جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

أساليب التكرار في جبر المصفوفات

بحث تقدم به الطالب

محمود عبد بجاي

كأحد متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة – جامعة بابل

إشراف

م.م. فاطمة علي عبدالحسين

1444هـ 2023م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ﴾

صدق الله العظيم

«سورة المجادلة: الآية 11»

الاهداء

نهدي ثمرة هذا البحث الى من بلغ الرسالة وادى الامانة ونصح الامة . .

الى النبي الهاشمي نبي الرحمة محمد (صلى الله عليه وسلم) . .

والى من كلله الله بالهيبة والوقار والى من علمني العطاء دون انتظار الى من احمل اسمه بكل افتخار الى قدوتي في الحياة الى من ارجوا من الله ان يطيل في عمره ليرى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار الى من ستبقى نصائحه وكلماته كالنجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد والى الابد (والدي الحبيب) .

الى من ضحت وربت وسهرت الليالي الى من افضلها على نفسي والى بسمتي في الحياة الى من لم اجد كلاماً يعبر عنها ويفي بوصفها الى من كان دعائها ولازال يرافقني هو السر في نجاحي (والدتي الحبيبة) اسال الله ان يطيل في عمرك ويديمك لنا .

الى من هم السند والعضد والقلوب الطاهرة والنقية الرقيقة الى النفوس البريئة الى رياحين حياتي (اخوتي وخواتي) الاعزاء .

اسال الله ان يحفظك وان يوفقك اينما تكون .

الى كل من وقف على منابر العلم واعطى حصيلة فكره لينير طريقنا (الاساتذة الكرام) كما نهدي

الشكر والتقدير

الحمد الله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد (صلى الله عليه واله وسلم)، وبعد فاني احمد الله كثيرا واشكره شكرا وفيرا لما وفقني له واعانني في اتمام بحثي هذا وان اسجل اجلالا وعرفانا عظيم شكري وامتناني للاستاذة (م.م.فاطمة علي عبدالحسين) المشرفة على هذا البحث لما بذله من جهد علمي صادق، ولما غمرتني به من خلق علمي وتوجيهات رشيدة كما ان شكري موجه الادارة كلية التربية للعلوم الصرفة بجامعة بابل قسم الرياضيات للمجهودات المبذولة من قبل اساتذتنا الكرام في الجامعة لتوفير أفضل بيئة للتدريس في افضل الاحوال التي تلائم طلبة العلم.

كذلك شكري وحبي الى اسرتي وبالأخص ابي وامي واخوتي لما قدموه من تعاون ومشقة وصبر اثناء الانشغال بالدراسة.

الفهرست

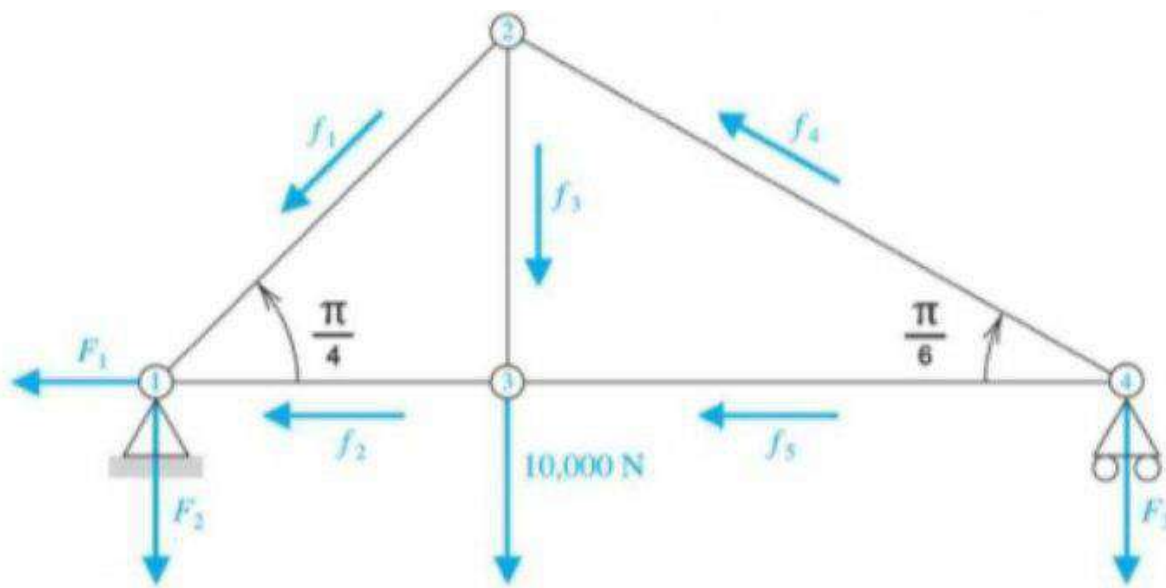
الخلاصة

قمنا في هذا البحث دراسة حول موضوع أساليب التكرار في جبر المصفوفات وحيث تطرقنا الى موضوع معايير المتجهات و المصفوفات وكذلك عرفنا القيم المميزة و المتجهات المميزة و متعددة الحدود المميزة لكل مصفوفة و نصف القطر الطيبعي وعلاقتة بمعيار المصفوفات ووضعنا بعض الطرق التكرارية لحل أنظمة الخطية باستخدام المصفوفات ومنها طريقة جاكوبي وطريقة كاوس سيدل

الفصل الأول

(1-1) مقدمة

الدعامات عبارة عن إنشاءات قادرة على حمل أحمال ثقيلة. وعند تصميم الجسر تربط هذه الدعامات فيما بينها بوصلات مسمارية قابلة للدوران تسمح بتحويل القوى المؤثرة من دعامة إلى أخرى. ويرينا الشكل أدناه دعامة وضعت مستقرة عند النقطة الطرفية اليسرى السفلى ، ويسمح لها بالتحرك أفقيا عند النقطة الطرفية اليمنى السفلى (1) ولها وصلات مسمارية عند(4)(3)(2)(1) وقد وضع ثقل زنته 10,000 نيوتن (N) عند المفصل 3 والقوى الناتجة على المفاصل ممثلة في f_4 . f_3 . f_4, f_5كما يبينه الشكل. وتعني الإشارة الموجبة لهذه القوى شدًا لأجزاء الوصلة المسمارية، أما الإشارة السالبة فتعني ضغطا عليها .إن عنصر الدعم المستقر يمكن أن يكون له مركبة قوة أفقية F1 ومركبة قوة عمودية ، حيث إن عنصر الدعم المتحرك له مركبة قوة عمودية f_3 فقط



إذا كانت الدعامة في حالة توازن مستقر فإن القوى عند أي مفصل يجب إضافتها إلى المتجه الصفري، بحيث يكون مجموع المركبات العمودية والأفقية عند كل مفصل يساوي صفرا. وهذا ينتج لنا نظام المعادلات إن مصفوفة بأبعاد 8 ×8 توضح هذا النظام بحيث يكون فيها 47 من القيم صفرا و17 منها فقط ليست صفرا. وتسمى المصفوفات ذات النسبة العالية من الأصفار متناثرة sparse ، ويكون حلها غالبا باستخدام أساليب التكرار بدلا من المباشرة.

(1-2) معايير المتجهات والمصفوفاتNorms of Vectors and Matrices

أوضحنا أساليب التكرار لإيجاد جذور المعادلات من النوع $f(x) = 0$ ووجدنا تقريبا أو (تقريبات) ابتدائية، بعدئذ تحدد تقريبات جديدة استنادا إلى جودة التقريب السابق للمعادلة. ولمناقشة طرائق التكرار لحل الأنظمة الخطية؛ فإننا نحتاج أولا إلى قياس المسافة ما بين متجهات عمود ذات البعد 8 لتحديد ما إذا كانت متتالية المتجهات تتقارب إلى حل النظام. وفي الواقع تكون الحاجة إلى هذا المعيار عندما يستخرج الحل بالطرائق المباشرة المذكورة في الفصل السادس، تتطلب تلك الطرائق الكثير من العمليات الحسابية، وتستخدم حسابات منتهية المواقع بحيث تؤدي إلى تقريب حل حقيقي للنظام فقط. ليمثل R^n مجموعة جميع متجهات العمود ذات البعد n مع معاملات بأعداد حقيقية. ولتعريف مسافة ما في"R

نستخدم تعبير معيار.

<u>تعريف</u> :إن متجه المعيار على R^n هو دالة، || || منR^n إلى R يحقق الخواص الآتية

1- $\| x\| \geq 0$ ل $x \in R^n$ جميعا

2- $\|x\| = 0$ اذا وفقط اذا x=0

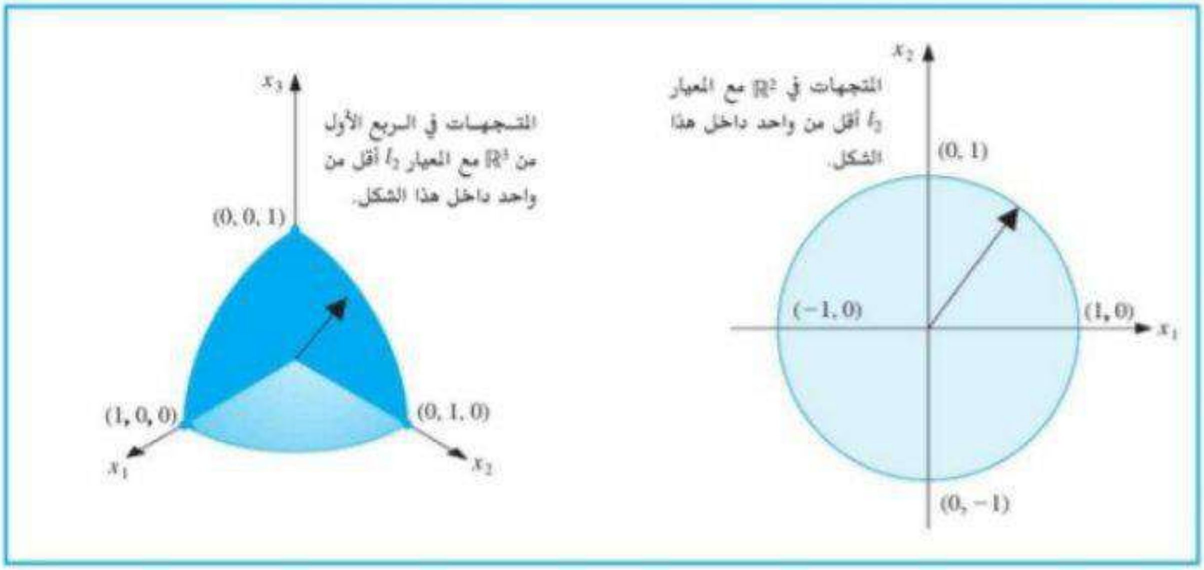
3- $\|ax\| = |\alpha|\|x\|$ ل $\alpha \in R$ و $x \in R^n$ جميعا

4- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ل$x, y \in \mathbb{R}^n$ جميعا

سنحتاج الى اثنين فقط من المعايير منتهية $\mathbb{R}^n$ على الرغم من ان معيار ثالثا R^n ولما كان المتجهات في R^n هي متجهات عمودية فانه من المناسب استخدام صيغة المنقول حيث عبر عن المتجة بدلالة مكوناتة

<u>تعريف</u> : يسمى المعيار I_2 معيارا إقليديا Euclidean norm للمتجهx ؛ لأنه يمثل مفهوم المسافة من نقطة الأصـل فـي حالة كون × فـي$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ أو . R وعلى سبيل المثال فإن معيـار I_2 للمتجه $x = (x_1, x_2, x_3)^2$يعطـي طول الخط المستقيم الواصل مـا بين النقطتين $(0,0,0), (x_1, x_2, x_3)$

.ويبين شكل (.1) حدود المتجهات في$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ التي لها معيار I_2أقل منI. وشـكل(2) هو توضيح مماثل للمعيار I



شكل رقم (1)

مثال

للمتجة $x = (-1, 1, -2)$ في $\mathbb{R}^3$ معايير

$$\|x\|_\infty = \max\{|-1|, |-2|\} = 2, \|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

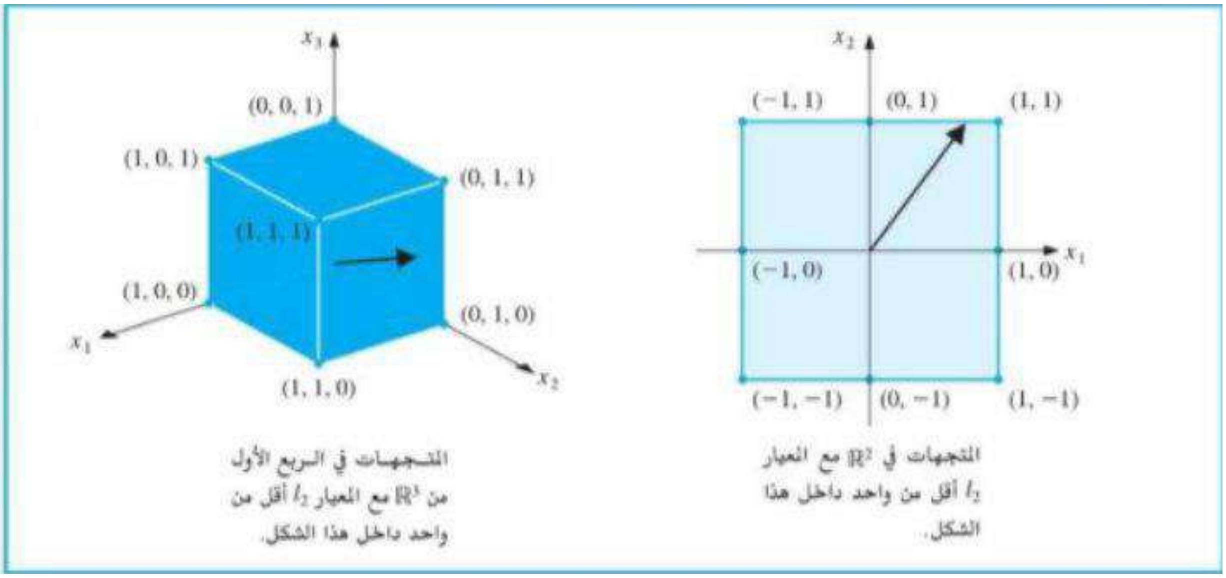
ومن السهل ان نرى تحقق خصائص تعريف السابق لمعيار I_∞ لانها تتبع من نفس النتائج لقيم المطلقة وعلى سبيل المثال فاذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ فان

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i + y| \le \max_{1\le i\le n} (|x_i| + |y_i|) \le \max_{1\le i\le n} |x_i| + \max_{1\le i\le n} |y_i|$$
$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

ولكي نثبت

$$x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

فاننا نحتاج الى المتباينة المشهورة التي تقدمها المبرهنه الاتية



شكل رقم (2)

مبرهنة متباينة كوشي –بنياكوفسكي –شيوارتز لعمليات الجمع

لكل من $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)^t$ في $\mathbb{R}^n$ فان

$$x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 . \|y\|_2$$

تعريف

اذا كان $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ فان المسافتين I_2 و i_∞ بين x و y تعرفان على النحو التالي

$$\|x - y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|, \|x - y\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

مثال: للنظام الخطي

$$3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 1591.3$$
$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 28.544$$
$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

حل $(\mathrm{x}_1, x_2, x_3)^t = (1,1,1)^t$ فاذا طبق حذف جاوس gausslan ellmination في حساب تقريب لخمس خانات ستخدمين تمحور العمود الأعظم maximal column plvoting وفقا للخوارزمية فان الحل سيكون

$$\hat{x} = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \widehat{x_3})^t = (1.2001, 0.9999, 0.92533)^t$$

ومقاييس $x - \hat{x}$ معطاة من خلال

$$\|x - \hat{x}\|_\infty = \max\{|1 - 1.2001|, |1 - 0.99991|, |1 - 0.92538|\}$$
$$= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} = 0.200$$

و

$$\|x - \hat{x}\|_2 = [(1 - 1.2001)^2 + (1 - 0.99991)^2 + (1 - 0.92538)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462\ )^2]^{\frac{1}{2}} = 0.21356$$

تعريف

تقول ان المتتالية $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ حيث x^k متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية وتقرب الى *x* بالنسبة الى المعيار ||.|| اذا كان لكل $0 < \varepsilon$ يوجد عدد صحيح $N(\varepsilon)$ يحقق

$$K \geq N(\varepsilon)\forall, \left\|x^k - x\right\| -< \varepsilon$$

مبرهنة : نقول ان المتتالية $\{x^k\}$ حيث متجهات على $\mathbb{R}^n$ تقاربية وتقارب الى *x* بالنسبة الى $\|.\|_\infty$ اذا وفقط اذا كان $x_i^k = x_i$ $\lim_{k} \infty$ لكل $i = 1,2, \ldots., n$

مثال: ليكن $x^k \in \mathbb{R}^4$ معرفا من خلال

$$x^{\{k\}} = \left(x_1^{\{k\}}, x_2^{\{k\}}, x_3^{\{k\}}, x_4^{\{k\}}\right)^t = \left(1,2 + \frac{1}{k'}, \frac{3}{k^{2'}}, e^{-k} \sin k\right)^t$$

ولكون

$$\lim_{k\to\infty} e^{-k}\ sik\ k = 0, \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k^2} = 0\,, \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{k}\right) = 2\,, \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

فان المبرهنة تؤدي الى ان المتتالية في التمرين السابق تتقارب الى $(1,2,0,0)^t$ بالنسبة الى معيار I_2 صعب الى حد ما و الاسهل من ذلك هو ببهنة النتيجة (المبرهنة) التالية وتطبيقها على هذا الحالة الخاصة

مبرهنة

لكل $x \in \mathbb{R}^n$ يكون

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

تعريف

ان معيار المصفوفة *matrix norm* على مجموعة المصفوفات بحجم $n \times n$ عبارة عن دالة بقيمة حقيقة ||.|| معرفة على هذه المجموعة ويحقق لكل من المصفوفتين *B,A* بحجم $n \times n$ والاعداد الحقيقية α جميعا الخصائص الاتية

1-$\|A\| \geq 0$

2-$\|A\| = 0$ اذا وفقط اذا *A* كانت *0* أي مصفوفة مدخلاتها جميعا اصفار

3-$\|\alpha A\| = \|\alpha\|\|A\|$

3-$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4-$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

المسافة بين المصفوفتين *A,B* بحجم $n \times n$ بالنسبة الى معيار الصمفوفة هذا هي $\|A - B\|$ وعلى الرغم ان معييار المصفوفة يمكن ايجادها يطرائق مختلفة الا ان المعيار الوحيد التي تهمنا هي تلك التي تكون النتائج طبيعة لمعيار المتجهين I_∞, I_2 وليس من الصعب اثبات المبرهنة التالية

مبرهنة اذا كان ||.|| معيارا متجها $\mathbb{R}^n$ تكون

$$\|A\| = \max_{|X|=1} \|AX\|$$

معيار المصفوفة

ويسمى هذه المعيار مصفوفة طبيعيا او (مستحثا) ومرتبطا بمعيار متجة ان معيار المصفوفة جميعها هي معايير مصفوفة طبيعية ما لم يذكر خلاف ذلك

لاي $z \neq 0$ لدينا $x = z/\|z\|$ يمثل متجة الوحدة ومن ثمفان

$$\max_{\|x\|=1} AX = \max_{Z\neq 0} \left\| A\left(\frac{Z}{\|Z\|}\right) \right\| = \max_{Z\neq 0} \|AZ\|/\|Z\|$$

ونستطيع بدلا من ذلك كتابتها

$$\|A\| = \max_{Z\neq 0} \quad \frac{\|AZ\|}{\|Z\|}$$

وتظهر النتيجة المباشرة للمبرهنة من هذا التعبير ل $\|A\|$

المبرهنة : لاي متجة $Z \neq 0$ مصفوفة A واي معيار طبيعي ||.|| يكون لدينا

$$\|AZ\| \leq \|A\|.\|Z\|$$

الفصل الثاني

(2-1) القيم المميزة والمتجهات المميزةEgenvalues And Eingenvectors

يمكن اعتبار مصفوفة من الشكل $n \times m$على أنها دالة تستخدم عملية ضرب المصفوفات لتحويل المتجهات بحجم *m* لمتجهات بحجم *n*تأخذ المصفوفة التربيعية *A*متجهات بحجم *N* لنفسها، وفي هذه الحالة ثمة متجهات غير صفرية معينة × تكون موازية لـ *AX* ، الذي يعني وجود ثابت λ مع $Ax = \lambda x$. ولهذه المتجهات يكون لدينا $(A - \lambda\,.\,I)x = 0$ وهناك صلة قوية بين هذه الأعدادλ وأرجحية التقارب لطريقة تكرار. وسنأخذ في الحسبان هذه الصلة ضمن هذا الفصل

تعريف :إذا كانت *A* مصفوفة مربعة فإن كثيرة الحدود المميزة *characteristic polynomial* لـ*A*. تعرف على النحو الآتي:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ليس من الصعب إثبات أن *p* كثيرة حدود برتبة*n* ومن ثم فله *n* من الأصفار المختلفة على الأكثر، وبعضها قد يكون مركبا .*complex* فإذا كانت λ صفرا لـ *p*، فإن$det = (A - \lambda I) = 0$، وتفيد المبرهنة بأن النظام الخطي المعرف من خلال $(A - \lambda I)x = 0$له حل مع$x \neq 0$. نرغب هنا في دراسة الأصفار لـ *p*والحلول غير الصفرية المقابلة لتلك النظم

تعريف

. إذا كانت*p* كثيرة حدود المميزة للمصفوفة *A* فإن أصفار *P* هي القيم المميزة للمصفوفة*A*، وإذا كانت λ قيمة مميزة لـ *A*، وأن $x \neq 0$يتحقق $(A - \lambda I)x = 0$، فإن × هي متجه مميز لـ *A*مقابلة للقيمة المميزة.

إذا كانت × متجها مميز مرتبطا بالقيمة المميزة فإن $Ax = \lambda x$، ومن ثم فإن المصفوفة*A*. تأخذ المتجه × إلى قيمة مضاعفة لنفسه. فإذا كانت λ حقيقية و ف$\lambda > 0$ إن *A* لها تأثير في توسعة*x* بعامل λ ، كما يتضح من شكل (*2.1*). وإذا كان $1 > \lambda > 0$ فإن *A* تقلص *x* بعامل.λ (انظر شكل (1)وعندما $0 < \lambda < 1$فإن التأثيرات تكون متشابهة انظر الشكلين ، على الرغم من أن اتجاه *Ax* قد عكس

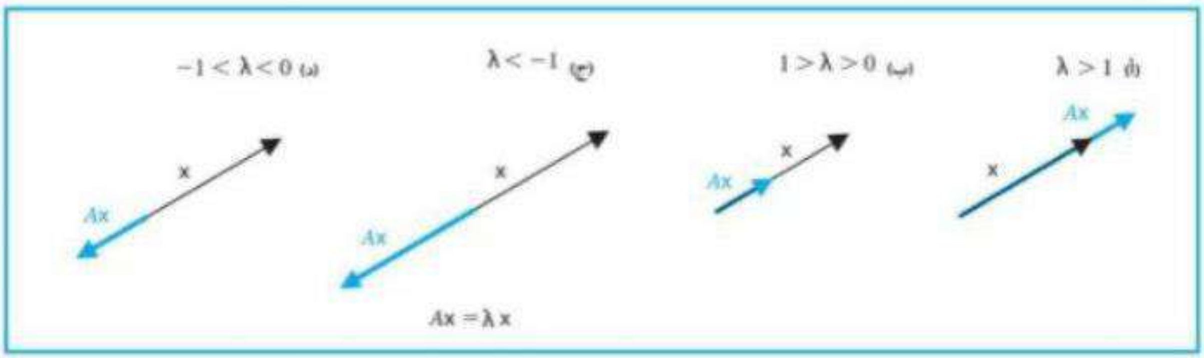
انظر كذلك أنه إذا كان *x* متجها مميزا لـ *A* ومرتبطا بالقيمة المميزةλ ، وأن α أي ثابت ليس

صفرا، فإنαx متجه مميز أيضاء لأن

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$$

مثال : إن كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



شكل رقم (1)

مثال :

ان كثيرة حدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هي

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 4 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$$
$$= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$$

القيم المميزة لa هي الحلول ل $p(\lambda) = 0$ وهي

$$\lambda_3 = 1 - \sqrt{3i} \ , \lambda_2 = 1 + \sqrt{3i} \, , \lambda_1 = 1$$

المتجة المميز x_1 ل A المقترن مع $\lambda_1 = 1$ هو حل للمعادلة $(A - \lambda_1 I)x = 0$ وبذلك

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 0 & -1\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

ومن ثم $-x_1+x_2=0\ \ ,-x_3=0\ \ ,2x_3=0$

التي تؤدي الى ان

$x_1, x_2=x_1, x_3=0$ عشزائيا

ان اختبار $x_1=1$ يعطي المتجة المميز $x_1=(1,1,0)^t$ مقترنا بالقيمة المميزة λ_1 ووفقا لهذا الاختبار يكون لدينا $\|(1,1,0)^t\|_\infty=1$ فاذا اردنا متجها مميزا بقيمة منتهية في معيار ماخر فما علينا سوى الضرب في ثابت مناسب وعلى سبيل المثال عند ضرب x_1 في المقدار $\sqrt{2/2}$ يعطي المتجة المميز $\widehat{x_1}$ مع معيار I_2 مساو ل1

$$\|\widehat{x_1}\|_2=\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right\|_2=1$$

ولما كان λ_2 وλ_3 عددين معقدين فان المتجهات المميزة المقترنة بها تكون كذلك لايجاد متجة مميز لλ_2 نحل النظام

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-(1+\sqrt{3}i) & 0 & 2\\0 & 1-(1+\sqrt{3}i) & -1\\-1 & 1 & 1-(1+\sqrt{3}i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

وحل واحد لهذا النظام هو المتجة المميز

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}i\ ,\frac{\sqrt{3}}{3}i\ ,1\right)^t$$

وهو متجة مميز مقترن بالقيمة المميزة $\lambda_3=1-\sqrt{3i}$

تعريف :المفاهيم تضهر غالبا في دراسة الأنظمة الفيزيائية

نصف القطر الطبيفي (spectralrodiusl) $\rho(A)$ المصفوفة A يعرف على النحو التالي $\rho(A) =$ $max|\lambda|$ حيث ان λ قيمة مميزة ل A

(تذكر ان عند $\lambda = \alpha + \beta i$ المركبة يكون لدينا $|\lambda| = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$)

مبرهنة :ونجد ان المصفوفة في المثال

$$\rho(A) = \max\{1, |1 + \sqrt{3}i|, |1 - \sqrt{3}i|\} = \max\{1,2,2\} = 2$$

ويرتبط نصف القطر الطيفي عن قرب بمفيار الصفوف كما يضهر في المبرهنة الاتية

اذا كانت A مصفوفة بحجم $n \times n$ فان

1- $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{\frac{1}{2}}$

2- $\rho(A) \leq \|A\|$ لاي معيار طبيعي $\|.\|$

مثال : اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A'A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ولحساب $\rho(A'A)$ نحتاج الى القيم المميزة ل $A^t A$ واذا كان

$$0 = \det(A^t A - \lambda I)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 42\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42)$$

$$\lambda = 7 \pm \sqrt{7}, \lambda = 0$$

فان ومن ثم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A'A)} = \sqrt{max}(0,7-\sqrt{7}, 7+\sqrt{7}) = \sqrt{7} + \sqrt{7} \approx 3.106$$

في دراسة أساليب المصفوفة التكرارية يكون مهما معرفة متى تصبح قوة المصفوفة الصغيرة يقال للمصفوفة من هذا النوع متقاربة convergent

تعريف :نقولان المصفوفة A بحجم $n \times n$ متقاربة اذا كان

مثال4

$$j = 1,2,\dots,n \quad ,i = 1,2,\dots,n \quad ,\lim_{k=\infty}(A^k)_{ij}$$

وليكن

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ولحساب قوى A نستخرج

$$A^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} . A^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} . A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

وعموما

$$A^K = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ \frac{k}{2^k+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

والان

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2^k+1} = 0 , \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$$

مبرهنة :نتيجة المبرهنة الاتية

العبارات الاتية المكافئة

1-A عبارة عن المصفوفة المتقاربة

2-$\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ لمعيار طبيعي معين

3-$\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ للمعايير الطبيعية جميعها

4-$\rho(A) < 1$

5-$\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$ لكل x

الفصل الثالث

(3-1) استخدام الطرق التكرارية لحل أنظمة خطية

. Itreative Techniques For Solving Linear Systems

سنوضح في هذا الفصل طرائق Jacobi و Gauss-Seidel للتكرار، وهي طرائق كلاسيكية تعود إلى القرن الثامن عشر، ومن النادر استخدام أساليب التكرر في حل أنظمة خطية صغيرة الأبعاد؛ لأن الوقت المستغرق للحصول على الدقة المطلوبة يفوق ما تتطلبه أساليب أخرى مثل أسلوب تقليص حذف .Gaussiat وفي الأنظمة الكبيرة مع نسبة عالية من العناصر السفرية، فهذه الأساليب كافية من حيث تخزين الحاسوب والحسابات، وتبرز أنظمة من هذا النوع غالبا في تحليل الدوائر، وفي الحل العددي لمسائل قيمة الحدود والمعادلات التفاضلية الجزئية. إن أسلوب التكرار لحل نظام خطي Ax = b بحجم n xn يبدأ مع تقريب ابتدائي $x^{(0)}$ للحلx وتوليد متتالية المتجهات $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ التي تتقارب إلىx. وتتضمن أساليب التكرار عملية تحويل النظام Ax = b إلى نظام يعادله بالصيغة x=Tx+cلمصفوفة ثابتة T ومتجه.c

1.طريقة جاكوبي

وبعد اختيار المتجه الابتدائي X^0 تتولد متتالية متجهات الحل التقريبي من خلال حساب

$X^{\{K\}} = T \times^{\{K-1\}} + C$ لكل K = 1, 2, 3,....

مثال <u>1</u> النظام الخطي Ax = b العطى من خلال

$$E_1: 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$
$$E_2: -X_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$
$$E_3: 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$
$$E_4: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

له حل وحيد وهو $x = (1,2,-1,1)^t$ ولقلب AX=b الى الصيغة $x = Tx + c$ حل المعادلة Ei ل x_i ولكل i=1,2,3,4 لايجاد

$$x_1 = \qquad \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}\ x_3 \qquad + \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{11}x_1 \qquad + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11}$$

$$x_3 = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \qquad + \frac{1}{10}x_4 - \frac{1}{10}$$

$$x_4 = \qquad -\frac{2}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \qquad + \frac{15}{8}$$

ولذلك يمكن تكرار كتابة $Ax = b$ بالصيغة $x = Tx + c$ مع

$$c = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix} \quad ,T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

ولتقريب ابتدائي $x^0 = (0,0,0,0)^s$ ومن ثم فان x^1يعطي من خلال

$$x_1^1 = \qquad \frac{1}{10}x_2^0 - \frac{1}{5}x_3^0 \quad + \frac{3}{5} = 0.6000$$

$$x_2^1 = \frac{1}{11}x_1^0 \quad + \frac{1}{11}x_3^0 - \frac{3}{11}x_4^0 + \frac{25}{11} = 22727$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{1}{10}x_2^0 \quad + \frac{1}{10}x_4^0 - \frac{11}{10} = -1.1000$$

$$x_4^1 = \qquad \frac{3}{8}x_2^0 + \frac{1}{8}x_3^0 \qquad + \frac{15}{8} = 1.8750$$

تتولد تكرارات إضافية مثل $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k\}$ بالأسلوب نفسة وهي معرضة في جدول (1)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^k	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	0.0001
x_2^k	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
x_3^k	0.0000	-1.1000	-0.8052	-1.0493	-0.9681	-1.0103	-0.9945	-1.0020	-0.9990	-1.0004	-0.9998
x_4^k	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

خوارزمية تكرار جاكوبي

لحل AX=b بوجود تقريب ابتدائي x^0

المدخلات عدد المعادلات و المجاهيل n العناصر $1 \le i \quad j \le n$ a_{ij} للمصفوفة A العناصر $b_i, 1 \le i \le n$ لـb العناصر $xo_i, 1 \le i \le n$ لـ $xo = x^0$ حد السماح TOL واكبر عدد من التكرار N

المخرجات الحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ او عبارة تفيد بان عدد المرات التكرار قد تم انجازة

الخطوات	المضمون
1	ضع k=1
2	ما دام $(k \le N)$ فطبق الخطوة $3 - 6$
3	عند I=1,.....,N ضع $x_i = \frac{-\sum_{j=1, j\neq i}^{n}(a_{ij}Xo_i)+b_i}{a_{ii}}$
4	اذا كان $\|x - xo\| < TOL$ فان المخرجات $(X_1, \ldots, X_n)$ (العلمليات كانت ناجحة) توقف
5	ضع k=k+1
6	عند i=1,...,n ضع $x0_i=x_i$
7	المخرجات (اكبر عدد مرات تكرار تم تجاوزة) (العمليات كانت ناجحة) توقف

تتطلب الخطوة (3) من الخوارزمية كون $a_{ii} \neq 0$, لكل $i = 1,2, \dots . n,$ وإذا كان واحد من العناصر a_{ii} صفرا. والنظام ليس مفردا، فإنه بالإمكان تكرار ترتيب المعادلات بحيث لا نجد فيها $a_{ii} = 0$. ولتعجيل التقارب، يجب ترتيب المعادلات بحيث تكون a_{ii} أكبر ما يمكن سيناقش هذا الموضوع بتفاصيل أكثر في آخر هذا الفصل .وهناك معيار آخر محتمل للتوقف في الخطوة (4)، وذلك باستمرار التكرار حتى يكون

$$\frac{\left||x^k - x^{k-1}|\right|}{||x^k||}$$

أصغر من حد السماح المثبت. ولهذا الغرض ؛ يمكن استخدام أي معيار مناسب ، وهو عادة معيار I_∞

<u>مثال</u> :النظام الخطي المعطي من خلال

$$10x_1\ x_2 + 2x_3 \quad\quad = 6$$

$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$

$$3x_2 - x_3 + 8x4 = 15$$

قد حل في مثال السابق بطريقة التكرار جاكوبي وبدمج المعادلة (7.7) ضمن الخوارزمية (1.7) نحصل على معادلات التي تستخدم لكل من $k = 1,2, \dots,$ وهي

$$\mathrm{x}_1^k = \quad \frac{1}{10}x_2^{k-1} - \frac{1}{5}x_3^{k-1} \quad\quad + \frac{3}{5}$$

$$x_2^k = \frac{1}{11}x_1^k \quad + \frac{1}{11}x_3^{k-1} - \frac{3}{11}x_4^{k-1} + \frac{25}{11}$$

$$x_3^k = -\frac{1}{5}x_1^k + \frac{1}{10}x_2^k \quad + \frac{1}{10}x_4^{k-1} - \frac{11}{10}$$

$$x_4^k = \quad -\frac{3}{8}x_2^k + \frac{1}{8}x_3^k \quad + \frac{15}{8}$$

وبوضح $x^0 = (0,0,0,0)^x$

3.2 تكرار جاوس –سيدل Gaaus Sidel

لحل Ax=b بوجود تقريب ابتدائي x^0

المدخلات : عدد المعادلات و المجاهيل n العناصر $a_{ij}, 1 \leq i \leq i, j \leq n$ للمصفوفة A العناصر $b_i, 1 \leq i \leq n$ ل b_i العناصر $XO_I, 1 \leq i \leq n$ ل $XO = x^0$ حد السماح Tol واكبر عدد من التكرار N

المخرجات : لحل التقريبي $x_1, \ldots, x_n$ او عبارة تفيد بان عدد مرات التكرار N قد تم تجاوزة

الخطوة	المضمون
1	ضع k=1
2	مادام $K \leq N$ فنطبق خطوة 3-6
3	عند I=1,....,N ضع $x_i = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} aij+XOj+b_i}{a_{ii}}$
4	اذا كان $\left\|x - xo\right\| < Tol$ فان المخرجات $(x_1, \ldots, x_n)$ (العمليات كانت ناجحة) توقف
5	ضع k=k+1
6	عند $Xoi = x_j \, , i = 1, \ldots, n$
7	المخرجات (اكبر عدد ذرات تكرار تم تجاوزة) (العمليات كانت ناجحة) توقف

مبرهنة : لاي $x^0 \in \mathbb{R}^n$ فان المتتالية $\{x^{\{k\}}\}_{k=0}^{\infty}$ المعرفة خلال

$$x^k = Tx^{k-1} + c \quad (\text{لكل } k \geq 1)$$

تتقارب الى الحل الوحيد $x = T_x + c$ اذا وفقط اذا كان $p(T) < 1$

تمهيدية

اذا كان $||\mathrm{T}|| < 1$ لاي معيار مصفوفة طبيعية و C ومتجها معلوما فان المتتالية $\{X^K\}_{K=0}^{\infty}$ من خلال $X^{\{K\}} = Tx^{\{k-1\}} + c$ تتقارب لاي $x^0 \in \mathbb{R}^n$ –وان حدود الخطأ الاتية تحقق

1- $||x - x^{\{k\}}|| \leq ||T||^K ||X^0 - X||$

2) $||x - x^k|| \leq \frac{||T||^K}{1-||T||} \quad ||x^1 - x^0||$

لقد لاحظنا اسلوبي جاكوبي للتكرار يمكن كتابتها بالصيغة

$$x^k = T_g x^{k-1} + c_g, \qquad x^k = T_j x^{k-1} + c_j$$

باستخدام المصفوفتين

$$T_g = (D - L)^{-1} U \,, T_j = D^{-1}(L + U)$$

مبرهنة

إذا كانت A تتصف حصريا بالقطرية فإن كلتا الطريقتين جاكوبي و Gauss-Seidel تعطيان - مقابل

أي اختبار لـ X^0– متتالية $\{x^{\{k\}}\}_{k=0}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل الوحيد لـ $Ax = b$

ان علاقة التقارب المتسارع بنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار T يمكن ملاحظتها من خلال

النتيجة: وبسبب تحقق المتباينات لأي معيار مصفوفة طبيعية؛ فإننا نستنتج من العبارة

ما بعد المبرهنة أن

مصفوفة التكرارية

$$||x^k - k|| \approx p(T)^k ||x^0 - x||$$

ولذلك، يفضل اختيار أسلوب التكرار المتصف بأدنى $p(T) < 1$لنظام منته .Ax = b ونظرا لعدم ظهور نتائج عامة؛ فليس بوسعنا تحديد أي الأسلوبين جاكوبي أو جاوس - سيدل Gauss-Seidel الأكثر نجاحا لنظام خطي عشوائي. وفي حالات خاصة يكون الجواب معروفا كما تناولنا في المبرهنة الآتية، إن برهان هذه النتيجة يمكن إيجاده في [Y, pp. 120-127]

مبرهنة ستين -روزنبرغ

اذا كان $a_{ik} \leq 0$ لكل $i \neq k$, $a_{ii} > 0$ لكل $i = 1,2,..,n$ فان واحد وواحدة فقط من العبارات الاتية تحقق

1) $0 \leq p(T_g) < (T_J) < 1$

2) $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$

3) $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 0$

4) $\rho(T_j) = \rho(T_g) = 1$

أما الحالة الخاصة التي وضحت في المبرهنة ، فبالنظر إلى العبارة (1) أنه عندما تعطي إحدى الطرائق تقاربا، فإن كلتيهما تعطيان تقاربا، وأن طريقة Gauss-Seidel تتقارب أسرع من طريقة جاكوبي. وتشير العبارة (2) إلى أنه عندما تتباعد إحدى الطريقتين فإن كلتيهما تتباعدان، وأن التباعد يكون أكثر وضوحا في طريقة Gauss-Seidel ولما كان معدل التقارب لعملية ما يعتمد على نصف القطر الطيفي للمصفوفة المرتبطة بالطريقة ، فإن هناك طريقا واحدا لاختيار عملية تسريع التقارب، وهو اختيار طريقة يكون للمصفوفة المرتبطة بها نصف قطر طيفي. وقبل الدخول في شرح عملية ما لاختيار مثل هذه الطريقة تحتاج إلى تقديم وسائل جديدة لقياس حجم الاختلاف ما بين تقريب الحل لنظام خطي والحل الصحيح للنظام.

المصادر

[1] Ortega, J. M., Numerical analysis; a second course, Academic Press, New York, 1972, 201 pp. QA297.078 424, 433, 444, 448, 460, 555, 598, 601

[2] Noble, B. and J. W. Daniel, Applied linear algebra (Third edition), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988, 521 pp. QA184 N6 371, 384,548

[3] Saff, E. B. and A. D. Snider, Fundamentals of complex analysis for mathematics, science, and neering (Second edition). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993, 468 pp. QA300.S18 8

[4] Searle, S. R., Matrix algebra for the biological sciences, John Wiley & Sons, New York, 196 pp. QH324.S439 382

[5] Smith, B. T. et al., Matrix eigensystem routines: EISPACK guide (Second edition), Springer-Verlag, New York, 1976, 551 pp. QA193 M37 42

[6] Stewart, G. W., Afternotes on numerical analysis, SIAM Publications, Philadelphia, PA, 1996, 200 pp. QA297.S785 402, 416

[7] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch (eds.), Handbook for automatic computation. Vol. 2: Linear alge Springer-Verlag, New York, 1971, 439 pp. QA251.W67 42, 586, 591. 595

[8] Bunch, J. R. and D. J. Rose (eds.). Sparse matrix computations (Proceedings of a conference held at Argonne National Laboratories, September 9-11, 1975), Academic Press, New York, 1976, 453 pp. QA188.S9 414