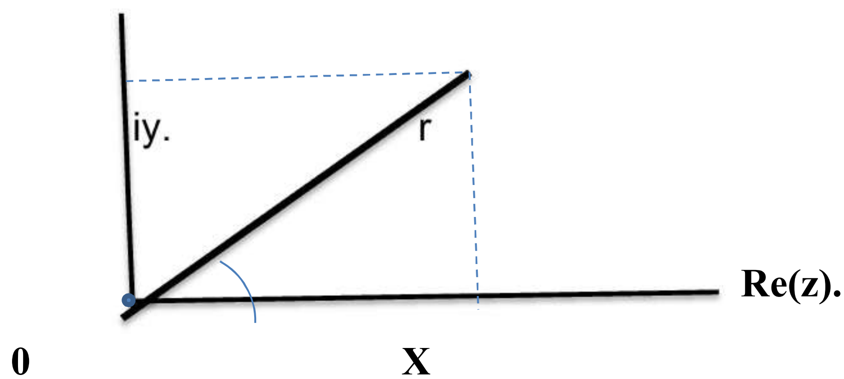
مثال 1.3. جد مرافق العدد المركب Z=3+ i4 الحل : العدد المرافق Z=3-4i

1.5 التمثيل القطبي polar Representation[1]

وجدنا ان الاعداد المركبه يمكن ان تمثل بمتجهات في المستوي المركب وفي هذا الجزء سوف نستخدم فكرة قطعة الخط المستقيم الموجهة لحساب خواص الطول ،وزوايا ميل المتجه في المستوي المركب

لندرس المتجه غير الصفري :

$Z=x+iy$



الشكل (1-3) يوضح التمثيل القطبي للعدد المركب

نستطيع حساب طول المتجه z باستخدام نظرية فيثاغور س :

$$r=\sqrt{X^2+y^2}$$

نسمي هذا الطول بمقياس العدد المركب   z ويرمز له بالرمز:

$$|z| = \sqrt{X^2+y^2}$$

$$|z|\geq im(z) \quad , \quad |z|\geq Re(z)$$

تسمى القيمة الأساسية للازاحة الزاوّية (argument) ويرمز لها بالزمر Arg z
وعندما نتعامل مع (argument). من المتعارف عليه ان نستخدم الرمز arg z
مع اغفال مضاعفات 2π

ونستخدم العباره $Arg\ z + 2\pi k$ حيث k عدد صحيح ثابت للدلاله على زاوية معينة

وبالرجوع الى المتجه الأصلي حيث : $z=x+iy$ نلاحظ ان :

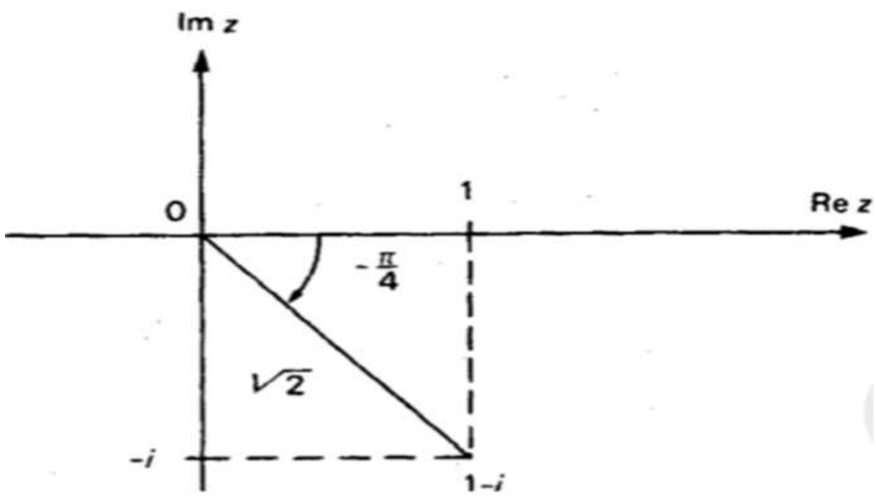
$$x = r\cos\theta = |z|\cos\arg(z)$$

$$y = r\sin\theta = |z|\sin\arg(z)$$

وبالتالي : $z=x+iy=r(\cos\theta + i\sin\theta)$

مثال 1.3. اوجد التمثيل القطبي للعدد 1-i

الحل : سيكون الحل موضح بالشكل التالي..



ويسمى هذا التمثيل القطبي للعدد المركب z كما في الشكل (1-4)

مقياس العدد 1-i هو :

$$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}$$

بينما الزاوية الأساسية للعدد 1-i هي:

$$Arg\ (1-i) = \frac{-\pi}{4}$$

والزاوية القطبية غير وحيدة التحديد ،اذن زاوية الميل هي :

$$Arg\ (1-i)= \frac{-\pi}{4}+2\pi k$$

حيث k أي عدد صحيح ،وبالتالي فإن التمثيل القطبي للعدد المركب هو :

$$1-i=\sqrt{2}[\cos(\frac{-\pi}{4}+2\pi k) + i\sin(\frac{-\pi}{4}+2\pi k)]$$

ضرب عددين مركبين w،z له تفسير هندسي مشوق فمثلاً عندما نكتب كلا من العددين بشكله القطبي لنفترض ان $\theta = \arg z$ و $\emptyset = \arg w$ وعند كتابة z و w بالتمثيل القطبي:

$$Z=|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$W=|w|(\text{con}\emptyset + i\sin\emptyset)$$

فأن $Z \bullet W=|z|\,|w|\ (\cos\theta + i\sin\theta)\ (\cos\emptyset + i\sin\emptyset)$

وباضافة العلاقة المثلثية التالية :

$$Z\,W =|z||w|[\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset). \qquad (1)$$

وبما ان: $|\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)| =1$

فإننا نجد من معادلة (1) أن :

$$|ZW|=|z||w| \qquad (2)$$

$$\text{Arg } zw=\arg z+\arg w$$

وبالتالي فان طول المتجه zw هو ناتج ضرب كل من طول المتجه z والمتجه w

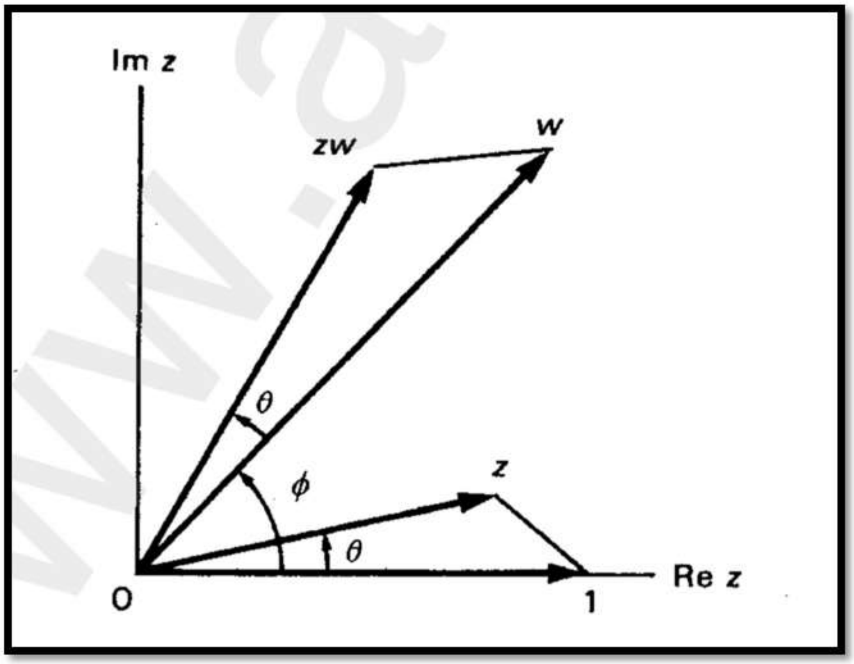
كما ان الزاوية القطبيه للمتجه zw هو مجموع الزاويتين لكم من متجه z ومتجه w.

وبما ان الزواية تحب دون اغفال مضاعفات 2π فان المعادلة (3) تقدم لنا تفسيراً فحواه :

اذا اعطينا قيمة معينة لاي من الحدود في (3) فإنه توجد قيمة للحد الثالث تكون فيه المساواة صحيحة في (3)

يوضح الشكل التالي البناء الهندسي للضرب لاحظ ان الزاوية بين w والزاوية بين zw يجب ان تكون مساوية للزاوية بين 1 و z

وعليه فإن المثلثين z 1 0 و zw w 0 متشابهان



الشكل (5-1) يوضح البناء الهندسي للضرب

يوصلنا قسمة عددين مركبين الى المعادله التاليه

$$\frac{z}{w}=\frac{z\,\bar{w}}{w\bar{w}}=\frac{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)|\bar{w}|(\cos\emptyset-i\sin\emptyset)}{|w|^2}\quad w\neq 0$$ حيث

حيث

$|\bar{w}|=|w|$ وبوساطة صيغ الجمع المثلثية نحصل على:

$$\frac{Z}{W}=\frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta-\emptyset)+i\sin(\theta-\emptyset)]$$

ومنه :

$$\frac{Z}{W}=\frac{|z|}{|w|} \qquad (4).$$

و $\quad \arg(z/w)=\arg z-\arg w \qquad (5)$

المعادلة(5) تخضع لنفس التفسير الموجود في معادلة (3)

الضرب:

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \emptyset) + i\sin(\theta + \emptyset)$$

حيث تؤدي $\theta = \arg z$ و$\emptyset = \arg w$ الى نتيجة شيقة عندما تكون z=w فعندما $\theta = \emptyset$

فإن: $Z^2=|z|^2\ [\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$

بوضع $w = z^2$ نجد ان :

$$Z(z^2) = |z||z|^2[\cos(\theta + 2\theta) + i\sin(\theta + 2\theta)]$$

او

$$Z^3 = |z|^3[\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)]$$

حيث ان :

$$Z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فقد اثبتنا ان:

$$(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{son}\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

وان:

$$(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{son}\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

.

.

وبالاستمرار بهذه الطريقة ،نحصل على نظرية ديموافر (De mover’s theorem) التي سميت على شرف العالم الرياضي الفرنسي أبراهام ديموافر (١٦٦٧-١٧٥٤م):

$$(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{son}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

حيث ان n عدد طبيعي موجب،ولنظرية ديموافر العديد من التطبيقات المفيدة في عصر اليوم

الفصل الثاني

الفصل الثاني

(2-1) التوابع التحليلية [3]

تعريف :

يسمى كل تابع f يقبل الاشتقاق على مجموعة مفتوحة G $(G \in C)$ يسمى تابعاً تحليلياً على G

ونرمز لمجموعة التوابع التحليلية على G بالرمز $H(G)$

أي ان $f \in H(G) \Leftrightarrow f$ يقبل الاشتقاق على G

(2-2) معادلتي كوشي- ريمان[3]

تسمى المعادلتين

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

بالمعادلتين التفاضليتين الجزئيتين لكوشي -ريمان

وتكمن أهمية هاتين المعادلتين بالاضافه الى شرط قابلية التفاضل لكل من u وv لايمكن ان يكونا جزءاً حقيقياً وجزءاً تخيلياً لتابع f قابل للاشتقاق

(2-3)الاس المركب [4] the complex exponential

ان الدوال الكسريه في المتغير الحقيقي تعطي دوال تحليلة عندما يستبدل المتغير الحقيقي بمتغير مركب z ، لايعني هذا انه مثال منفرد للدوال التحليلية في الحقيقة جميع الدوال الاوليه في حساب التفاضل والتكامل مثل الدوال الاسية اللوغارتمية والمثلثية تعطي دوال تحليلية بعد تمديد مناسب للمستوى المركب

(2-4) اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبة [4]

he complex logarithm and complex power factions

بما أن الدالة $R\ e^z \to C$: أحادية ،فانه يمكن تعريف معكوسها من R الى C بنفس الطريقة التي عرفت بها الحالة الحقيقية ونسمي هذه الدالة العكسية اللوغارتمية ونرمز لها بالرمز:

$$\text{Log } z: R \to C$$

حيث ان الاس المركب واللوغاريتم الواحد معكوس للآخرينتج :

$$\text{Log } e^z = z$$

$$e^{\log z} = z$$

المهمة الوحيدة المتبقية هي الحصول على صيغة للمقدار $\log z$ بدلالة بعض الدوال المعروفة وتقف في طريقنا صعوبات احداها ان اللوغاريتم معرف على سطح ريمان ، وبما ان R يحتوي على عدد لا نهائي من صور $C-\{0\}$ منضدة لتكون درجاً حلزونياً الا ان لها قيمة واحد هي R وبالتالي يمكننا التمييز بين فروع مختلفة لـRباستخدام التمثيل القطبي:

$$z = |z|e^{i \arg z}$$

لكل z في R

التمثيل القطبي وطبيعة معكوس الدوال اللوغاريتيمية والوال الاسية يعطي تعريفاً طبيعياً للوغاريتم المركب :

$$\log z = \log\left(|z|e^{i \arg Z}\right) = \left(e^{\log |z| + i \arg z}\right)$$

$$= \log\ |z| + i \arg z.$$

حيث $\log |z|$ هو اللوغاريتم الطبيعي كما في مبادئ التفاضل والتكامل

اذا كانت z تقع على فرع من فروع R حيث $\varepsilon < |z|$ فإن مجموعة النقاط على ذلك الفرع التي بعدها عن z اقل من ε يكون الجوار - ε على سطح ريمان،نعمم تعريف الإتصال والاشتقاق والتحليلية للدوال المعرفة على سطح ريمان حيث يعتمد التعريف على سلوك الدالة محلياً فالاتصال عند z يعتمد فقط على الفرق f(z)-f(w) لأي نقطة w في أي جوار- ε للنقطة z ،بينما الاشتقاق عند z يعتمد فقط على النسبة:

[f(z)-f(w)]\(z-w)

باستخدام هذه المفاهيم يسهل التحقق من ان log z متصلة حيث إن :

$$\log z - \log w = \log|z| + i\arg z - \log|w| - i\arg w$$

$$= [\log|z| - \log|w|] + i[\arg z \; - \arg w]$$

ذلك لان اللوغاريتم الطبيعي والدالة arg دالتان متصلتان

نظرية

ان الدالة

$$\log z = \log|z| - i\arg z$$

تكون تحليلة لجميع النقاط z من R

البرهان

بما أن :

$$u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$$

$$v = \arg z \; = \tan^{-1}(y\backslash x) + \pi n$$

فإن :

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

فمعادلتي كوشي متحققة والمشتقات الجزئية متصلة في R لان التحليلية خاصية محليه فإن log z تحليلية في R

اللوغاريتم المركب له نفس الخواص المعتادة في اللوغاريتم :

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$$

$$\log\frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$$

لاحظ اننا افترضنا في هاتين المعادلتين ان z_2 و z_1 نقطتان من نقاط سطح ريمان R حيث $z = e^{\log z}$ لاي نقطة z من R وبتطبيق قاعدة السلسلة للتفاضل نحصل على:

$$e^{\log z}\,(\log z) \;= 1$$

أو :

$$(\log z) = \frac{1}{z} \qquad , z \in R$$

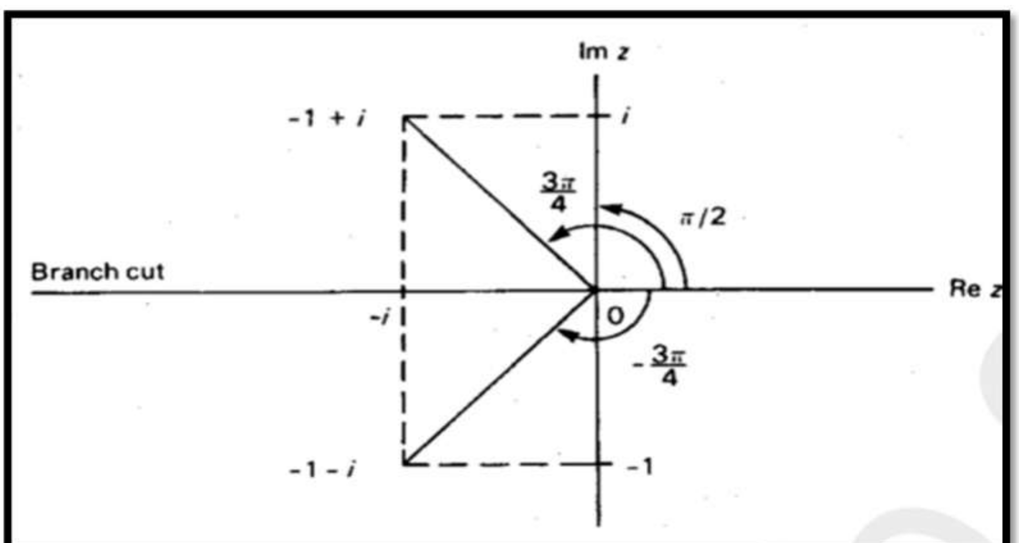
وعليه تكون صيغ التفاضل العادية صحيحة على R

كما هو موضح في تعريف القيمة الرئيسية Arg z للزاوية arg z نستطيع ان نعمم هذا المفهوم إلى اللوغاريتم باعتبار ان اللوغاريتم دالة عكسية للدالة الاسية نسمي فرع Rالمأخوذ على طول الجزء السالب من المحور الحقيقي -الذي هو صورة من الشريط غير المنتهي $-\pi < y \le \pi$ بالفرع الرئيسي للوغاريتم.

ونرمز للمقدار log z عندما تكون ماخوذة على الفرع الرئيسي بالرمز :

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i \arg z$$

ويسمى هذا المقدار بالقيمة الرئيسية (principal value). الى الرمز log z



الشكل (1-2) يوضح القيمة الرئيسية

لاحظ ان القيمة الرئيسية معرفة فقط على الفرع R حيث Arg z موجودة يجب اخذ الحيطة عند العمل مع الفرع الرئيسي الى اللوغاريتم Log z

فالخواص العادية للوغاريتم قد لايمكن تطبيقها فعلى سبيل المثال :

$$\log i = \log|i| + i \arg i = i\pi/2$$

$$\mathrm{Log}\,(-1+i) = \log|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}|-1+i|$$

$$= \log\sqrt{2} + i3\pi\backslash 4$$

ولتكن :

$$\mathrm{Log}\,[i(-1+i)] = \log(-1-i)$$

$$= \log|-1-i| + i\arg(-1-i)$$

$$\mathrm{Log}\sqrt{2} - \frac{i(3\pi)}{4}$$

وعليه:

$$\mathrm{Log}\,[i(-1+i)] \neq \log i + \log(-1+i)$$

لذلك فإن التعبيرين يختلفان بمضاعفات 2 iπ

يمكن استخدام الدوال الاسية واللوغاريتمية. لتعريف القوى المركبة.

(2-5) تعريف القوى المركبة [4]

$$z^a = e^{a\log z}$$

حيث a عدد مركب ≠ الصفر و z ≠0

$z^a: R \to R$ان الداله تحليلية واحادية حيث انها تحصيل دالتين لهما هذه الصفات.

وباستخدام قاعدة السلسلة نجد ان:

$$.\,z^a = e^{a\log z}.\frac{a}{z} = az^{-1}$$

تعطى القيمة الرئيسية في دالة القوى بالصيغة:

$$z^{a} = e^{a\,lo}$$

في اغلب الأحيان ترغب في دراسة الحالة حيث $a=m\backslash n>0$ حيث m و n اعداد صحيحة موجبة لايوجد بينها عامل مشترك.اعتبر مجموعة الاعداد :

$$e^{\log z+2\pi ki} \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \ldots$$

أي تلك النقاط في Rالتي تكون واقعة مباشرة اعلى أواسفل النقطة $e^{\log(z)}$ إذن:

$$= \left(e^{\log z+2\pi ki}\right)^{m\backslash n} = e^{(m\backslash n)\log z} e^{(m\backslash n)2\pi ki}$$

بكتابة $k=pn+q$ حيث pو q اعداد صحيحة . $0 \leq q < n$ نجد ان :

$$e^{(m\backslash n)2\pi ki} = e^{2\pi pmi} e^{2\pi iqm\backslash n} = e^{2\pi ip} \quad \backslash n$$

وعليه فمن هذه القيم المركبة هناك n فقط من الإجابات المختلفة

لهذا تصور الدالة

$z^{m\backslash n} : R \rightarrow R$كل n هي صورة من C-{0} الى صورة واحده من C-{0} ويتكرر الامر نفسه بعد ذلك

بعد هذه الحقيقة من الممكن تبسيط هذه الطريقة المستخدمة في وصف الدالة.

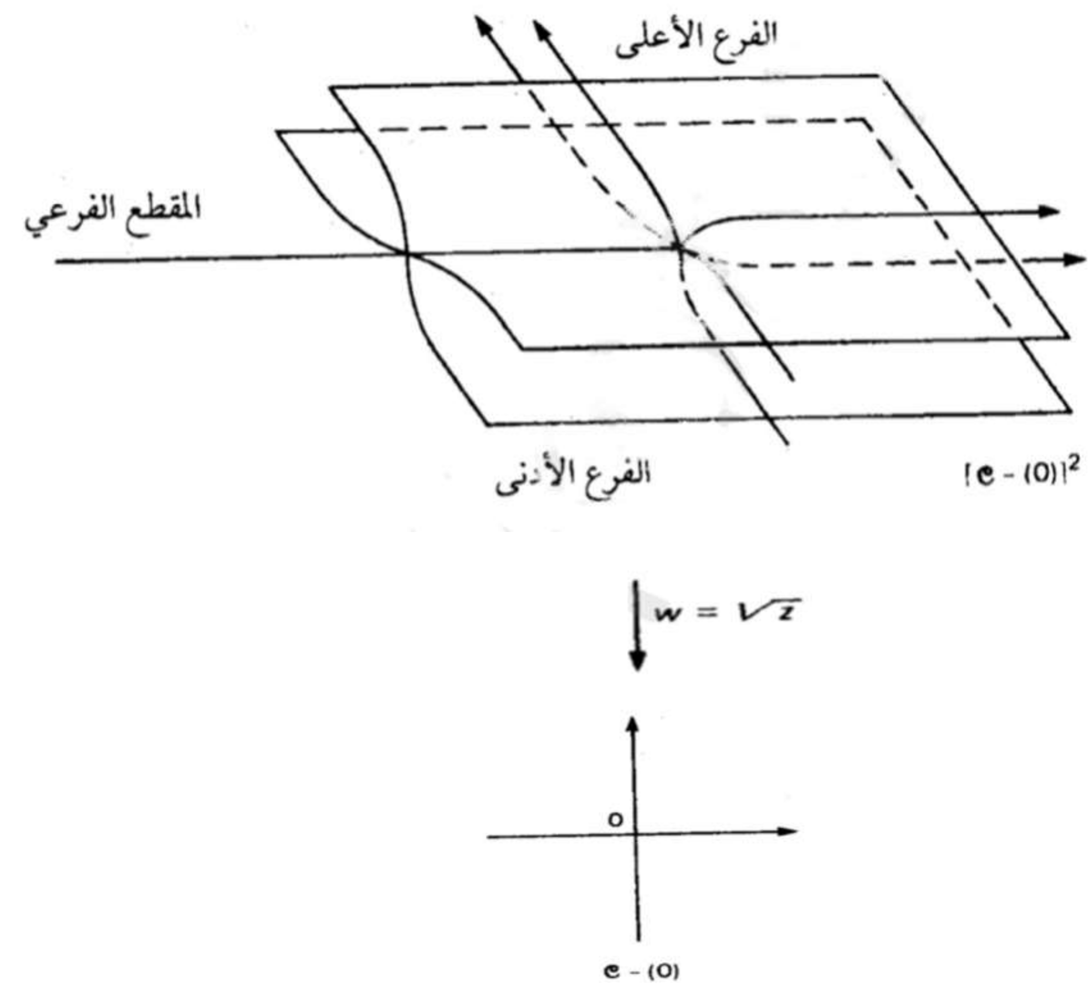
$$W = z^{m\backslash n}$$

وللتبسيط نفرض ان $m=1$ وبالتالي فان :

$$W = z^{1\backslash n} = e^{1\backslash n \log z}\, e^{2\pi iq\backslash n} \qquad , q = 1,2,3 \ldots , n-1,$$

يمكن تصورها على انها تأخذ $[C-\{1\}]^{n}$ الى [C-{0}] حيث $[C-\{1\}]^{n}$ تحتوي على n صورة من [C-{0}] ملصقة واحدة بعد الأخرى على طول المحور الحقيقي السالب كما في R ماعدا الحافة العلوية للفرع العلوي؛فهي ملصقة بالحافة السفلية للفرع السفلي .

مثالصف سطح ريمان المعدل للدالة $w=\sqrt{z}$



من المناقشة أعلاه ،تصور الدالة من $[C-\{1\}]^2$ الى $[C-\{0\}]$ كما هو موضح في الشكل يمكن ان نتصور الفرع العلوي كإنه صور من على المستوى الأيمن والفرع السفلي صور على المستوى الايسر

الداله

$$Z^m = [C-\{0\}] \rightarrow [C-\{0\}]^m$$

هي الدالة العكسية للداله $Z^{1/m}$

وبالتالي فان دالة التحصيل :

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = z^{\frac{n}{m}}: [C - \{0\}]^{n} \rightarrow [C - \{0\}]^{m}$$

هي تحليلية واحادية على سطح ريمان الموضح أعلاه.

يمكن ان يستخدم اللوغاريتم ايضاً لتعريف الدوال المثلثية العكسية

مثال اثبت ان:

$$\sin^{-1} z = -i \log\left[iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

الحل

ان الداله $w = \sin^{-1} z$ هي الدالة العكسية للدالة:

$$z = \sin w = \frac{\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)}{\mathbf{2i}}$$

بضرب طرفي المعادلة في ie^{iw} 2 نجد ان :

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

وبحل هذا المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبه للمقدار e^{iw} نجد ان :

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث الجذر التربيعي يصور $[C - \{1\}]^2$ على $[C - \{0\}]$ (او ثنائية القيمة) وتحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ اللوغاريتم لكل من الطرفين في المساواة السابقة يمكن للمتطابقات العادية وقواعد الاشتقاق للدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية أن تطبق هنا ايضا ومن الحقائق الثابتة ان في اغلب الدوال الرياضية التي تظهر في المسائل الفيزيائية والهندسية تكون تحليلية وعليه ان مفهوم التحليلية يطبق على مجموعة كبيرة ومفيدة من الدوال.

المراجع

١ ولیام ر. دريك ،كتاب التحليل المركب وتطبيقاته ،قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة الملك سعود ص. ب ٦٨٩٥٣-الرياض ١١٥٣٧،ترجمة سعدون إبراهيم عثمان ود. أبو بكر الصديق بيومي

٢ د. احمد خالد العبد العالي ، التحليل المركب ،جامعة الملك فيصل كلية العلوم قسم الرياضيات والاحصاء

٣ الأستاذ محمود مسعود ،التحليل العقدي ،المدرسة العليا للأساتذة

٤ د. حيدر مجيد ،تحليل الدوال المركبة ،جامعة بغداد كلية التربيه للعلوم الصرفه قسم الفيزياء

٥ د. شحاده الاسدي ،أسس التحليل العقدي (٦) و (٧) ،جامعة حلب ،١٩٨٨

٦ د. زكريا نوت ،التحليل المركب (العقدي)،مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ٢٠١١م.