وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

البرمجة الخطية

الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة / جامعة بابل / قسم الرياضيات

بحث تقدمت بهِ الطالبة :

زينب عبد العباس أبراهيم

بأشراف:

أ.د. مشتاق عبد الغني شخير الجنابي

1445 هـ　　**2024 م**

بسم الله الرحمن الرحيم

(يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات

والله بما تعملون خبير)

سورة المجادلة الاية (11)

الاهداء

إلى من دماؤه أفاضت عطراً فأحيت به ثرى نينوى

إلى شهيد كربلاء

إلى صاحب روحي والزمان الامام المهدي (عجل الله فرجة)

إلى شهدائنا الاقمار الذين بفضلهم قد سال الحبر من قلمي وبفضلهم سلكت قدمي هذا الطريق

إلى صاحب السيرة العطرة، والفكر المُستنير؛ فلقد كان له الفضل الأوَّل في بلوغي التعليم العالي (والدي الحبيب) .

إلى من وضع المولى - سبحانه وتعالى - الجنة تحت قدميها... والتي لم تدَّخر جُهدًا في سبيل إسعادي على الدَّوام (أمي الحبيبة).

إلى من كان لهم بالغ الأثر في كثير من العقبات والصعاب (إخوتي واخواتي).

إلى رفيقة دربي زميلتي في الدراسة صديقتي وأختي (زهراء سلام جواد)

إلى صديقاتي وزميلاتي الذين أشهد لهم بأنهم نعم الرُّفقاء في جميع الأمور (طالبات قسم الرياضيات)

إلى جميع أساتذتي الكرام...

واخيراً إلى كل من كان له دور في الدعم المعنوي والمعلوماتي

الشكر والامتنان

الحمد والشكر لله رب العالمين على النعم الكثيرة التي من بها علي والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى اله الطيبين الطاهرين .

من أي أبواب والثناء سندخل، وبأي أبيات القصيد نعبر وفي كل لمسة من وجودكم والحفكم للمكرمات اسطر ، كنتم يا عائلتي . كسحابة معطاءة سعت الأرض فاخترت اليكم يا عائلتي .

وأتوجه بخالص شكري وتقديري وعظيم امتناني الى استاذي الفاضل القدير الاستاذ (الدكتور مشتاق عبد الغني الشخير الجنابي)

لما ابداه من حسن رعاية ورحابة صدر وروح علمية مخلصة فدعائي له بالخير والعافية

ولا يفوتني ان اتقدم بالشكر إلى استاذتي في قسم الرياضيات لما قدموا لي من معرفة علمية، ولكل من ساندني في اعداد هذا البحث.

المحتويات

الخلاصة

نظراً لأهمية البرمجة الخطية في بحوث العمليات حيث تستخدم في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى في حل المشكلة او المسألة، لذا سنتطرق في هذا البحث الى دراسة نظام البرمجة الخطية واستخداماتها واهميتها في الحياة العملية وبعض طرق حلها منها الطريقة الرسومية (Graphical method) وطريقة السمبلكس (Simplex Method) وطريقة البرمجة الثنائية (Method The Dual).

الفصل الاول

المقدمة العامة

1.1المقدمة:

تعد البرمجة الخطية من الموضوعات الأساسية والمهمة في بحوث العمليات، وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، فإن نموذج البرمجة الخطية يقدم طريقة فعالة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، كل منها يخضع لمجموعة من المحددات والقيود، بما يساهم في تحقيق أهداف الإدارة. هي أداة بيانية ورياضية معنية ببناء النماذج. طريقة رياضية لمشكلة ما بإحدى الطرق التالية: طريقة الرسم، الطريقة المبسطة، طريقة التحويل، طريقة التعيين والتخصيص .... إلخ .

يمكن تعريف البرمجة الخطية على أنها طريقة رياضية لتوزيع مجموعة من الموارد والقدرات. يقتصر على عدد من الاحتياجات المتنافسة لهذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة. بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة ، أي أن توزيعه مثالي .والبرمجة تعني وضع خطوات لحل مشكلة أو موضوع لتحقيق هدف معين اي تعبير خطي ، مما يعني افتراض أن الظاهرة التي ندرسها قد تغيرت في طريقة خطية (في شكل خط مستقيم) غالبًا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية سهلة وتجدر الإشارة إلى أن الهدف من تطبيق طريقة البرمجة الخطية هو الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى الوظيفة الموضوعية) ، و أن كل مجموعة من المعادلات لها حل ، وعادة ما يكون للمعادلات حل حلول فورية ، أي إيجاد قيم المتغيرات[1] .

وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية ، نسعى دائمًا لإيجاد الحل الأمثل والحلول من ثلاثة أنواع [2].

- الحل: حل يمكن إيجاده في أي مجموعة من المعادلات.
- الحل الممكن: هو الحل الذي يمكن إيجاده بعد الوصول إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق بشكل عام جميع القيود.
- الحل الأمثل: هو الحل الذي يمكن إيجاده بعد الوصول إلى الحل الممكن ، وهذا الحل يحقق كل قيود الوظيفة الموضوعية الموجودة .في هذا الصدد، يجب التأكد من عدم تحقيق الحل الممكن بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد الوصول إلى حل ممكن.

2.1النبذة التاريخية

تعود مشكلة حل نظام من المتباينات الخطية على الأقل إلى زمن فورييه، الذي نشر في عام 1827 طريقة لحلها،[3] والذي سُميت باسمه طريقة حذف فورييه-موتسكين.

في أواخر ثلاثينيات القرن العشرين، بحث عالم الرياضيات السوفييتي ليونيد كانتوروفيتش والاقتصادي الأمريكي فاسيلي ليونتيف بشكل مستقل في التطبيقات العملية للبرمجة الخطية. ركز كانتوروفيتش على جداول التصنيع، بينما استكشف ليونتيف التطبيقات الاقتصادية. لقد تم التغاضي عن عملهم الرائد إلى حد كبير لعقود من الزمن.

جاءت نقطة التحول خلال الحرب العالمية الثانية عندما ظهرت البرمجة الخطية كأداة حيوية. وقد وجد استخدامًا واسع النطاق في معالجة التحديات المعقدة في زمن الحرب، بما في ذلك لوجستيات النقل والجدولة وتخصيص الموارد. أثبتت البرمجة الخطية أنها لا تقدر بثمن في تحسين هذه العمليات مع مراعاة القيود الحرجة مثل التكاليف وتوافر الموارد.

على الرغم من غموضها في البداية، إلا أن النجاحات التي حققتها في زمن الحرب دفعت بالبرمجة الخطية إلى دائرة الضوء. وبعد الحرب العالمية الثانية، اكتسبت هذه الطريقة اعترافًا واسع النطاق وأصبحت حجر الزاوية في مختلف المجالات، بدءًا من بحوث العمليات وحتى الاقتصاد. أصبحت مساهمات كانتوروفيتش وليونتيف التي تم التغاضي عنها في أواخر ثلاثينيات القرن العشرين أساسًا للقبول الأوسع واستخدام البرمجة الخطية في تحسين عمليات صنع القرار[4].

تم إهمال عمل كانتوروفيتش في البداية في الاتحاد السوفييتي.[5] في نفس الوقت تقريبًا الذي قام فيه كانتوروفيتش، قام الاقتصادي الهولندي الأمريكي تي سي كوبمانز بصياغة المشكلات الاقتصادية الكلاسيكية كبرامج خطية. تقاسم كانتوروفيتش وكوبمانز لاحقًا جائزة نوبل التذكارية في العلوم الاقتصادية لعام 1975.

في عام 1941، قام فرانك لورين هيتشكوك أيضًا بصياغة مشاكل النقل كبرامج خطية وقدم حلًا مشابهًا جدًا للطريقة البسيطة اللاحقة.[6] توفي هيتشكوك عام 1957، ولا تُمنح جائزة نوبل التذكارية بعد وفاته

من عام 1946 إلى عام 1947، قام جورج ب. دانتزيغ بشكل مستقل بتطوير صياغة برمجة خطية عامة لاستخدامها في مشاكل التخطيط في القوات الجوية الأمريكية[7].

في عام 1947، اخترع دانتزيغ أيضًا الطريقة البسيطة التي عالجت مشكلة البرمجة الخطية لأول مرة بكفاءة في معظم الحالات[7]. عندما رتب دانتزيغ لقاءً مع جون فون نيومان لمناقشة أسلوبه البسيط، خمن نيومان على الفور نظرية الازدواجية من خلال إدراك أن المشكلة التي كان يعمل عليها في نظرية الألعاب كانت متكافئة.[7] قدم دانتزيغ دليلاً رسميًا في تقرير غير منشور بعنوان "نظرية حول المتباينات الخطية" في 5 يناير 1948[5].

أصبح عمل دانتزيغ متاحًا للجمهور في عام 1951. وفي سنوات ما بعد الحرب، طبقته العديد من الصناعات في تخطيطها اليومي.

كان مثال Dantzig الأصلي هو العثور على أفضل مهمة لـ(70) شخصًا في(70)وظيفة. إن القوة الحاسوبية المطلوبة لاختبار جميع التباديل لاختيار أفضل مهمة هائلة؛ عدد التكوينات الممكنة يتجاوز عدد الجسيمات في الكون المرئي. ومع ذلك، لا يستغرق الأمر سوى لحظة للعثور على الحل الأمثل من خلال طرح المشكلة كبرنامج خطي وتطبيق الخوارزمية البسيطة. النظرية وراء البرمجة الخطية تقلل بشكل كبير من عدد الحلول الممكنة التي يجب التحقق منها

تم عرض مشكلة البرمجة الخطية لأول مرة على أنها قابلة للحل في زمن متعدد الحدود من قبل ليونيد خاشيان في عام 1979 [8]، ولكن حدث تقدم نظري وعملي أكبر في هذا المجال في عام 1984 عندما قدم ناريندرا كارماركار طريقة جديدة للنقطة الداخلية لحل البرمجة الخطية. المشاكل[9].

3.1 مجالات استخدام البرمجة الخطية : [10]

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات

الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي:

- في حالة التعظيم :

❖ تعظيم الأرباح
❖ تعظيم الإنتاج
❖ تعظيم طاقات التخزين
❖ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال.
❖ تعظيم إستخدام اليد العاملة .

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم

- في حالة التدنئة :

❖ تدنئة التكاليف.
❖ تدنئة الخسائر.
❖ تدنئة عدد الموظفين.
❖ تدنئة الأجور الإجمالية .

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

4.1 مجالات تطبيق البرمجة الخطية : [11]

تدخل تقنية البرمجة الخطية في بعض المجالات الحياتية، فيما يأتي أبرزها:

1_ الغذاء والزراعة:

يطبق المزارعون تقنية البرمجة الخطية في عملهم من خلال تحديد كافة تفاصيل المحاصيل التي يجب زراعتها، مثل الكمية، وكيفية استخدامها بكفاءة حتى يتسنَى لهم زيادة العائدات المالية. وفي مجال التغذية تعتبر هذه التقنية وسيلة مهمة للمساعدة في التخطيط للاحتياجات الغذائية، مثل توفير سلال غذائية صحية بتكلفة معقولة للأسر المحتاجة، أو تحديد الأطعمة المغذية من أجل الوقاية من الأمراض؛ بالإضافة إلى البيانات المتعلقة بها كالأسعار وغيرها، مع قيود أو محددات مثل الثقافة، أو إرشادات التغذية الصحيحة

2_ الهندسة:

الهندسة تستخدم هذه التقنية للمساعدة في حل مشاكل التصميم والتصنيع، إذ تُعتمد البرمجة الخطية كأداة أساسية في تحسين الشكل الديناميكي الهوائي، كما في شبكات رقائق الهواء لصنع جناح خالٍ من الصدمات والعيوب، بدقة عالية، وذلك بناءً على أسس وقيود.

3_ قطاع النقل:

تزيد من كفاءة التكلفة والوقت، إذ تأخذ البرمجة الخطية المسارات والأوقات في عين الاعتبار، فتستخدمها شركات الطيران لتحسين أرباحها وفقًا لأسعار المقاعد، وطلب العملاء وجدولة الطيران والمسارات.

4_ التصنيع الفعال:

يجب أن تعمل كل خطوة من خطوات عملية التصنيع بكفاءة لتحقيق الأرباح، لذلك تستخدم الشركات البرمجة الخطية لتحديد كمية المواد الخام التي يجب استخدامها، وتحديد الوقت الذي تحتاجه كل آلة في عملية التصنيع، وغيرها من الأمور التي تتعلق بعملية الإنتاج.

5_ مجال الطاقة:

توفر البرمجة الخطية طريقة لتحسين أنظمة الطاقة الكهربائية بنوعيها التقليدي، والحديث المتمثّل بمصادر الطاقة المتجددة مثل طاقة الرياح؛ والطاقة الشمسية الكهروضوئية، إذ تحسّن هذه التقنية متطلبات الحمل الكهربائي من خلال مراعاة المولدات، وخطوط النقل؛ والتوزيع والتخزين، مع بقاء التكاليف مستدامة لتحقيق الأرباح.

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

1.2 المقدمة

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الهامة في بحوث العمليات وهي أسلوب لاتخاذ القرار حيث يمكن التعبير عن المشكلة عن طريق مجموعة من المعادلات الخطية والتي تتكون من معادلة تهدف لتعظيم أو تصغير متغير أو أكثر ومعادلة أو معادلات تعبر عن بعض القيود. لذا سنتطرق في هذا الفصل الى مفهوم البرمجة الخطية وكيفية بناء وصياغة نماذج البرمجة الخطية

2.2 مفهوم البرمجة الخطية :

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[1].

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة .

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات.

3.2 بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية Building (Formulation) of (Linear Programming Model): [12]

ان اهمية اسلوب البرمجة الخطية تعود الى اهمية المشاكل التي يمكن حلها بصفة عامة. ولكن ليس كل مشكلة يمكن حلها باسلوب البرمجة الخطية حيث يتطلب حل المشكلة باسلوب البرمجة الخطية ان تتوافر فيها الشروط الآتية:

- **تحديد دالة الهدف(Objective Function):**

وهو الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه وامكانية التعبير عن هذا الهدف في صورة دالة خطية(Linear Function) والحصول على قيمة رقميه له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وايجاد

النهاية العظمى لها(A Maximum Point) اذا كان الهدف المنشود ربحا أو تقليل القيمة وايجاد النهاية الصغرى(A Minimum Point) اذا كان الهدف تكلفة أي الوصول الى ادنى تكلفة ممكنة. وتتكون دالة الهدف من المتغيرات اما المعامل الخاص بكل متغير هو عبارة عن ربح الوحدة الواحدة في حالة تعظيم دالة الهدف او يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

- **تحديد القيود(Constraints):**

أي امكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحة في صورة قيود خطية(Linear constraints) وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة انتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة بشكل متراجحات (Linear Inequalities) او معادلات خطية

(Linear Equations) او خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية.

- **شروط عدم السلبية(Non - Negativity) :**

اذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

4.2 صيغ نماذج البرمجة الخطية [14] (Forms of Linear programming Models)

أنواع تقنيات التحسين

1- تقنيات الامثلية في البرمجة الخطية

2- تقنيات الامثلية في البرمجة الغير الخطية

ان البرمجة الخطية تعتبر أحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تعالج مسألة تخصيص أو توزيع الموارد أو الطاقات المحدودة لتحقيق هدف معين، ويعبر عن هذا الهدف بدالة تسمى دالة الهدف (Objective Function) ويرمز لها بالرمز (Z) وتكون بنوعين أما (Max) وتأتي عندما تهدف المنظمة إلى تعظيم الارباح أو (Min) وتأتي عندما تهدف المنظمة إلى تقليل التكاليف وتخضع هذه الدالة الى محددات او شروط او قيود (Constraints) والتي هي عبارة عن متباينات تعبر عن المواد الأولية، ساعات العمل طاقات المكائن الطاقة الكهربائية، الأيدي العاملة) وكذلك قيود عدم السلبية والتي تعبر عن كون جميع متغيرات النموذج الرياضي عبارة

عن قيم موجبة أو صفرية ولا يمكن أن تكون قيم سالبة ويأتي نموذج البرمجة الخطية بثلاث صيغ هي:

1.4.2 الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية (General Form of Linear Model Programming) :

لو نظرنا الى نموذج البرمجة الخطية الذي تم بناؤه أو تمت صياغته في التمارين التي تم استعراضها سابقا والتي تم بناءها اعتمادا على المشاكل المبينة في تلك التمارين نجد أن هذه النماذج جميعها بالصيغة العامة General Form ، وان نموذج البرمجة الخطية بشكل عام يتكون من:

1- المتغيرات (Variables)

2-العلامات: وهي:

≤	اصغر او يساوي	Less than or equal
≥	اكبر أو يساوي	More than or equal
<	اصغر من	Less than
>	أكبر من	More than
=	يساوي	Equal

3- معاملات المتغيرات (Variables Parameters)

4- دالة الهدف (Objective Function)

5- القيود (Constraints)

6- قيود عدم السلبية (Non-Negative Constraints)

7 - S.T: وتعني (Subject to) استنادا إلى أي ان المنشأة تسعى إلى تحقيق الهدف المبين في الدالة الخطية دالة الهدف (Z) استنادا إلى الشروط أو القيود التالية.

وعليه تكون الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية.

Max or Min **$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$**

S.t

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{1n}\,x_n \leq, =, \geq\ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{2n}x_n \leq, =, \geq\ b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{3n}x_n \leq, =, \geq\ b_3$$

. . .

. . .

. . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\ x_2 + a_m x + \ .\ .\ .\ a_{mn}x_n \leq, =, \geq\ b_m$$

$$x_1, x_2, x_3\ .\ \ .\ \ .\ \ x_n\ \geq\ 0$$

أن هذه الصيغة هي الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية، ولو امعنا النظر اليها نجد ان

(a , b , c) ثوابت وان (X_{ij}) متغيرات

الصيغة المختصرة للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

Max or Min

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\,X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\,X_j\ \leq = \geq\ b_i$$

j = 1 ,2,3 ………, n

i = 1,2,3……….,m

$X_j \geq 0$

2.4.2الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية Canonical Form of Linear Programming Model :

أن الفرق بين الصيغة القانونية النموذج البرمجة الخطية والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يتمثل بما يلي:

1-دالة الهدف (Z) في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون اما من نوع (Max) أو من نوع (Min) بينما تكون في الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية من نوع (Max) فقط

2-علامات القيود في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون $(\leq , = , \geq)$بينما تكون في الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية اصغر و يساوي $(\leq)$ فقط اما مكونات نموذج البرمجة الخطبة هي نفسها بالصيغتين العامة والقانونية وكما يلي:

الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية

Max $\quad Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots\ldots + C_nX_n$

S . t

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}x_3 + \ .\ .\ .a_{1n}\, x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}x_3 + \ .\ .\ .a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}x_3 + \ .\ .\ .a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\ x_2 + a_m x + \ .\ .\ .a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, x_3 .\ \ .\ \ .\ \ x_n \geq 0$$

الصيغة المختصرة للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_j \le = \ge b_i$$

j = 1 ,2,3 ………, n

i = 1,2,3……….,m

$X_j \geq 0$

وتستخدم الصيغة القانونية في بعض الحالات الخاصة لنماذج البرمجة الخطية. اذ يمكن تحويل الصيغة العامة الى الصيغة القانونية باستخدام القواعد التالية:

1 - يمكن تحويل التصغير (Minimized) لدالة الهدف الى تعظيم (Maximized) وبالعكس بضرب دالة الهدف بـ (-1)

2- يمكن تحويل قيد اكبر من او يساوي - الى اصغر من او يساوي - بضرب طرفي المتباينة بـ (-1).

-3- يمكن تحويل قيد المساواة الى قيدين الاول اصغر من او يساوي (≤) والثاني اكبر من او يساوي (≥) ثم تحويل الثاني باستخدام القاعدة (2) اعلاه.

4- يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة (Absolute Value) الى قيدين من نوع اصغر من او يساوي (≤)

3.4.2 الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية (Standard Form of Linear Programming Model):

ان الفرق بين الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يتمثل بما يلي:

1 - دالة الهدف (2) في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطي تكون اما من نوع (Max) او من نوع (Min) ، وكذلك تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية.

2- علامات القيود في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون (≥ ، = ، ≤)

بينما تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية يساوي (=) فقط بعد أضافة المتغيرات الوهمية (Slack Variables) غير سالبة ويرمز لها بالرمز(S_i = 0) وتكون بشكل (+S) عندما تكون اشارة المتباينة اصغر من او يساوي ≤ (-S) عندما تكون اشارة المتباينة أكبر من او يساوي ≥ ولا نضيف شي في حالة المساواة (=)

1- الطرف الايمن للقيود يكون غير سالب ($b_i \geq 0$) . وعلى ضوء ذلك تكون الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

Max

$$\mathbf{Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + ...+0S_m}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{1n}\,x_n + S_1 \leq \ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{2n}x_n + S_1 \leq \ b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}x_3 + \ .\ .\ .\ a_{3n}x_n + S_1 \leq \ b_3$$

. . .

. . .

. . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\ x_2 + a_m x + \ .\ .\ .\ a_{mn}x_n + S_m \leq \ b_m$$

$$x_1, x_2, x_3\ .\ \ .\ \ .\ \ x_n \ \geq \ 0$$

$$S_1, S_2, S_3.\ .\ \ .\ \ .\ S_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

Max $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\,X_j + 0S_i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + 0S_i = b_i$$

j = 1 ,2,3 ………, n

i = 1,2,3……….,m

$X_j \geq 0$ $\qquad$ $S_i \geq 0$

مثال / حول نموذج البرمجة الخطية الاتي الى

أ- الصيغة القانونية

ب-الصيغة القياسية

Min $\quad Z = 2X_1 + 4X_2$

S. t

$$3X_1 - X_2 \leq 8 \quad ......1$$

$$-5X_1 + 2X_2 \geq 3 \quad ......2$$

$$4X_1 - X_2 = 6 \quad ....3$$

$$|X_1 - X_2| \leq 10 \quad ....4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أ- الصيغة القانونية :

1- ان دالة الهدف يجب ان تكون من نوع (Maximized) عن طريق ضرب دالة الهدف بـ (1) لتصبح:

$-Z = -2X_1 - 4X_2$

2- القيود : يبقى القيد الأول على ما هو عليه لأن اشارته اصغر من او يساوي القيد الثاني يضرب بـ (-1) لأن اشارته اكبر من او يساوي، القيد الثالث يتحول الى قيدين احدهما

(6 ≤) والآخر (6 ≥) ثم نضربه بـ (-1) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي، القيد الرابع ايضا يتحول الى قيدين احدهما (10 ≤) والآخر (10 ≥) ثم نضربه

بـ (1-) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي. وبذلك يصبح لدينا ستة (6) قيود اي انموذج الصيغة القانونية يكون كما يلي:

$$-Z = -2X_1 - 4X_2$$

$$3X_1 + X_2 \leq 8 \quad ...1$$

$$5X_1 - 2X_2 \leq -3 \quad ....2$$

$$4X_1 - X_2 \leq 6 \quad ....3$$

$$-4X_1 - X_2 \leq -6 \quad ......4$$

$$X_1 - X_2 \leq 10 \quad ....5$$

$$-X_1 + X_2 \leq 10 \quad ....6$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ب الصيغة القياسية

1 - تكون دالة الهدف من نوع (Min) وكما موجودة في السؤال

2- القيود : نضيف الى القيد الاول ($+S_1$) لأن اشارته اصغر من او يساوي ونحول اشارة القيد الى (=) القيد الثاني نضيف له ($-S_2$) لأن اشارته اكبر من او يساوي ونحول اشارة القيد الى (=) القيد الثالث يبقى كما هو لأن اشارته (=) . القيد الرابع ايضا يتحول الى قيدين احدهما (≤ 10) ونضيف له ($+S_3$) والآخر

(10- $\geq$) ثم نضربه بـ (1-) لغرض تحويله الى اصغر من او يساوي ونضيف له ($+S_4$). وبذلك تصبح خمسة قيود في الصيغة القياسية وكما يلي :

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2$$

S. t

$$3X_1 - X_2 + S_1 = 8 \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

$$-5X_1 + 2X_2 + S_2 = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$4X_1 - X_2 = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$X_1 - X_2 + S_3 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

$$-X_1 + X_2 + S_4 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

5.2 فروض نموذج البرمجة الخطية : [13]

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي :

- يفترض النموذج إمكانية النسبة والتناسب في كل مكوناته دالة الهدف والقيود الفنية.
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية.
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي:

- **الخطية :** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية
- **المحدودية محدودية الموارد والأنشطة :** أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة
- **عدم السلبية :** وهذا عام وأساسي لجميع أنواع البرمجة الخطية
- **الاستقلالية :** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الانتاج

6.2 فوائد استخدام البرمجة الخطية : [14]

1. ترجمة المشاكل الواقعية في شكل رياضي مما يسمح بمعالجة عدد كبير من المتغيرات و التعبير عنها في شكل رياضي مبسط.
2. إمكانية استخدام أجهزة الكمبيوتر في حل الكثير من المسائل خاصة و أن هناك برامج جاهزة المعالجة هذا النوع من المسائل و التي يمكن اقتناؤها بسهولة من السوق و هذا ما يوفر لصانع القرار الدقة في التحليل بالإضافة إلى تقليص الجهد والوقت.
3. استبعاد الحلول الغير منطقية و التي تعتبر غير ممكنة من جهة و التركيز على الحلول الممكنة فقط و اختيار أحسنها.

7.2 محاسن و عيوب البرمجة الخطية: [14]

1.7.2 المزايا:

1. تخصص الموارد المحدودة نحو أفضل الإستخدامات.
2. تؤدي إلى تحسين نوعية القرارات التي تتخذها الإدارة.
3. تمكن من تحديد القيود التي تشكل عائقا أمام المؤسسة.
4. يمكن استخدام تحليل الحساسية التي تسمح باستخدام أسعار الظل في تحديد الفائدة التي يمكن جنيها من تخفيف بعض القيود أو اتخاذ بعض القرارات الاستثنائية.

2.7.2 العيوب:

1. يفترض أسلوب البرمجة الخطية حالة التأكد التام أي أن كل العوامل و العلاقات و المعطيات معروفة بشكل تام، أي أنه لا يأخذ حالة عدم التأكد التي تميز الوقت الحاضر بعين الإعتبار. لا يأخذ هذا الأسلوب في التحليل العوامل التي لا يمكن إعطاؤها قيمة معينة و التي قد تؤثر يشكل كبير على اتخاذ القرارات.

2. الفرضية الأساسية لهذا الأسلوب تتعلق بافتراض العلاقات الخطية أو المستقيمة فيما يتعلق بدالة الهدف والقيود، و قد لا يتماشى هذا مع الواقع في كثير من الأمور.
3. يتطلب هذا الأسلوب استخدام أجهزة الكمبيوتر لحل المسائل المعقدة التي قد يستحيل حلها يدويا. قابلية القسمة أو الكسرية: لا يوجد ضمان في الحصول على أرقام أو قيم صحيحة للمتغيرات باستخدام البرمجة. والمقصود بذلك أن حل مسألة البرمجة الخطية لن يعطي بالضرورة أعدادا صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم المتغيرات القرار و قد لا يصلح بالنسبة لبعض المنتجات سيارة مثلا). و لذلك إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالإعداد الصحيحة.

وعلى الرغم من هذه الانتقادات ، فإن أسلوب البرمجة الخطية يساعد كثيرا على اتخاذ القرارات الإدارية السليمة و يوفر الموارد الاقتصادية المتاحة و يضعها في أفضل استخدام لها على ضوء الهدف المنشود.

الفصل الثالث

طرق حل نماذج البرمجة الخطية

1.3المقدمة

تعد البرمجة الخطية من المواضيع الاكثر شيوعاً واستخداماً للوصول الى تحقيق الامثلية، ولإيجاد حل نماذج البرمجة الخطية تم استخدام عدد من الطرق منها الطريقة البيانية حيث تستعمل الطريقة البيانية كمدخل في البرمجة الخطية لحل المسائل البسيطة وطريقة السمبلكس تستخدم عند تعقد المسألة وطريقة البرمجة الثنائية ، سنتطرق في هذا الفصل شرحا مفصلا لكل طريقة من الطرق أعلاه.

2.3 حل نماذج البرمجة الخطية: [1]

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل مسائل البرمجة الخطية و يعتمد استخدام احد هذه الطرق دون غيرها على طبيعة و حجم المسألة موضوع البحث، أو رغبة الجهة صانعة القرار. و من أهم هذه الطرق ما يلي:

- **الطريقة الرسم البياني (Graphical Method).**
- **طريقة السمبلكس (Simplex Method.)**
- **طريقة البرمجة الثنائية (The Dual programing)**

3.3 طريقة الرسم البياني: [Graphical Method] : [14]

يعد استخدام الأدوات المناسبة أحد الركائز الأساسية لكل جانب من جوانب النشاط البشري. في النمذجة الرياضية، تم استخدام طريقة الرسم للأنظمة المعقدة ، مثل الدوائر والأسهم لتصوير الحالات والانتقالات في سلاسل ماركوف - لسنوات عديدة.

وقد أدت زيادة قوة الحوسبة إلى تحفيز هذا الاتجاه من خلال تقديم واجهات معالجة مباشرة تسمح للمستخدمين بالتجربة بمساعدة التمثيل الرسومي لنماذجهم. في مجال البرمجة الخطية، تصف gLPS (نظام البرمجة الخطية الرسومية) المشكلات الخطية الكلاسيكية من حيث الكائنات الرسومية (دوائر القيود، المربعات للمتغيرات، وما إلى ذلك) المرتبطة بشبكات وفقًا لقواعد محددة لتكوين نموذج.

تعريف طريقة الرسم البياني:

هي طريقة تفاعلية لحل مشاكل البرمجة الخطية تستند على تحديد منطقة الحل الأساسي الابتدائي المقبول (منطقة الحل المقبولة) ثم نحدد نقاط المتطرفة التي تجعل الأرباح اعلى ما يمكن اذا كانت دالة الهدف (max) وأقل ما يمكن اذا كانت دالة الهدف (min).

1.3.3 خطوات حل طريقة الرسم البياني (Step to Solve The Graphical Method):

يتم توضيح الخطوات من خلال المثال الآتي:

مثال / جد الحل الامثل للبرنامج الخطي التالي بطريقة الرسم البياني

MAX $Z=10X_1 + 40X_2$

$$X_1 + 2X_2 \leq 100$$

$$X_1 + 5X_2 \leq 150$$

Non negative $\mathbf{x_1 \ , x_2 \geq 0}$

أولا: نقوم بتحويل القيود من متباينات إلى معادلات اي تحويل المتباينه إلى حالة المساواة.

Straight 1 $x_1 + 2x_2 = 100$

Straight 2 $x_1 + 5x_2 = 150$

ثانيا: بعد تحويل القيود إلى معادلة نقوم بتحديد نقطتين لكل مستقيم

المستقيم الأول نجعل($X_1 = 0$) ومن ثم نجد قيمة ال X_2 وبعدها نجعل($X_2=0$) ومن ثم نجد قيمة إل X_1 وقد أصبح لدينا نقطتين ل المستقيم الأول

$$X_1 + X_2 = 100$$

$$X_1 = 0 \rightarrow \quad 0 + X_2 = 100$$

$$2X_2 = 100$$

$$X_2 = 50 \rightarrow (0,50)$$

$$X_1 + 2(0) = 100$$

$$X_1 = 100 \rightarrow (100,0)$$

المستقيم الثاني كما سبق في المستقيم الأول نجعل ($X_1 = 0$) ومن ثم نجد قيمة ال X_2

وبعدها نجعل($X_2=0$) ومن ثم نجد قيمة إل X_1 وقد أصبح لدينا نقطتين ل المستقيم الثاني

$$X_1 + 5X_2 = 150$$

$$X_1 = 0 \rightarrow 0 + 5X_2 = 150$$

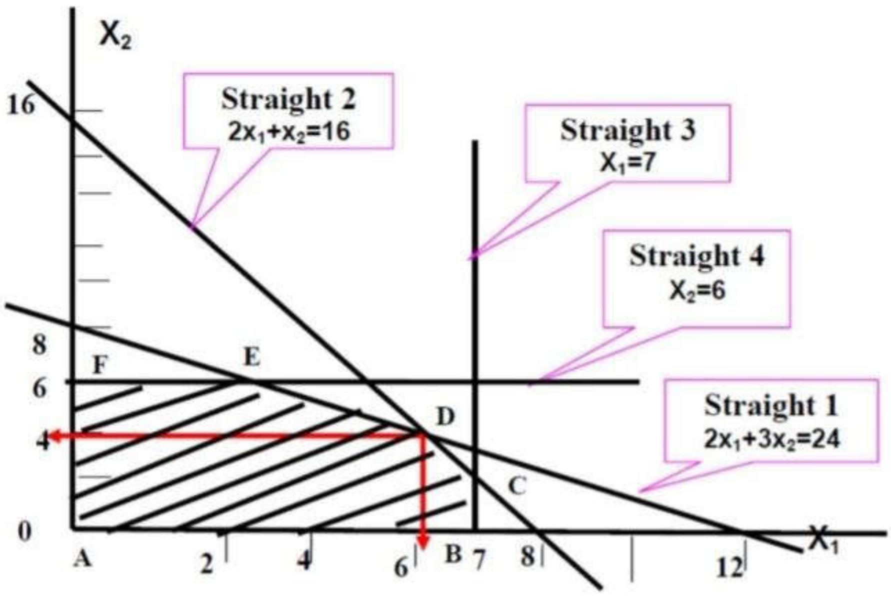
$$X_2 = 30 \rightarrow (0,30)$$

$$X_2 = 0$$

$$X_1 + 5(0) = 150$$

$$X_1 = 150 \rightarrow (150,0)$$

ثالثا: بعدما تم استخراج نقطتين لكل قيد نقوم برسم المستقيمات على الاحداثيات السيني والصادي ثم يتم تحديد منطقة الحل المقبول:



رابعا: تحديد منطقة الحل المقبولة نتيجة لنقاط انتصاف المستويات التي تحقق جميع القيود في وقت واحد:

المنطقة المظللة في الرسم (أعلاه) تمثل منطقة الحل المقبول المحددة بنقاط ABCD ولأستخراج نقطة (C) الناتجه من تقاطع المستقيم الأول والمستقيم الثاني ذلك من خلال حل المعادلتين آنيا:

$$X_1 + X_2 = 100$$

$$X_1 \pm 5X_2 = \pm 150 \pm$$

$$-3X_2 = -50$$

$$-X_2 = -16.6$$

$$X_2 = 16.6$$

نستخرج قيمة X_1 من خلال تعويض قيمة X_2 في المعادلة

$$X_1 + 2(16.6) = 100$$

$$X_1 + 33.2 = 100$$

$$X_1 = 66.6$$

منطقة الحلول الممكنة التي تكون مادون التقاطع إلى الداخل نقطة الأصل لو كانت دالة الهدف (min) تقليل التكاليف ستكون منطقة الحلول الممكنة من نقطة التقاطع فما فوق

خامساً : تحديد النقاط لدينا نقطتين لكل قيد ونقطة الاصل

النقاط	X_1	X_2	دالة الهدف $Z=10X_1+40X_2$
A(0.0)	0	0	Z=10(0)+40(0)=0
B(100.0)	100	0	Z=10(100)+40(0)=1000
C(66.7,16.7)	66.7	16.7	Z=10(66.7)+40(16.7)=1335
D(0,30)	0	30	Z=10(0)+40(30)=1200

حصلنا على أربع نقاط هنالك حل مقبول وهنالك حل أمثل ونحن نريد الوصول إلى الحل الأمثل

من خلال دالة الهدف هنا في مثالنا دالة الهدف من نوع (max) فأن النقطة ،C(66.7,16.7) تمثل الحل الأمثل

مثال /أوجد الحل الامثل بأستحدام طريقة الرسم البياني

$$\text{MIN} \quad Z= 5X_1 + 2X_2$$

$$2X_1 + 5X_2 \geq 10$$

$$4X_1 - X_2 \geq 12$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل /بنفس الخطوات المذكورة في المثال السابق

Straight 1 $2X_1 + 5X_2 = 100$

Straight 2 $4X_1 - X_2 = 12$

Straight 3 $X_1 + X_2 = 4$

Straight 1	
$2X_1+5X_2=10$	
X_1	X_2
0	2
5	0

Straight 2	
$4X_1-X_2=12$	
X_1	X_2
0	-12
3	0

Straight 3	
$X_1+X_2=4$	
X_1	X_2
0	4
0	4

$2X_1 + 5X_2 = 0$

$X_1 = 0 \rightarrow 2(0) + 5X_2 = 10X_1$

$5X_2 = 10 - X_2 = 12$

$X_2 = 2$

$X_2 = 0 \rightarrow 2X_1 + 5(0) = 10X_2 = 0$

$2X_1 = 10$

$X_1 = 3$

$4X_1 - X_2 = 12$

$0 \rightarrow 4(0) - X_2 = 12$

$X_2 = -12$

$\rightarrow X_2 = 0$

$4X_1 - 0 = 12$

$X_1 = 5$

$X_1 + X_2 = 4$

$\rightarrow X_1 = 0$

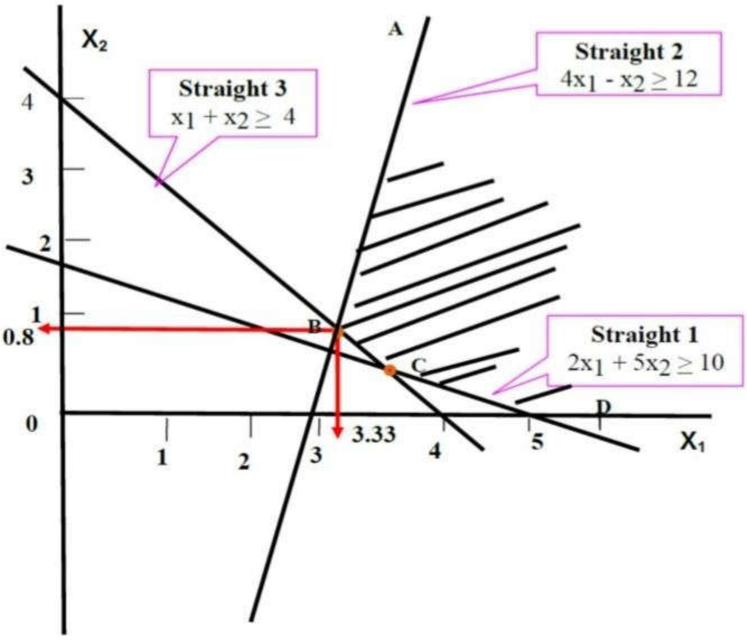
$0 + X_2 = 4$

$X_2 = 4$

$\rightarrow X_2 = 0$

$X_1 + 0 = 4$

$X_1 = 4$



لاستخراج نقطة B ناتجة من تقاطع مستقيم 2 مع مستقيم 3 نحصل على الاتي

$$4X_1 - X_2 = 12 \ldots\ldots 1$$

$$X_1 + X_2 = 4 \ldots\ldots 2$$

$$5X_1 = 16 \rightarrow X_1 = 3.2$$

بتعويض X_1 في 2 نحصل على

$$3.2 + X_2 = 4$$

$$X_2 = 0.8$$

نقطة C ناتجة من تقاطع مستقيم 1 مع مستقيم 3

$$2X_1 + 5X_2 = 10 \ldots\ldots 1$$

$$(X_1 + X_2 = 4) \times 2 \ldots\ldots .2$$

$$2X_1 + 5X_2 = 10 \ldots\ldots 1$$

$$\pm 2X_1 \pm 2X_2 = \pm 8 \ldots\ldots 3$$

$$3X_2 = 2$$

$$X_2 = 0.66$$

نعوض في رقم 2

$$X_1 + 0.66 = 4$$

$$X_1 = 3.33$$

النقاط	X_1	X_2	دالة الهدفMIN $Z=5X_1+2X_2$
B(3.2,0.8)	3.2	0.8	Z=5(3.2)+2(0.8)=17.6
C(3.33,0.66)	3.33	0.66	Z=5(3.33)+2(0.66)=18

هنا دالة الهدف (MIN) تقليل التكاليف فأن النقطة B(3.2,0.8) تمثل الحل الامثل

4.3 طريقة السمبلكس: [Simplex Method] : [15]

تعد مشكلة البرمجة الخطية نموذج التحسين الأكثر استخدامًا على نطاق واسع. تأثيرها على النمذجة الاقتصادية والحكومية هائل. لقد كانت طريقة Simplex لحل مشكلة البرمجة الخطية (LP)، التي يرجع تاريخها إلى جورج دانتزيج، أداة حسابية فعالة للغاية منذ ما يقرب من أربعة عقود. وقد كانت هذه الطريقة موضوع تحقيقات مكثفة لسنوات عديدة.

تعريف طريقة السمبلكس:

هي طريقة عامة من أشهر وأسهل الطرق التي من الممكن أستخدامها في حل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات بعكس طريقة الرسم البياني التي تقوم بحل نماذج البرمجة الخطية ذات متغيرين فقط ولكنها تعتبر طريقة خاصة لحل مسائل ذات قيود الأقل أو يساوي فقط وعندما تكون عناصر الطرف الأيمن موجبة.

1.4.3 خطوات الحل بطريقة السمبلكس (Step To Solve The Simplex Method):

يتم توضيح الخطوات من خلال المثال الآتي:

مثال/ أوجد الحل لمسألة البرمجة الخطية بأستخدام طريقة السمبلكس

Max $Z = X_1 + 9X_2 + X_3$

Subject to $X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 9$

$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 15$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

اولاً: يتم تحويل القيود إلى المساواة بإضافة المتغير الوهمي (Si) لكل قيد اي تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

Max $Z - X_1 - 9X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$

Subject $X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_1 = 0$

$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \quad + S_2 = 0$

$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 \geq 0$

ثانيا: نقوم بتحويل قيم النموذج إلى جدول الحل الأساسي الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية بالإضافة إلى معاملات المتغيرات في دالة الهدف

❖ القيم التي تقابل المتغير (S_1) في الجدول هي معاملات القيد الأول.

❖ القيم التي تقابل المتغير (S_2) في الجدول هي معاملات القيد الثاني.
❖ القيم التي تقابل المتغير (S_3) في الجدول هي معاملات القيد الثالث.

basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	b_i
z_j	-1	-9	-1	0	0	0
S_2	1	2	3	1	0	9
S_2	3	2	2	0	1	15

ثالثا: من الجدول أعلاه، نقوم باختيار (المتغير الداخل) وهو المتغير الذي يقابل أكبر قيمة بأشارة سالبة في صف Zj ومن خلال الجدول نلاحظ المتغير X_2 هو المتغير الداخل.

رابعا: نقوم باختيار (المتغير الخارج) وهو المتغير الذي يمثل أقل قيمة موجبة bi بعد قسمته على عناصر المتغير الداخل X2 وكما يلي:

$(S_1 = 9/5 = 4.5)$, $(S_2 = 15/2 = 7.5)$

من خلال حاصل القسمة نلاحظ ان المتغير S_1 هو المتغير الخارج لانه أقل قيمة موجبة يساوي 4.5

خامسا: بقسمة صف S_2 على 2 بقيمة العنصر المحوري ومن بعدها جعل القيم التي هي فوق وتحت العنصر المحوري أصفار من خلال ضرب صف العنصر المحوري ب 9 ونقوم بجمع صف العنصر المحوري مع الصف الأول وبعدها أصبح العنصر الذي يعلو العنصر المحوري صفر وبعدها نقوم بضرب صف العنصر المحوري ب 2- ونقوم بجمع صف العنصر المحوري مع الصف الثالث وبهذا أصبح العنصر يساوي صفرا

basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	b_i
Z_j	3.5	0	11.5	4.5	0	40.5
X_2	½	1	3/2	½	0	4.5
S_2	2	-1	-1	-1	1	6

ولأن دالة الهدف جميع قيمها موجبة وصفر فقد وصلنا الى الحل الامثل

$X_2 = 4.5$ $\quad\quad$ $S_2 = 6$ $\quad\quad$ $S_1 = X_3 = X_1 = 0$

دالة الهدف = الربح الامثل :

$$Z = X_1 + 9X_2 + X_3$$

$$Z = 0 + 9\left(\frac{9}{2}\right) + 1(0)$$

$$Z = 40.5$$

مثال / أوجد الحل الامثل لمسألة البرمجة الخطية بأستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{MAX} \quad Z = 7X_1 + 10X_2$$

$$3X_1 + 5X_2 \le 1800$$

$$2X_1 + 7X_2 \le 2300$$

$$X_1 + 5X_2 \le 400$$

$$5X_2 = 300$$

$$X_1 ,\ X_2 \ge 0$$

2.4.3أستخدام طريقة السمبلكس (Use The Simplex Method):

1- في حالة تعدد الحلول (وجود أكثر من حل):

تساعدنا طريقة السمبلكس البسيطة في تحديد الحلول المتعددة لمشكلة البرمجة الخطية بتوضيح في المثال الآتي:

$$\text{Max} \quad Z = 2000X_1 + 3000X_2$$

Subject to

$$6X_1 + 9X_2 \le 100$$

$$2X_1 + X_2 \le 20$$

$$X_1 \ ,X_2 \ \geq \ 0$$

الحل /

Max $\qquad Z - 2000X_1 + 3000X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$

Subject to

$$6X_1 + 9X_2 + S_1 = 100$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 20$$

$$X_1 \ \ X_2 \ ,S_1 \ , \ S_2 \ \geq \ 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	-2000	-3000	0	0	0
S_1	6	9	1	0	100
S_2	2	1	0	1	20

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	-2000	-3000	0	0	0
X_2	2/3	1	1/9	0	100/9
S_2	2	1	0	1	20

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	0	0	3000/9	0	300000/9
X_2	2/3	1	1/9	0	100/9
S_2	4/3	0	-1/9	1	80/9

$X_2 = 100/9 \quad S_2 = 80/9 \qquad X_1 = S_1 = 0$

Max $\quad Z = 2000X_1 + 3000X_2$

$= 0 + 300000/9$

$= 33333333.333$

وبما أن قيمة المتغير X_1 هي أيضاً صفر، فهذا يدل على وجود أكثر من أحد الحلول الأمثل للمشكلة.

من أجل حساب قيمة الحل الأمثل البديل علينا أن نقدمه X_1 كمتغير أساسي يحل محل S_2

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	0	0	3000/9	0	300000/9
X_2	2/3	1	1/9	0	100/9
S_2	4/3	0	-1/9	1	80/9

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	0	0	3000/9	0	300000/9
X_2	2/3	1	1/9	0	100/9
X_1	1	0	-1/12	3/4	20/3

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	0	0	100/3	3000	100000/3
X_2	0	1	1/6	-1/2	20/3
X_1	1	0	-1/12	3/4	20/3

$X_1 = 20/3$ $X_2 = 20/3$ $S_1 = S_2 = 0$

MAX $Z = 2000X_1 + 3000X_2 = 333333.333333$

هذه المسئلة (المشكلة) تحتوي على حلول متعددة

2- في حالة الحل الغير محدد (عدم محدودية الحل)

من خلال طريقة السمبلكس البسيطة نستطيع تحديد هوية الحل الغير محدد كما هو موضح في المثال التالي:

$$\text{Max} \quad Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$X_1 - X_2 \leq 8$$

$$X_1 \leq 7$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل /

$$\text{Max} \quad Z - 5X_1 - 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$X_1 + S_1 = 7$$

$$X_1 - X_2 + S_2 = 8$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	-5	-4	0	0	0
S_1	1	0	1	0	7
S_2	1	-1	0	1	8

	X_1	X_2	S_1	S_2	b
Zj	0	-4	5	0	35
S_1	1	0	1	0	7
S_2	0	-1	-1	1	1

نظرًا لأنه لا يزال لدينا قيمة عنصر سالبة للدالة الموضوعية، وبما أن العناصر الأخرى (في نفس العمود) هي قيمة سالبة فقط أو صفر، لذلك لا يمكننا تقسيم عنصر b على عناصر العمود X_2 وبالتالي، لا يمكن الاستمرار في الطريقة البسيطة لحساب القيمة، ولا يمكننا تحديد المتغير الذي لن يكون أساسيًا في التكرار التالي، لذلك، المشكلة ليس لها حل نهائي، هذا هو معيار الحل غير المحدود.

5.3البرمجة الثنائية (The Dual programing)

1-النموذج الثنائي Dual model:

وهو ما يطلق عليه في بعض المصادر بالمشكلة الثنائية (المقابلة أو البديلة) حيث أن لكل نموذج برمجة خطية هنالك نموذج وحيد مقابل لها يسمى (ثنائي بديل) أو (النموذج المقابل) حيث يتضمن النموذج المقابل نفس بيانات النموذج الأولي (الاصلي) . اي ان النموذج الأصلي له يسمى بالنموذج الأولي (primal model) والنموذج المقابل له يسمى بالنموذج الثنائي (Dual) .

لهذه الظاهرة معاني اقتصادية مهمة فعلى سبيل المثال لو كانت المشكلة التي تريد حلها تتعلق بمعالجة مشكلة اقتصادية تتضمن تعظيم الربح لدالة الهدف فأن المشكلة الثنائية في مثل هذه الحالة ستكون متضمنة تقليل مجموع التكاليف، بمعنى آخر ان الثنائية (dual) يستعان بها لتقديم تحليلات ومؤشرات مختلفة في حالة عدم امكانية الحصول عليها من النموذج الأولي (الأصلي).

2-اهمية تحويل النموذج الأولى الى نموذج ثنائي:

1- الحصول على نموذج يحتوي على عدد اقل من القيود وبالتالي تقليص العمل الحسابي .

2 -التخلص من الاشارة السالبة في الجانب الايمن (ان وجدت) .الفرض التعرف على ابعاد المشكلة فاذا كان النموذج الأولي بصيغة (Max) فيمكننا التعرف على الجانب الربحي من المشكلة ، وعند التحويل الى النموذج الثنائي فتكون دالة بصيغة (Min) فيمكننا التعرف على الجانب الكلفوي من المشكلة .

3-خطوات تحويل النموذج الأولي إلى نموذج ثنائي:

1. أذا كانت دالة الهدف في المشكلة الأولية (max) تتحول الى (min) في المشكلة الثنائية والعكس صحيح .
2. عناصر الطرف الأيمن من القيود في المشكلة الأولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية .
3. معاملات دالة الهدف في المشكلة الأولية تصبح عناصر الطرف الايمن في المشكلة الثنائية .

4. اذا كانت المتباينة في القيود للمشكلة الأولية اقل من أو تساوي (≤)تصبح الكبير من أو تساوي (≥) في المشكلة الثانية والعكس صحيح .

5. الاعمدة في المشكلة الأولية تصبح صفوفا في المشكلة الثانية .

6. اذا كانت دالة الهدف (max) فان القيود يجب أن تكون بالشكل (≤) واذا كانت دالة الهدف (min) يجب ان تكون القيود بالشكل (≥) .

7. ان كل قيد في حالة مساواة في المشكلة الأولية يقابله متغير غير مقيد بإشارة في المشكلة الثانية والعكس صحيح .

مثال/ حول نموذج البرمجة الخطية التالي الى النموذج الثنائي :

$$\text{MIN} \quad Z = 10X_1 + 16X_2$$

$$6X_2 - 4X_2 \geq 30 \qquad y_1$$

$$4X_2 + 2X_2 \geq 20 \qquad y_2$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل /

$$\text{MAX} \qquad Z = 30y_1 + 20y_2$$

$$6y_1 + 4y_2 \leq 10$$

$$-4y_1 + 2y_2 \leq 16$$

$$y_1, \; y_2 \geq 0$$

مثال / حول نموذج البرمجة الخطية التالية الى النموذج التالي

$$\text{Min} \quad Z=3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 430 \qquad y_1$$

$$3X_1 + 2X_3 \geq 460 \qquad y_2$$

$$X_1 + 4X_2 \geq 420 \qquad y_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل / نقوم بتحويل النموذج حسب الخطوات المذكورة سابقآ خطوة خطوة

$$\text{Max} \quad Z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$

$$y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 3$$

$$y_1 + 4y_3 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

References المصادر

المصادر العربية

[1] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " المدخل لبحوث العمليات ، " دار وائل للنشر، الأردن ، ٢٠٠١ ص ٢١.

[2] حامد سعد نور الشمرتي: " بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا ، " مكتبة الذاكرة، بغداد ٢٠١٠، ص ١٠.

[10] محمد راتول : " بحوث العمليات " ، ديوان المطبوعات الجامعية، ط 2 الجزائر، 2006.

[12] كتاب (مقدمة في نماذج البرمجة الخطية بين النظرية والتطبيق 2013).

[13] مكيد علي: " بحوث العمليات وتطبيقاتها القتصادية دروس ومسائل محلولة، الجزء الأول،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، .2015 ص 10.

[14] مكتبة الوصال ، جامعة باتنة ١ كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير ٢٠١٥ - ٢٠١٦ ، الجزائر. الفصل الأول مفاهيم حول البرمجة الخطية.

المصادر الانكليزية

[3] Gerard Sierksma; Yori Zwols (2015). Linear and Integer

Optimization: Theory and Practice (3rd ed.). CRC Press. p. 1. ISBN 978-1498710169.

[4] Linear programming | Definition & Facts | Britannica". www.britannica.com. Retrieved2023-11-20 .

[5] George B. Dantzig (April 1982). "Reminiscences about the origins of linear programming" (PDF). Operations Research Letters. 1 (2): 43–48.

[6] Alexander Schrijver (1998). Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & Sons. pp. 221–222. ISBN 978-0-471-

98232-6 .

[7] Dantzig, George B.; Thapa, Mukund Narain (1997). Linear programming. New York: Springer. p. xxvii. ISBN 0387948333. OCLC

35318475

[8] Leonid Khachiyan (1979). "A Polynomial Algorithm for Linear Programming Doklady Akademii Nauk SSSR. 224 (5): 1093–1096 .

[9] Narendra Karmarkar (1984). "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming". Combinatorica. 4 (4): 373–395.

doi:10.1007/BF02579150. S2CID 725786

[11] Dianne Dotson (21/8/2018), "/five-application-linear-programming-

techniques", Sciencing, Retrieved 27/9/2021

[15]Collaud, J., and Pasquier-Bultoc, J. (1994). gLPS: A graphical tool for defining and processing linear problems. European Journal of Operational Research, 72(2), 277-286

[16] Shamir, R. (1987). Efficiency of the simple method: scanning .Management Science, 33 (3), 301-334 .