جمهورية العراق

جامعة بابل - كلية العلوم

قسم الفيزياء

مشروع بحث تخرج

حل بعض المسائل الفيزيائية باستعمال تحويلات لابلاس

للطالب

منتظر باسم علي ابراهيم

بكالوريوس علوم فيزياء

العام الدراسي 2023-2024

بأشراف

م.د.فؤاد حمزة عبد ناصر الشريفي

1445 هـ 2024م

Republic of Iraq

Ministry of Higher Education and Scientific Research

University of Babylon

Faculty of Science

Project of Research

Solving Some physical equation using Laplace Transforms

By student

Montather Bassem Ali

B.Sc. Physis

Scholar year 2023-2024

Supervised by

Ass.D. Fouad Hamza Abd Nasser

1445 H 2024 M

اقرار المشرف

اشهد بان موضوع البحث الموسوم (حل بعض المسائل الفيزيائية باستعمال تحويلات لابلاس) والمنجز من قبل الطالب (منتظر باسم علي) قد اجري تحت اشراف في قسم الفيزياء كلية العلوم جامعة بابل كمتطلب جزئي لنيل شهادة البكالوريوس في علوم الفيزياء وذلك للفترة من (1/10/2023) ولغاية (1/4/2024).

التوقيع:

الاسم الثلاثي المشرف : فؤاد حمزة عبد ناصر

اللقب العلمي: مدرس

التاريخ:

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

{ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ }

صَدَقَ ٱللَّهُ ٱلْعَظِيمَ

الإهداء

إلى صاحب السيرة العطرة، والفكر المُستنير؛ فلقد كان له الفضل الأوَّل في بلوغي التعليم العالي (والدي الحبيب)، أطال الله في عُمره. إلى من وضعتني على طريق الحياة، وجعلتني رابط الجأش، وراعتني حتى صرت كبيرًا (أمي الغالية)، طيَّب الله مثواها. إلى إخوتي من كان لهم بالغ الأثر في كثير من العقبات والصعاب. إلى جميع أساتذتي الكرام؛ ممن لم يتوانوا في مد يد العون لي أُهدي إليكم البحث.

الشكر والتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمَّد وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

اما بعد نتوجه بجزيل الشكر والامتنان لمشرفنا الفاضل (الأستاذ فؤاد حمزة عبد ناصر الشريفي) ممتنين له على كل ما قدمه لنا من ملاحظات قيمة لكي يصل البحث الى ما ولصنا اليه جزاه الله خير الجزاء وكذلك الشكر لجميع اساتذتي في قسم الفيزياء ونسأل الله ان يحفظهم ويرعاهم جميعا.

جدول المحتويات

ت	المحتويات	الصفحة
1	الخلاصة	1
2	الفصل الأول : تحويلات لابلاس	2
3	1-1-1 تعريف:	2
4	1-1-2 تعريف داله كاما:	3
5	1-1-3 الخاصية الخطية:	3
6	1-2 تحويلات لابلاس لبعض الدوال :	3
7	1-2 امثلة: نجد تحويلات لابلاس للدوال التالية:	4
8	1-3 تحويلات لابلاس العكسية :	5
9	1-3 امثلة:	7-5
10	الفصل الثاني : حل المعادلات التفاضلية باستعمال تحويلات لابلاس	8
11	2-1-1 تحويلات لابلاس للمشتقات:	8
12	2-2-1 حل المعادلات التفاضلية باستعمال تحويلات لابلاس :	8
13	امثله (2-1):	11-8
14	الفصل الثالث : تطبيقات فيزيائية على تحويلات لابلاس	12
15	3-1 مسائل درجة الحرارة :	12
16	3-2 مسائل الجسم الساقط :	12
17	3-3 مسائل الدوائر الكهربائية :	13
18	امثلة (3):	18-13
20	المصادر	19

الخلاصة

الهدف من هذا البحث هو ايجاد حل المعادلات التفاضلية وبضع التطبيقات للمسائل الفيزيائية باستخدام تحويلات لابلاس ، حيث تم تطبيق تحويلات لابلاس على عدد من المسائل الفيزيائية مثل (مسائل درجة الحرارة ومسائل الجسم الساقط ومسائل الدوائر الكهربائية) و تم ايجاد الحلول لهذه المسائل باستخدام قوانين تحويلات لابلاس للمشتقات وجدول تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

كلمات مفتاحية: تحويلات لابلاس ،المعادلات التفاضلية ، مسائل درجة الحرارة ، مسائل الجسم الساقط ، مسائل الدوائر الكهربائية.

الفصل الاول

تحويلات لابلاس Laplace Transformation

وهي عملية تجري على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال الى مجال آخر ويستخدم تحويل لابلاس في عدة مجالات ومن هذه المجالات هو حل المعادلات التفاضلية حيث يقوم بتحويلها الى معادلات جبرية لتسهيل عملية ايجاد حلولها.

1-1-1تعريف:

لتكن $f(x)$ أي دالة و $s > 0$ فان تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ ونرمز له بالرمز $\{\ f(x)\ \}$ يعرف بالتكامل:

$$L\{\ f(x)\ \} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \qquad (1-1)$$

فمثلا لايجاد تحويل لابلاس للدالة $f(x) = e^{2x}$، باستعمال التعريف في معادلة (1-1) نحصل على:

$$L\{e^{2x}\} = \int_0^\infty e^{2x}\, e^{-sx}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-2)x}\, dx$$

$$= \frac{-1}{s-2} e^{-(s-2)x}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{s-2}(0-1) = \frac{1}{s-2}$$

2-1-1 تعريف داله كاما:

هي امتداد لدالة المضروب في الاعداد الحقيقية والمركبة وتعرف كما في التكامل:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}\, e^{-u} du$$

3-1-1 الخاصية الخطية:

ليكن لدينا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ و ليكن كل من α و β ثوابت فان

$$L\{\ \alpha f(x) \mp \beta g(x)\ \} = \alpha L\{\ f(x)\ \} \mp \beta L\{\ g(x)\ \} \qquad (1-2)$$

2-1 تحويلات لابلاس لبعض الدوال:

تحويلات لابلاس لبعض الدوال سنذكرها بدون برهان في الجدول ادناه:

No.	$f(x)$	$\bar{f}(s) = L\{\ f(x)\ \}$
1.	a	$\frac{a}{s}$
2.	x^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
3.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
4.	$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5.	$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6.	$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}\ ;\ \|a\| < s$
7.	$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}\ ;\ \|a\| < s$

2-1 امثلة: نجد تحويلات لابلاس للدوال التالية:

مثال(1-2-1) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} + \frac{1}{2}x^2$

مثال (2-2-1) $f(x) = 2\sin 3x + 3e^{2x}$

مثال (3-2-1) $f(x) = \sinh 2x - \cos 5x$

الحل :

$$L\left\{\sqrt{\frac{x}{\pi}} + \frac{1}{2}x^2\right\}$$

$$= L\left\{\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right\} + L\left\{\frac{1}{2}x^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left\{x^{\frac{1}{2}}\right\} + \frac{1}{2}L\{x^2\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} + \frac{\Gamma(2+1)}{2s^{2+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, s^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma(3)}{2s^3}$$

$$= \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} + \frac{2!}{2s^3}$$

$$= \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s^3}$$

$$= \frac{s^{\frac{3}{2}} + 2}{2s^3}$$

$$L\{2\sin 3x + 3e^{2x}\}$$

$$= L\{2\sin 3x\} + L\{3e^{2x}\}$$

$$= 2L\{\sin 3x\} + 3L\{e^{2x}\}$$

$$= \frac{6}{s^2+9} + \frac{3}{s-3}$$

$$L\{\sinh 2x - \cos 5x\} = L\{\sinh 2x\} - L\{\cos 5x\}$$

$$= \frac{2}{s^2-4} - \frac{s}{s^2+25}$$

3-1 تحويلات لابلاس العكسية:

إن أسهل طريقة لعكس تحويل لابلاس هو تحويل الإقتران المراد عكسه إلى مجموع من الإقترانات والتي هي عبارة عن مجموعة من تحويلات لابلاس المحسوبة مسبقاً، وباستعمال خاصية الخطية لتحويلات لابلاس، يمكننا عكس الإقتران بشكل مباشر وسيكون الناتج من ذلك هو عدة إقترانات.

اذا كان لدينا تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ $L\{\ f(x)\ \} = F(s)$، وبفرض ان المؤثر L^{-1} هو معكوس تحويل لابلاس للدالة $F(s)$ سيكون

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$$

3-1 امثلة:

نجد الدالة $f(x)$ لكل مما يلي :

مثال (1-3-1) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s-3}\right\}$

مثال (1-3-2) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+13s^2+36}\right\}$

مثال (1-3-3) $L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3+2s}\right\}$

الحل :

1. $\boldsymbol{\frac{1}{s^2-2s-3}}$

$$= \frac{1}{(s-3)(s+1)}$$

باستعمال تجزئة الكسور

$$\frac{1}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$$s = 3 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

$$s = -1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{1}{s^2 - 2s - 3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s - 3}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right)$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$$

2. $\boldsymbol{\dfrac{s}{s^4 + 13s^2 + 36}}$

$$\frac{s}{s^4 + 13s^2 + 36} = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$= \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}$$

$$= \frac{(As + B)(s^2 + 9) + (Cs + D)(s^2 + 4)}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

بفتح الاقواس واستخدهم البديهية (اذا تساوت المقامات تتساوى البسوط) نحصل على

$$\underline{s} = \underbrace{As^3} + \underline{9As} + \underline{\underline{Bs^2}} + 9B + \underbrace{Cs^3} + \underline{4Cs} + \underline{\underline{Ds^2}} + 4D$$

الحد الثابت في الطرف الايمن يساوي الحد الثابت في الطرف الايمن نحصل على:

$$A + C = 0$$

معامل s في اليمين يساوي معامل s في اليسار

$$9A + 4C = 1$$

معامل s^2 في اليمين يساوي معامل s^2 في اليسار

$$B + D = 0$$

معامل s^3 في اليمين يساوي معامل s^3 في اليسار

$$9B + 4D = 0$$

بحل المعادلات الاربع اعلاه نجد :

$A=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{5}$ و $B=D=0$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+13s^2+36}\right\}=\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+9}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left(L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}\right)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{5}(\cos 2x-\cos 3x)$$

\

3. $\boldsymbol{\frac{2}{s^3+2s}}$

$$\frac{2}{s^3+2s}=\frac{2}{s(s^2+2)}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+2}$$

$$=\frac{As^2+2A+Bs^2+Cs}{s(s^2+2)}$$

وكما في المثال السابق نجد $C=0$ ، $B=-1$ و $A=1$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3+2s}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}$$

$$\therefore \quad f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,x$$

الفصل الثاني

حل المعادلات التفاضلية باستعمال تحويلات لابلاس

2-1-1 تحويلات لابلاس للمشتقات:

لتكن الدالة $y = y(x)$ قابلة للاشتقاق فاننا سنقبل المبرهنتان التاليتان بدون برهان:

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = sL\{y(x)\} - y(0) \qquad (1-2)$$

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = s^2L\{y(x)\} - sy(0) - y'(0) \qquad (2-2)$$

2-1-2 حل المعادلات التفاضلية باستعمال تحويلات لابلاس:

من الممكن استعمال تحويلات لابلاس ومعكوسها لحل المعادلات التفاضلية والامثلة التالية توضح ذلك

امثله (2-1):

مثال(2-1-1):

لايجاد حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى $y' + 2y = \cos x$ وبالشرط الابتدائي $y(0) = 1$.

بأخذ مؤثر تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية ينتج

$$L\{y'\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

ومن جدول تحويل لابلاس والمعادلة (2 – 1) نحصل على

$$sL\{y(x)\} - y(0) + 2L\{y(x)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s+2)L\{y(x)\} - 1 = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s+2)L\{y(x)\} = \frac{s}{s^2+1} + 1$$

$$(s+2)L\{y(x)\} = \frac{s+s^2+1}{s^2+1}$$

$$L\{y(x)\} = \frac{s^2+s+1}{(s+2)(s^2+1)}$$

الآن نستعمل تجزئة الكسور

$$\frac{s^2+s+1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}$$

$$= \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+2)}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$s^2+s+1 = As^2+A+Bs^2+2Bs+Cs+2C$$

وحيث ان معاملات قوى s في الطرفين متساوية على الترتيب نحصل على المعادلات التالية

$$A+B=1$$

$$2B+C=1$$

$$A+2C=1$$

هنا يمكن ايجاد قيمة A فقط باستعمال طريقة الغطاء وكما يلي :

$$s=-2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{(-2)^2+(-2)+1}{(-2)^2+1} = \frac{3}{5}$$

وبتعويض قيمة A في المعادلات اعلاه ومن ثم نحصل على

$$\therefore \quad B = \frac{2}{5} \qquad \text{و} \qquad C = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \ \frac{s^2+s+1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{3}{5(s+2)} + \frac{2s+1}{5(s^2+1)}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{y(x)\} = \frac{3}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$y(x) = \frac{3}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

ومن جدول تحويل لابلاس يكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

مثال (2-1-2) :

لنجد حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' + y = x$ باستعمال تحويلات لابلاس بالشروط الابتدائية

$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$.

بأخذ مؤثر تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية $L\{y''\} + L\{y\} = L\{x\}$

$$s^2 L\{y(x)\} - sy(0) - y'(0) + L\{y(x)\} = \frac{1}{s^2}$$

بتعويض الشروط الابتدائية نحصل على :

$$(s^2 + 1)L\{y(x)\} - s - 2 = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + 1)L\{y(x)\} = \frac{1}{s^2} + s + 2 = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2}$$

$$L\{y(x)\} = \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)}$$

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{As(s^2 + 1) + B(s^2 + 1) + (Cs + D)s^2}{s^2(s^2 + 1)}$$

$$s^3 + 2s^2 + 1 = As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2$$

$$A + C = 1 \quad , \qquad B + D = 2$$

$A = 0$ و $B = 1$ و $C = 1$ و $D = 1$

$$L\{y(x)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

فيكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$y(x) = x + \cos x + \sin x$$

مثال (3-1-2):

لايجاد حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}$ باستعمال تحويلات لابلاس بالشروط الابتدائية $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$.

نأخذ مؤثر تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

$$s^2L\{y(x)\} - sy(0) - y'(0) - 3sL\{y(x)\} + 3y(0) + 2L\{y\} = \frac{4}{s-2}$$

بتعويض الشروط الابتدائية نحصل على :

$$s^2L\{y(x)\} + 3s - 5 - 3sL\{y(x)\} - 9 + 2L\{y(x)\} = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)L\{y(x)\} = \frac{4}{s-2} + 14 - 3s$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{s-2}$$

$$L\{y(x)\} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)(s^2 - 3s + 2)}$$

$$= \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s-2)^2(s-1)}$$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$= \frac{A(s-2) + B + C(s-2)^2}{(s-2)^2(s-1)}$$

$$-3s^2 + 20s - 24 = As - 2A + B + Cs^2 - 4Cs + 4C$$

$$C = -3 \quad , \qquad A - 4C = 20 \quad \rightarrow \qquad A = 8 \quad ,$$

$$-2A + B + 4C = -24 \quad \rightarrow \quad B = 20$$

$$L\{y(x)\} = \frac{8}{s-2} + \frac{20}{(s-2)^2} - \frac{3}{s-1}$$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{8}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{20}{(s-2)^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\}$$

فيكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو: $y(x) = 8e^{2x} + 20xe^{2x} - 3e^{x}$

الفصل الثالث

تطبيقات فيزيائية على تحويلات لابلاس

1-3 مسائل درجة الحرارة :

ينص قانون نيوتن للتبريد على ان (معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب طردياً مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به) فاذا كانت T هي درجة حرارة الجسم و T_s هي درجة حرارة الوسط المحيط فان معدل التغير الزمني لدرجة حرارة الجسم

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s) \qquad (1-1-3)$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s \qquad (2-1-3)$$

2-3 مسائل الجسم الساقط :

لنعتبر ان جسماً كتلته M ساقطاً من اعلى متأثراً فقط بالجاذبية الارضية g ومقاومة الهواء التي تتناسب طردياً مع سرعة الجسم ، نفرض ان كل من الجاذبية الارضية والكتلة ثابتان وباستعمال قانون نيوتن الثاني للحركة والذي ينص على ان (محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة مضروباً بالكتلة الثابتة) أي ان

$$F = M\frac{dv}{dt} \qquad (1-2-3)$$

حيث F هي محصلة القوى المؤثرة على الجسم و v هي سرعة الجسم ، كلاهما عند الزمن t

هنا لدينا قوتان تؤثران على الجسم هما الاولى وزن الجسم $W = M\mathrm{g}$

والثانية هي قوة مقاومة الهواء $-kv$ حيث $0 \le k$ هو ثابت التناسب والاشارة السالبة هنا لان اتجاه القوة عكس اتجاه السرعة .

وبالتالي فان محصلة القوى هي

$$F = M\mathrm{g} - kv \qquad (2-2-3)$$

من المعادلتين $(3-2-1)$ و $(3-2-2)$ نحصل على :

$$M\frac{dv}{dt} = M\mathrm{g} - kv \qquad (3-2-3)$$

ومنها نحصل على :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v = \mathrm{g} \qquad (4-2-3)$$

3-3 مسائل الدوائر الكهربائية :

تتكون الدائرة الكهربائية البسيطة من مقاومة R بالاوم ومكثف C بالفاراد وحث L بالهنري وقوة دافعة كهربائية (ق.د.ك) E بالفولت وبطارية أو مولد متصلة جميعها على التوالي . يُقاس التيار i بالامبير والشحنة q على المكثف بالكولوم .

وينص قانون كيرشوف على ان (المجموع الجبري للجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوي صفر) .

ان فرق الجهد خلال مقاومة هو Ri و خلال المكثف هو $(1/C)q$ وخلال الحث هو $L\dfrac{di}{dt}$

يكون فرق الجهد خلال (ق .د .ك) هو $E(t)$ وبالتالي فانه من قانون كيرشوف يكون لدينا

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (1-3-3)$$

امثلة :

مثال (3-1) :

وضعت قطعة معدنية درجة حرارتها $100°\mathrm{F}$ في مختبر درجة حرارته ثابتة عند $0°\mathrm{F}$ ، بعد $20\ min$ اصبحت درجة حرارة القطعة $50°\mathrm{F}$ جد :

(1) الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القطعة الى $25°\mathrm{F}$.

(2) درجة حرارة القطعة بعد $10\ min$.

الحل :

باستخدام معادلة (3 - 1 - 2)

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0\ ;\ \ T(0) = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة اعلاه بالشرط الابتدائي $T(0) = 100$

$$L\{T'\} + kL\{T\} = 0$$

وحسب المعادلة رقم (2-1)

$$sL\{T\} - T(0) + kL\{T\} = 0$$

$$sL\{T\} - 100 + kL\{T\} = 0$$

$$(s+k)L\{T\} = 100$$

$$L\{T\} = \frac{100}{s+k}$$

ومن جدول تحويلات لابلاس للدوال يصبح حل المعادلة التفاضلية في الصورة

$$T = 100e^{-kt}$$

لإيجاد قيمة الثابت k نعوض الشرط الابتدائي $T = 50°\mathrm{F}$ عند $t = 20min$

$$50 = 100e^{-20k}$$

$$e^{-20k} = 0.5$$

$$-20k = \ln(0.5)$$

$$k = 0.0347$$

وبهذا تصبح العلاقة بين درجة حرارة القطعة المعدنية والزمن

$$T = 100e^{-0.0347t}$$

الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القطعة الى $25°\mathrm{F}$.

$$25 = 100e^{-0.0347t}$$

$$= \quad e^{-0.0347t}$$

$$= 0.25$$

$$\therefore t = 40\ min$$

درجة حرارة القطعة بعد عشر دقائق

$$T = 100e^{-0.0347\times 10}$$

$$= 70.68°\mathrm{F}$$

مثال (2-3):

جسم ساكن كتلته $M = 5\ kg$ من ارتفاع $100\ m$ احسب الزمن اللازم لوصوله الى الارض في الحالات التالية:

(1) بفرض عدم مقاومة الهواء.

(2) اذا كانت مقاومة الهواء $kv = (1/8)v$ حيث v هي سرعة الكرة (m/sec).

الحل:

(1)

باستعمال معادلة (3-2-4):

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v = g$$

بما ان الجسم كان ساكناً لذا عند $t = 0$ تكون $v = 0$ وعليه فان الشرط الابتدائي هو $v(0) = 0$

$$\frac{dv}{dt} = 9.8\ ; v(0) = 0$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة اعلاه نحصل على

$$L\{v'\} = L\{9.8\}$$

وحسب المعادلة رقم (2-1) بالأضافة الى جدول تحويلات لابلاس للدوال :

$$sL\{v\} - v(0) = \frac{9.8}{s}$$

$$sL\{v\} - 0 = \frac{9.8}{s}$$

$$L\{v\} = \frac{9.8}{s^2}$$

ومن جدول تحويلات لابلاس للدول تصبح معادلة الحركة :

$$v = 9.8t$$

$$\frac{dh}{dt} = 9.8t$$

بما ان الجسم كان ساكناً لذا عند $t=0$ تكون $h=0$ ، باخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة

$$sL\{h\}-h(0)=\frac{9.8}{s^2}$$

$$L\{h\}=\frac{9.8}{s^3}$$

$$h=4.9t^2$$

لذا فان الزمن اللازم لوصول الجسم الى الارض هو :

$$t=\sqrt{\frac{h}{4.9}}=\sqrt{\frac{100}{4.9}}=4.5\ \ sec$$

(2)

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{M}v=\mathrm{g}$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{40}v=9.8;\quad v(0)=0$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة الاخيرة بالشرط الابتدائي $v(0)=0$ نحصل على

$$sL\{v\}+0.025L\{v\}=\frac{9.8}{s}$$

$$(s+0.025)L\{v\}=\frac{9.8}{s}$$

$$L\{v\}=\frac{9.8}{s(s+0.025)}$$

$$\frac{9.8}{s(s+0.025)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+0.025)}$$

$$s=0\Rightarrow\ A=\frac{9.8}{0.025}=392$$

$$s=-0.025\Rightarrow\ B=\frac{9.8}{-0.025}=-392$$

$$L\{v\} = \frac{392}{s} - \frac{392}{(s+0.025)}$$

$$v = L^{-1}\left\{\frac{392}{s} - \frac{392}{(s+0.025)}\right\}$$

$$v = 392(1 - e^{-0.025t})$$

$$\frac{dx}{dt} = 392\left(1 - e^{-t/40}\right)$$

$$dx = 392\left(1 - e^{-t/40}\right)dt$$

$$x = 392\left(t + 40e^{-t/40}\right) + c_1$$

عند $t = 0$ تكون $s = 0$ فنحصل على $c_1 = -15680$

$$\therefore\ x = 392\left(t + 40e^{-t/40}\right) - 15680$$

لإيجاد الزمن اللازم لوصول الجسم الى الارض

$$100 = 392\left(t + 40e^{-t/40}\right) - 15680$$

$$15780 = 392\left(t + 40e^{-t/40}\right)$$

$$t + 40e^{-t/40} = 40.25$$

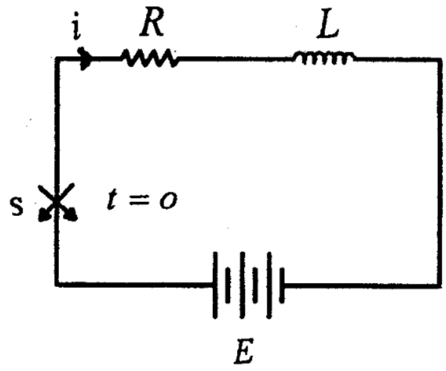
باستعمال متسلسلة تايلر $e^{-t/40} \cong 1 - \frac{t}{40} + \frac{(-t/40)^2}{2}$

$$t + 40 - t + \frac{t^2}{80} = 40.25$$

$$t^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad t = 4.47\ sec$$

مثال (3-3) :

في الدائرة الكهربائية ادناه اذا كان $R = 10\ \Omega$, $L = 10mH$, $E = 20v$ فجد شدة التيار عند اي لحظة.



الحل : بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على هذه الدائرة نحصل على

$$10\ \frac{di}{dt} + 10i = 20$$

$$\frac{di}{dt} + i = 2; i(0) = 0$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة الاخيرة بالشرط الابتدائي $i(0) = 0$ نحصل على

$$sL\{i\} + L\{i\} = \frac{2}{s}$$

$$(s+1)L\{i\} = \frac{2}{s}$$

$$L\{i\} = \frac{2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$$

$s = 0 \Rightarrow A = 2$ and $s = -1 \Rightarrow B = -2$

$$L\{i\} = \frac{2}{s} + \frac{-2}{(s+1)}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$i = 2 - 2e^{-t}$ وهي شدة التيار عند اي لحظة .

المصادر

1. Goodwine, Bill. *Engineering differential equations: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
2. Betounes, David. *Differential Equations: theory and applications*. New York: Springer, 2010.
3. Braun, Martin, and Martin Golubitsky. *Differential equations and their applications*. Vol. 2. New York: Springer-Verlag, 1983.
4. Noor, A.H." Solving Differential Equations by using Laplace Transformation". Msc, thesis, University of Kufa, College of Education, Department of Mathematics, (2007).
5. Mohammed, A.H." A Suggested Method of Laplace Transformations Without using Any Initial Conditions", Al- Qadesseya university magazine for completely sciences, volume (6), number (2),(2001).
6. Mohammed, A.H." Linear Differential Equations and Laplace Transformations Al-Qadesseya university magazine for completely sciences, volume (7), number (2), (2002).
7. Adhraa Nimah Kazem, Ali Hassan Muhammad, “Solving Differential Equations Using Laplace Transforms,” Journal of the Islamic University College, 2009, Volume, Issue 7, Pages 43-55.