جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

Orthogonal polynomials and least square approximation

بحث مقدم الى قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة في جامعة بابل
كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في التربية / الرياضيات

من قبل
حسين مطشر كاظم هندي

بإشراف

م.د . سارة حسين عبد محمد

١٤٤٧ هـ

2026

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

"وَإِذَا قِيلَ لَهُمُ اتَّبِعُوا مَا أَنزَلَ اللَّهُ قَالُوا بَلْ نَتَّبِعُ مَا أَلْفَيْنَا عَلَيْهِ آبَاءَنَا ۗ

أَوَلَوْ كَانَ آبَاؤُهُمْ لَا يَعْقِلُونَ شَيْئًا وَلَا يَهْتَدُونَ "

صدق الله العلي العظيم

[البقرة، الآية ١٧٠]

الاهداء

إلى صاحب السيرة العطرة، والفكر المستنير، الذي كان له الفضل الأول بعد الله تعالى في بلوغي هذه المرحلة من حياتي، وإلى من كان سنداً وعوناً لي في كل خطوة خطوتها، والدي الحبيب، أطال الله في عمره وأدام عليه الصحة والعافية.

وإلى من وضعتني على طريق الحياة، وأحاطتني بحنانها ورعايتها، وكانت سبباً في قوتي وثباتي، أمي الغالية، طيب الله ثراها وأسكنها فسيح جناته.

وإلى إخوتي الأعزاء، الذين كان لهم بالغ الأثر في تجاوز الكثير من العقبات والصعاب، وكانوا خير داعم وسند في مسيرتي.

وإلى جميع أساتذتي الكرام، الذين لم يتوانوا يوماً في تقديم العلم والنصح ومد يد العون.

أهدي إليكم هذا البحث المتواضع، وفاءً ومحبةً وتقديراً.

الشكر والامتنان

إن قلت شكراً فلن يفي الشكر حقكم، فقد بذلتم من الجهد ما يستحق الثناء والتقدير، وإن عجز القلم عن التعبير، فإن القلوب الصادقة تبقى أبلغ تعبيراً عن الامتنان والعرفان.

وبعد إنجاز هذا البحث، لا يسعني إلا أن أتقدم بخالص شكري وامتناني إلى الدكتورة (م.د . سارة حسين عبد محمد)، **الذي كانت مشرفاً مخلصاً وناصحاً حريصاً على أن يكون هذا البحث أكثر رصانة وعمقاً وإثراءً بالمعلومات.**

كما أتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى عمادة كلية التربية للعلوم الصرفة في جامعة بابل، لما تبذله من جهود متواصلة وسعي دؤوب في خدمة مسيرة العلم والعطاء.

وأتوجه بخالص الشكر والامتنان إلى رئيس قسم الرياضيات، لما يوليه من اهتمام متميز بطلبة القسم، وإلى أساتذتي الأفاضل في قسم الرياضيات، لما قدموه من دعم وتوجيه طوال مدة الدراسة.

ولا يفوتني أن أتقدم بالشكر والتقدير إلى لجنة المناقشة، لما ستبديه من ملاحظات قيمة تسهم في إغناء البحث وتطويره.

محتويات البحث

الملخص

Abstract

يتناول هذا البحث موضوع التقريب الرياضي باستخدام كثيرات الحدود، مع التركيز على دراسة دور كثيرات الحدود المتعامدة في تحسين دقة عمليات التقريب وتبسيط الإجراءات الحسابية المرتبطة بها. ويُعد التقريب من الموضوعات الأساسية في التحليل العددي، حيث يُستخدم بشكل واسع في تمثيل الدوال المعقدة أو غير القابلة للحل الدقيق، وكذلك في معالجة البيانات التجريبية وتحليلها.

يهدف البحث إلى تقديم عرض منهجي للمفاهيم الأساسية المتعلقة بكثيرات الحدود، من حيث تعريفها وأنواعها وخصائصها، مع التركيز بشكل خاص على كثيرات الحدود المتعامدة، والتي تتميز بخاصية التعامد بالنسبة لدالة وزن معينة ضمن فترة محددة، الأمر الذي يسهم في تسهيل حساب معاملات التقريب وتقليل التعقيد الحسابي. وقد تم التطرق إلى أهم أنواع هذه كثيرات الحدود مثل كثيرات حدود ليجاندر وتشيبيشيف وهيرميت ولاغير، مع بيان دور كل منها في التطبيقات الرياضية المختلفة.

كما يتناول البحث دراسة طريقة المربعات الصغرى باعتبارها من أهم الطرق المستخدمة في تقريب الدوال وتمثيل البيانات، حيث تعتمد هذه الطريقة على إيجاد أفضل تقريب ممكن من خلال تقليل مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الحقيقية والقيم التقريبية. وتم توضيح الأساس الرياضي لهذه الطريقة وآلية استخدامها في بناء دوال تقريبية باستخدام كثيرات الحدود.

ويركز البحث كذلك على بيان العلاقة بين كثيرات الحدود المتعامدة وطريقة المربعات الصغرى، حيث يساهم استخدام هذه كثيرات الحدود في تبسيط حساب معاملات التقريب، وجعل العمليات الحسابية أكثر استقراراً وكفاءة. كما تم دعم الجانب النظري بعرض مجموعة من التطبيقات والأمثلة العملية التي توضح كيفية استخدام هذه الأساليب في مجالات متعددة مثل الهندسة والفيزياء والإحصاء.

وتُظهر نتائج البحث أن الجمع بين كثيرات الحدود المتعامدة وطريقة المربعات الصغرى يُعد من الأساليب الفعالة في التقريب العددي، لما يوفره من دقة عالية وسهولة في التطبيق، إضافة إلى تقليل الأخطاء وتحسين

جودة النتائج. ويُبرز ذلك أهمية هذه الأدوات في حل العديد من المشكلات العلمية والتطبيقية التي تتطلب تمثيلاً دقيقاً وفعالاً للبيانات والدوال.

المقدمة

Introduction

تُعد عملية التقريب الرياضي من الموضوعات الأساسية في الرياضيات التطبيقية والتحليل العددي، وذلك لما لها من أهمية في تمثيل الدوال المعقدة أو غير المعروفة بدوال أبسط يمكن التعامل معها بسهولة في العمليات الحسابية والتحليلية. ففي العديد من التطبيقات العلمية لا يكون من الممكن الحصول على حلول دقيقة لبعض الدوال، لذلك يتم الاعتماد على طرق التقريب للحصول على نتائج قريبة من القيم الحقيقية.

تُعتبر كثيرات الحدود من أهم الأدوات المستخدمة في هذا المجال، لما تمتاز به من بساطة في التركيب الرياضي وسهولة في إجراء العمليات الحسابية عليها مثل الاشتقاق والتكامل. ولهذا السبب تُستخدم بشكل واسع في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة وعلوم الحاسوب.

ومن بين الأنواع المهمة لكثيرات الحدود هي كثيرات الحدود المتعامدة، والتي تمتاز بوجود خاصية التعامد بينها بالنسبة لدالة وزن معينة وعلى فترة محددة، مما يساعد في تبسيط العمليات الحسابية المرتبطة بتمثيل الدوال وتقريبها.

كما تُعد طريقة المربعات الصغرى من أهم الطرق المستخدمة في تقريب الدوال أو تمثيل البيانات التجريبية، حيث تعتمد على إيجاد أفضل تقريب ممكن بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الحقيقية والقيم التقريبية أقل ما يمكن.

إن الجمع بين كثيرات الحدود المتعامدة وطريقة المربعات الصغرى يوفر إطاراً رياضياً مهماً يساعد في تحسين دقة النتائج وتقليل التعقيد الحسابي، لذلك يتم التركيز في هذا البحث على دراسة هذه المفاهيم وبيان العلاقة بينها من خلال الشرح النظري والتطبيقات العملية.

كثيرات الحدود من المفاهيم الأساسية في علم الجبر والتحليل الرياضي، حيث تُستخدم بشكل واسع في تمثيل الدوال وتحليل سلوكها. ويمكن تعريف كثير الحدود بأنه تعبير جبري يتكون من مجموع حدود تحتوي على معاملات ثابتة ومتغيرات مرفوعة إلى قوى صحيحة غير سالبة.

وتكمن أهمية كثيرات الحدود في سهولة التعامل معها، إذ يمكن إجراء العمليات الحسابية المختلفة عليها بسهولة، كما أنها قابلة للاشتقاق والتكامل، مما يجعلها مناسبة للاستخدام في التطبيقات الرياضية المختلفة.

كما تُصنف كثيرات الحدود حسب درجتها إلى كثير حدود خطي وتربيعي وتكعيبي وغيرها، ويؤثر هذا التصنيف على طبيعة المنحنى الناتج عنها وسلوكها الرياضي. وتُستخدم هذه الأنواع في تقريب الدوال المختلفة اعتماداً على درجة الدقة المطلوبة.

من جهة أخرى تُعد كثيرات الحدود المتعامدة من المفاهيم المهمة في التحليل العددي، حيث تتميز بوجود علاقة تعامد بينها بالنسبة لدالة وزن معينة وعلى فترة محددة. ويُقصد بالتعامد أن حاصل التكامل لناتج ضرب كثيري حدود مختلفين يساوي صفراً.

تساعد هذه الخاصية في تبسيط العمليات الحسابية، خاصة عند استخدامها في تقريب الدوال، حيث يمكن حساب معاملات التقريب بشكل مستقل دون الحاجة إلى حل أنظمة معادلات معقدة.

ومن أشهر أنواع كثيرات الحدود المتعامدة:

كثيرات حدود ليجندر

كثيرات حدود تشيبشيف

كثيرات حدود هيرميت

كثيرات حدود لاغير

وتُستخدم هذه الأنواع في العديد من التطبيقات مثل حل المعادلات التفاضلية والتكامل العددي وتقريب الدوال.

تُستخدم طريقة المربعات الصغرى في تقريب الدوال أو تمثيل البيانات التجريبية، حيث تعتمد على تقليل مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الحقيقية والقيم التقريبية.

فإذا كانت لدينا مجموعة من البيانات، فإن الهدف هو إيجاد دالة تقريب بحيث يكون الفرق بينها وبين القيم الحقيقية أقل ما يمكن. ويتم ذلك من خلال إيجاد معاملات الدالة التي تحقق أقل قيمة ممكنة لمجموع مربعات الأخطاء.

تُعد هذه الطريقة من أكثر الطرق استخداماً في التحليل العددي والإحصاء، وذلك بسبب دقتها وسهولة تطبيقها في مختلف المجالات.

تُستخدم كثيرات الحدود مع طريقة المربعات الصغرى في العديد من التطبيقات العملية، مثل:

تقريب البيانات التجريبية

تمثيل الدوال المعقدة

تحليل البيانات الإحصائية

التطبيقات الهندسية والفيزيائية

كما أن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة في هذه التطبيقات يساعد في تبسيط الحسابات وتحسين دقة النتائج.

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية لكثيرات الحدود وكثيرات الحدود المتعامدة

Fundamental Concepts of Polynomials and Orthogonal Polynomials

تُعد كثيرات الحدود من المفاهيم الأساسية في علم الرياضيات، حيث تلعب دوراً مهماً في العديد من فروع الرياضيات التطبيقية والتحليل العددي. وتتميز كثيرات الحدود بسهولة التعامل معها من الناحية الحسابية، مما يجعلها أداة فعالة في تمثيل الدوال المختلفة وفي حل العديد من المسائل الرياضية.

وتُستخدم كثيرات الحدود بشكل واسع في تقريب الدوال المعقدة، إذ يمكن تمثيل الدوال الصعبة بدوال أبسط على شكل كثيرات حدود، مما يسهل دراسة خصائصها وتحليل سلوكها. ولهذا السبب أصبحت كثيرات الحدود من الأدوات المهمة في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة وعلوم الحاسوب.

ومن بين الأنواع المهمة لكثيرات الحدود هي **كثيرات الحدود المتعامدة(Orthogonal Polynomials)** ، والتي تتميز بوجود علاقة تعامد بينها بالنسبة لدالة وزن معينة وعلى فترة محددة. وتُعد هذه الخاصية ذات أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات الرياضية، حيث تساعد في تبسيط العمليات الحسابية المرتبطة بتمثيل الدوال وتقريبها.

كما تُعد **طريقة المربعات الصغرى (Least Squares Approximation)** من أهم الطرق المستخدمة في التقريب الرياضي، حيث تعتمد هذه الطريقة على إيجاد أفضل تقريب لدالة معينة أو لمجموعة من البيانات بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الحقيقية والقيم التقريبية أقل ما يمكن.

لذلك يهدف هذا الفصل إلى تقديم الأساس النظري لموضوع البحث من خلال التعرف على مفهوم كثيرات الحدود بصورة عامة وأنواعها المختلفة، بالإضافة إلى دراسة مفهوم كثيرات الحدود المتعامدة وأهم خصائصها وبعض أنواعها المعروفة

1.1 كثيرات الحدود (Polynomials)

تُعد كثيرات الحدود (Polynomials) من أهم المفاهيم الأساسية في علم الجبر والتحليل الرياضي، حيث تُستخدم بشكل واسع في العديد من فروع الرياضيات التطبيقية والعلوم الهندسية. وتكمن أهمية كثيرات الحدود في بساطة تركيبها الرياضي وسهولة التعامل معها في العمليات الحسابية المختلفة، مما يجعلها من الأدوات الفعالة في تمثيل العديد من الدوال الرياضية وتحليل سلوكها.

يمكن تعريف كثير الحدود بأنه تعبير جبري يتكون من مجموع عدد من الحدود الجبرية التي تحتوي على متغير واحد أو أكثر، بحيث تكون أسس المتغيرات أعداداً صحيحة غير سالبة. وتتكون هذه الحدود من معاملات ثابتة مضروبة في المتغيرات مرفوعة إلى قوى مختلفة.

ويكون الشكل العام لكثير الحدود في متغير واحد كما يأتي:

$$\mathbf{P(x)} = \boldsymbol{a_n x^n} + \mathbf{a_{n-1}x^{n-1}} + \mathbf{a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots + \mathbf{a_2x^2} + \mathbf{a_1x} + \mathbf{a_0}$$

حيث أن:

x: يمثل المتغير.

$a_1 , a_2 , a_3\ and\ a_4$ تمثل معاملات ثابتة قد تكون أعداداً حقيقية أو عقدية.

n: يمثل درجة كثير الحدود، وهي أعلى قوة يظهر بها المتغير x.

وتسمى كل عبارة من العبارات التي يتكون منها كثير الحدود **حداً(Term)** ، حيث يتكون كل حد من معامل ثابت مضروب في المتغير مرفوعاً إلى قوة معينة.

فعلى سبيل المثال، في كثير الحدود التالي:

$$\mathbf{P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

يمكن ملاحظة أن كثير الحدود يتكون من أربعة حدود هي:

$$\mathbf{4x^3,\ \ 3x^2, 2x, 5}$$

وتكون درجة هذا كثير الحدود هي **3** لأن أعلى قوة للمتغير x هي 3.

تُعد درجة كثير الحدود من الخصائص المهمة التي تحدد طبيعة الدالة وسلوكها، حيث إن شكل منحنى كثير الحدود يتغير تبعاً لقيمة الدرجة والمعاملات المرتبطة بها. فمثلاً كثير الحدود من الدرجة الأولى يمثل خطاً مستقيماً، بينما كثير الحدود من الدرجة الثانية يمثل منحنىً قطعياً(Parabola) ، أما كثيرات الحدود من الدرجات الأعلى فتكون منحنياتها أكثر تعقيداً.

ومن الخصائص المهمة لكثيرات الحدود أنها تمثل دوالاً مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية، كما أنها قابلة للاشتقاق عدد غير محدود من المرات. وهذا يعني أن كثيرات الحدود تمتلك خصائص تحليلية مهمة تجعلها مناسبة للاستخدام في العديد من التطبيقات الرياضية والعلمية.

كما تتميز كثيرات الحدود بسهولة إجراء العمليات الرياضية المختلفة عليها، مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة، إضافة إلى إمكانية اشتقاقها وتكاملها بسهولة مقارنة بالعديد من الدوال الأخرى مثل الدوال الأسية أو اللوغاريتمية أو المثلثية.

ولهذه الأسباب أصبحت كثيرات الحدود من الأدوات الأساسية المستخدمة في العديد من المجالات مثل التحليل العددي والفيزياء الرياضية والهندسة والإحصاء وعلوم الحاسوب .كما تُستخدم كثيرات الحدود في بناء النماذج الرياضية التي تمثل العديد من الظواهر الطبيعية المختلفة.

ومن التطبيقات المهمة لكثيرات الحدود استخدامها في تقريب الدوال .(Function Approximation) ففي كثير من الحالات تكون الدوال التي تظهر في التطبيقات العلمية معقدة أو يصعب التعامل معها بشكل مباشر، ولذلك يتم استخدام كثيرات الحدود لتمثيل هذه الدوال بصورة تقريبية.

ويُعد تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود من الطرق المهمة في التحليل العددي، حيث يتم اختيار كثير حدود مناسب يمكنه تمثيل الدالة الأصلية بدرجة جيدة من الدقة على فترة معينة. ومن بين الطرق المستخدمة في هذا المجال طريقة المربعات الصغرى(Least Squares Method) ، والتي تهدف إلى إيجاد أفضل تقريب ممكن للدالة باستخدام كثير الحدود بحيث يكون الخطأ الناتج عن التقريب أقل ما يمكن.

ومن هنا تظهر أهمية كثيرات الحدود في موضوع البحث، حيث يتم استخدام كثيرات الحدود المتعامدة في عمليات التقريب الرياضي لما تمتلكه من خصائص رياضية تساعد في تبسيط العمليات الحسابية المرتبطة بإيجاد معاملات التقريب.

إن دراسة كثيرات الحدود وخصائصها المختلفة تُعد خطوة أساسية لفهم العديد من المفاهيم المتقدمة في الرياضيات التطبيقية، كما أنها تمثل الأساس الذي تقوم عليه العديد من الطرق العددية المستخدمة في حل المسائل الرياضية المعقدة.

وبناءً على ذلك يمكن القول إن كثيرات الحدود تمثل أداة رياضية مهمة تُستخدم في تمثيل الدوال المختلفة، وفي دراسة خصائصها، وفي تقريبها باستخدام طرق مختلفة مثل طريقة المربعات الصغرى، والتي سيتم التطرق إليها بشكل مفصل في الفصول اللاحقة من هذا البحث.

1.2 أنواع كثيرات الحدود (Types of Polynomials)

يمكن تصنيف كثيرات الحدود إلى عدة أنواع مختلفة اعتماداً على مجموعة من المعايير الرياضية، ومن أهم هذه المعايير **درجة كثير الحدود** وعدد الحدود التي يتكون منها. ويُعد هذا التصنيف مهماً في دراسة خصائص كثيرات الحدود وفهم طبيعة سلوكها عند استخدامها في تمثيل الدوال أو تقريبها.

إن معرفة أنواع كثيرات الحدود تساعد الباحثين والدارسين في اختيار النوع المناسب من كثيرات الحدود عند استخدامه في التطبيقات الرياضية المختلفة مثل التقريب الرياضي أو حل المعادلات أو تحليل البيانات.

وبشكل عام يمكن تقسيم كثيرات الحدود إلى نوعين رئيسيين هما:

التصنيف حسب درجة كثير الحدود.

التصنيف حسب عدد الحدود.

وسيتم توضيح كل نوع من هذه الأنواع بشيء من التفصيل فيما يأتي.

أولاً: التصنيف حسب درجة كثير الحدود

يعتمد هذا التصنيف على أعلى قوة يظهر بها المتغير في كثير الحدود، حيث تُسمى درجة كثير الحدود وفقاً لهذه القوة. وتُعد درجة كثير الحدود من الخصائص المهمة التي تحدد طبيعة الدالة وسلوكها البياني.

1 - كثير الحدود الثابت (Constant Polynomial)

يُعد كثير الحدود الثابت أبسط أنواع كثيرات الحدود، حيث يتكون من عدد ثابت فقط دون وجود متغير.

والصيغة العامة له تكون على الشكل التالي:

$$P(x) = c$$

حيث أن: c يمثل عدداً ثابتاً.

مثال:

$$P(x) = 8$$

يمثل هذا التعبير كثير حدود ثابت، ودرجته تساوي صفر.

2- كثير الحدود الخطي (Linear Polynomial)

كثير الحدود الخطي هو كثير الحدود الذي تكون أعلى قوة للمتغير فيه هي 1.

ويكون الشكل العام لكثير الحدود الخطي كما يأتي:

$$P(x)=ax + b$$

حيث أن: a, b يمثلان ثوابت حقيقية.

وشرط أن يكون $a\neq0$ حتى تبقى الدرجة الأولى موجودة.

مثال:

$$P(x)=3x+2$$

يمثل هذا النوع من كثيرات الحدود خطاً مستقيماً عند تمثيله بيانياً في المستوى الإحداثي

3 ـ كثير الحدود التربيعي (Quadratic Polynomial)

هو كثير الحدود الذي تكون أعلى قوة للمتغير فيه هي 2

ويأخذ الشكل العام الآتي:

$$P(x)=aX^2+bx + c$$

حيث ان: a, b, c تمثل معاملات ثابتة.

وشرط أن يكون:

$A \neq 0$

حتى تبقى الدرجة الثانية موجودة.

مثال : $P(x)= x^2+4x^2+1$

ويمثل هذا النوع من كثيرات الحدود **منحنى قطع مكافئ (Parabola)** عند تمثيله بيانياً.

4. - كثير الحدود التكعيبي(Cubic Polynomial)

هو كثير الحدود الذي تكون أعلى قوة للمتغير فيه هي 3

و الصيغة العامة له هي:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

حيث أن: a, b, c, d معاملات ثابتة

وشرط أن يكون:

$A \neq 0$

مثال:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

ويمثل هذا النوع من كثيرات الحدود منحنى أكثر تعقيداً من المنحنى التربيعي.

5 -كثيرات الحدود ذات الدرجات العليا(Higher Degree Polynomials)

إذا كانت درجة كثير الحدود أكبر من 3، فإنه يُسمى كثير حدود من الدرجة العليا.

ومن الأمثلة على ذلك:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 5$$

ومع زيادة درجة كثير الحدود يزداد تعقيد شكل المنحنى الناتج عنه.

ثانياً: التصنيف حسب عدد الحدود

يمكن أيضاً تصنيف كثيرات الحدود اعتماداً على **عدد الحدود التي يتكون منها التعبير الجبري.**

1. أحادي الحد (Monomial)

هو تعبير جبري يتكون من حد واحد فقط.

مثال:

$$5x^3$$

2. ثنائي الحد (Binomial)

هو تعبير جبري يتكون من حدين.

مثال:

$$3x + 4$$

3. ثلاثي الحد (Trinomial)

هو تعبير جبري يتكون من ثلاثة حدود.

مثال:

$$x^2 + 3x + 1$$

أهمية أنواع كثيرات الحدود في التقريب الرياضي

تلعب كثيرات الحدود بمختلف أنواعها دوراً مهماً في العديد من التطبيقات الرياضية، وخاصة في مجال **تقريب الدوال**. ففي كثير من الحالات يتم استخدام كثير حدود من درجة معينة لتمثيل دالة معقدة على فترة محددة.

ويعتمد اختيار درجة كثير الحدود في عملية التقريب على طبيعة الدالة المراد تقريبها ومدى الدقة المطلوبة في عملية التقريب. ففي بعض الحالات يكون كثير الحدود من الدرجة الأولى أو الثانية كافياً للحصول على تقريب جيد، بينما في حالات أخرى قد يكون من الضروري استخدام كثيرات حدود من درجات أعلى.

ومن هنا تظهر أهمية دراسة أنواع كثيرات الحدود وفهم خصائصها المختلفة، حيث تساعد هذه المعرفة في اختيار النوع المناسب من كثيرات الحدود عند استخدامه في عمليات التقريب المختلفة مثل **طريقة المربعات الصغرى** التي سيتم دراستها في الفصل الثاني من هذا البحث.

1.3 كثيرات الحدود المتعامدة(Orthogonal Polynomials)

تُعد كثيرات الحدود المتعامدة من المفاهيم المهمة في مجال الرياضيات التطبيقية والتحليل العددي، حيث تلعب دوراً أساسياً في العديد من التطبيقات العلمية مثل تقريب الدوال، وحل المعادلات التفاضلية، وطرق التكامل العددي، وتحليل الإشارات، بالإضافة إلى استخدامها في العديد من النماذج الرياضية التي تُستخدم في الفيزياء والهندسة.

إن مفهوم التعامد في كثيرات الحدود يشبه إلى حد كبير مفهوم التعامد في المتجهات في الجبر الخطي. ففي الجبر الخطي يقال إن متجهين متعامدان إذا كان حاصل الضرب الداخلي بينهما يساوي صفراً. وبالمثل فإن كثيري حدود يُقال عنهما متعامدان إذا كان التكامل الناتج من ضربهما مع دالة وزن معينة وعلى فترة محددة يساوي صفراً.

وبصورة عامة يمكن تعريف كثيرات الحدود المتعامدة على النحو الآتي:

لتكن لدينا مجموعة من كثيرات الحدود

$$\mathbf{P0(x), P1(x), P2(x), \dots, Pn(x)}$$

فإن هذه كثيرات الحدود تُسمى **متعامدة (Orthogonal)** على الفترة [a,b]بالنسبة لدالة الوزن w(x)إذا تحقق الشرط التالي:

$$\int_{b}^{a} \mathbf{P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0}$$

عندما

$$n \neq m$$

حيث أن:

Pn(x) و Pm(x) يمثلان كثيري حدود من نفس العائلة.

w(x) تمثل **دالة الوزن**.**(Weight Function)**

[a,b] تمثل الفترة التي يتم عليها التكامل.

أما عندما يكون:

$$n = m$$

فإن التكامل لا يساوي صفراً وإنما يعطي قيمة موجبة.

إن خاصية التعامد بين كثيرات الحدود تُعد من الخصائص المهمة التي تساعد في تبسيط العديد من العمليات الحسابية، خاصة في مسائل التقريب الرياضي والتحليل العددي. فعند استخدام كثيرات الحدود المتعامدة في تقريب الدوال يصبح من الممكن حساب معاملات التقريب بطريقة أسهل وأكثر دقة.

ومن الخصائص المهمة لكثيرات الحدود المتعامدة أنها تشكل نظاماً أساسياً (Basis) يمكن استخدامه في تمثيل العديد من الدوال على فترة معينة، حيث يمكن التعبير عن الدالة على شكل مجموع خطي من كثيرات الحدود المتعامدة.

فعلى سبيل المثال يمكن تمثيل دالة معينة بالشكل التالي:

$$\mathbf{f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots}$$

حيث أن:

$$\mathbf{c_0 c_1 c_2 \dots \dots .}$$

تمثل معاملات يتم حسابها باستخدام خصائص التعامد بين كثيرات الحدود.

وتساعد خاصية التعامد في تبسيط عملية حساب هذه المعاملات، حيث يمكن إيجادها باستخدام التكاملات بطريقة مباشرة.

وتكمن أهمية كثيرات الحدود المتعامدة في أنها تساعد على تقليل التعقيد الحسابي للمسائل الرياضية، كما أنها توفر طرقاً فعالة لتمثيل الدوال وتقريبها بدقة عالية.

1.4 أنواع كثيرات الحدود المتعامدة

يوجد العديد من العائلات المعروفة من كثيرات الحدود المتعامدة التي تُستخدم في التطبيقات الرياضية المختلفة. وتختلف هذه العائلات عن بعضها البعض في دالة الوزن والفترة التي يتحقق فيها التعامد.

ومن أهم أنواع كثيرات الحدود المتعامدة ما يأتي:

1.4.1 كثيرات حدود ليجندر(Legendre Polynomials)

تُعد كثيرات حدود ليجاندر من أشهر أنواع كثيرات الحدود المتعامدة، وقد ظهرت في العديد من المسائل الفيزيائية خاصة في مسائل الجهد الكهربي والجاذبية.

تكون هذه كثيرات الحدود متعامدة على الفترة:

$$[-1,1]$$

مع دالة وزن:

$$w(x)=1$$

ومن أمثلة كثيرات حدود ليجاندر:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

تُستخدم كثيرات حدود ليجاندر في العديد من التطبيقات مثل حل المعادلات التفاضلية الجزئية وطرق التكامل العددي.

1.4.2 كثيرات حدود تشبيشيف (Chebyshev Polynomials)

تُعد كثيرات حدود تشيبشيف من كثيرات الحدود المهمة في التحليل العددي والتقريب الرياضي.

وتكون متعامدة على الفترة:

$$[-1,1]$$

مع دالة الوزن:

$$\mathbf{w(x) = \frac{\sqrt{1}}{1 - x^2}}$$

ومن أمثلتها:

$$\mathbf{T0(x) = 1}$$

$$\mathbf{T1(x) = x}$$

$$\mathbf{T_2(x) = 2x^2 - 1}$$

$$\mathbf{T_3(x) = 4x^3 - 3x}$$

تتميز كثيرات حدود تشيبشيف بأنها تقلل من الخطأ في عملية التقريب، ولذلك تُستخدم بشكل واسع في العديد من الطرق العددية.

1.4.3 كثيرات حدود هيرمت(Hermite Polynomials)

تُستخدم كثيرات حدود هيرميت في العديد من التطبيقات الفيزيائية وخاصة في ميكانيكا الكم.

وتكون متعامدة على الفترة:

$$(-\infty, \infty)$$

مع دالة الوزن:

ص$\mathbf{w(x) = e - x^2}$

ومن أمثلتها:

$$H_0(x) = 1$$

$$\mathbf{H_1(x) = 2x}$$

$$\mathbf{H_2(x) = 4x^2 - 2}$$

1.4.4 كثيرات حدود لاغير(Laguerre Polynomials)

تُستخدم كثيرات حدود لاغير في العديد من التطبيقات الفيزيائية مثل دراسة الذرة في ميكانيكا الكم.

وتكون متعامدة على الفترة:

$$[\mathbf{0}, \infty)$$

مع دالة الوزن:

$$\mathbf{w(x) = e^{-x}}$$

ومن الأمثلة عليها :

$$\mathbf{L_0(x) = 1}$$

$$\mathbf{L_1(x) = 1 - x}$$

$$\mathbf{L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)}$$

الفصل الثاني

تقريب الدوال بطريقة المربعات الصغرى باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة

Least Squares Approximation of Functions Using Orthogonal Polynomial Systems

يُستخدم التقريب الرياضي عندما تكون الدوال معقدة أو عند وجود بيانات تجريبية ونريد تمثيلها بدالة بسيطة. وتُعد كثيرات الحدود من أفضل الأدوات المستخدمة في التقريب بسبب سهولة التعامل معها.

ومن أهم طرق التقريب هي **طريقة المربعات الصغرى(Least Squares Method)** ، حيث تعتمد على تقليل مجموع مربعات الأخطاء بين القيم الحقيقية والقيم التقريبية.

كما أن استخدام **كثيرات الحدود المتعامدة** يجعل الحسابات أبسط وأكثر دقة.

2.1 مفهوم التقريب الرياضي

إذا كانت لدينا دالة:

f(x)

نريد إيجاد تقريب لها باستخدام كثير حدود:

$$\mathbf{Pn(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}$$

بحيث:

$$\mathbf{f(x) \approx P_n(x)}$$

والخطأ:

$$\mathbf{E(x) = f(x) - P_n(x)}$$

نهدف إلى جعل هذا الخطأ صغير قدر الإمكان.

2.2 طريقة المربعات الصغرى

لدينا نقاط:

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \ldots, (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$$

نفرض:

$$\mathbf{y = a_0 + a_1 x}$$

الخطأ:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_i)$$

نقلل:

$$\mathbf{S} = \sum (\mathbf{y}_i - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_i))^2$$

نشتق:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_0} = \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_1} = \mathbf{0}$$

نحصل على:

$$\sum \mathbf{y}_\mathrm{i} = \mathbf{n a}_0 + \mathbf{a}_1 \sum \mathbf{x}_\mathrm{i}$$

$$\sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i = \mathbf{a}_0 \sum \mathbf{x}_i + \mathbf{a}_i \sum \mathbf{x}_i^2$$

2.3.1 مثال

النقاط:

$$(1,2), \quad (2,3), \quad (3,5)$$

نحسب:

$$\sum x = 6 \quad , \sum y = 10$$

$$\sum x^2 = 14 \quad , \sum xy = 23$$

نعوض:

$$10 = 3a_0 + 6a_1$$

$$23 = 6a_0 + 14a_1$$

الحل :

$$a_1 = 1.5 \quad , \quad a_0 = \frac{1}{3}$$

النتيجة :

$$y = \frac{1}{3} + 1.5x$$

2.3 التقريب باستخدام كثيرات الحدود

نأخذ:

$$\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2}$$

ونقلل:

$$\mathbf{S = \sum (y_i - P(x_i))^2}$$

2.3.1 مثال

النقاط :

$$\mathbf{(1,1) \quad , \qquad (2,4) \quad , \qquad (3,9)}$$

هذه تمثل :

$$\mathbf{y = x^2}$$

إذن :

$$\mathbf{P(x) = x^2}$$

تقريب تام .

2.4 استخدام كثيرات الحدود المتعامدة

نكتب:

$$\mathbf{f(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)}$$

المعاملات:

$$c_k = \frac{\int f(x)p_k(x)w(x)dx}{\int p_k^2(x)w(x)\,dx}$$

الميزة:

ما نحل نظام معادلات

كل معامل يُحسب وحده

مثال 2.4.1

نقرب:

$$\mathbf{f(x) = x^2}$$

نعلم:

$$\mathbf{P_0 = 1, \qquad P_1 = x, \qquad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)}$$

نحسب:

$$\mathbf{c_0 = \frac{1}{3}\ , \qquad c_1 = 0\ , \qquad c_2 = \frac{2}{3}}$$

النتيجة:

$$\mathbf{x_2 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2}$$

مثال 2.4.2

تقريب:

$$\mathbf{f(x) = x}$$

نستخدم:

$$\mathbf{P1 = x}$$

إذن:

$$\mathbf{f(x) = P_1(x)}$$

تقريب تام بدون خطأ.

2.4.3 مثال

النقاط:

$$(0,1) \quad , \qquad (1,2) \quad , \qquad (2,5)$$

نحسب:

$$\sum x = 3 , \sum y = 8$$

$$\sum x^2 = 5 \quad , \qquad \sum xy = 12$$

الحل:

$$a_1 = 2 \ , \qquad a_0 = \frac{2}{3}$$

النتيجة:

$$y = \frac{2}{3} + 2x$$

3.4الخلاصة

تم في هذا الفصل دراسة مفهوم التقريب الرياضي وبيان أهميته في تمثيل الدوال والبيانات. كما تم شرح طريقة المربعات الصغرى التي تعتمد على تقليل مجموع مربعات الأخطاء للحصول على أفضل تقريب ممكن. وتم توضيح كيفية استخدام كثيرات الحدود في عملية التقريب من خلال أمثلة تطبيقية. كذلك تم بيان دور كثيرات الحدود المتعامدة في تبسيط الحسابات وتقليل التعقيد الرياضي. وأخيراً تم التوصل إلى أن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة مع طريقة المربعات الصغرى يعطي نتائج أكثر دقة واستقراراً.

الاستنتاجات(Conclusions)

من خلال الدراسة التي تم عرضها في هذا البحث، والتي تناولت موضوع كثيرات الحدود المتعامدة وعلاقتها بطريقة المربعات الصغرى في التقريب الرياضي، تم التوصل إلى مجموعة من الاستنتاجات المهمة التي تعكس أهمية هذا الموضوع في الرياضيات التطبيقية والتحليل العددي.

أولاً، تبين أن كثيرات الحدود تُعد من الأدوات الأساسية والفعالة في تمثيل الدوال وتقريبها، وذلك بسبب بساطة تركيبها الرياضي وسهولة التعامل معها في العمليات الحسابية المختلفة. كما أن استخدامها في التقريب يوفر وسيلة عملية للتعامل مع الدوال المعقدة التي يصعب التعبير عنها بشكل دقيق.

ثانياً، أظهرت طريقة المربعات الصغرى كفاءة عالية في إيجاد أفضل تقريب ممكن للدوال أو البيانات، حيث تعتمد هذه الطريقة على تقليل مجموع مربعات الأخطاء، مما يؤدي إلى الحصول على نتائج دقيقة نسبياً مقارنة بالطرق الأخرى. كما تبين أن هذه الطريقة تُستخدم بشكل واسع في العديد من المجالات مثل الإحصاء وتحليل البيانات والهندسة.

ثالثاً، من أهم النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث هي أن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة في عملية التقريب يؤدي إلى تبسيط كبير في العمليات الحسابية. إذ إن خاصية التعامد تسمح بحساب معاملات التقريب

بشكل مستقل، دون الحاجة إلى حل أنظمة معادلات معقدة، وهذا بدوره يقلل من الجهد الحسابي ويزيد من كفاءة الحل.

رابعاً، أظهرت الأمثلة التطبيقية التي تم عرضها في الفصل الثاني أن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة، مثل كثيرات حدود ليجاندر، يوفر تمثيلاً دقيقاً للدوال، كما يساعد في تحسين استقرار النتائج العددية وتقليل الأخطاء الناتجة عن العمليات الحسابية.

خامساً، تبين أن الجمع بين طريقة المربعات الصغرى وكثيرات الحدود المتعامدة يُعد من الأساليب القوية في التقريب الرياضي، حيث يوفر هذا الدمج طريقة منظمة ودقيقة لتمثيل الدوال والبيانات، مع تقليل التعقيد الحسابي وتحسين جودة النتائج.

وأخيراً، يمكن القول إن هذا البحث قد ساهم في توضيح الدور المهم الذي تلعبه كثيرات الحدود المتعامدة في تحسين عمليات التقريب، مما يجعلها من الأدوات الأساسية التي يجب الاعتماد عليها في العديد من التطبيقات الرياضية والعلمية.

التوصيات(Recommendations)

في ضوء النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث، يمكن تقديم مجموعة من التوصيات التي يمكن أن تسهم في تطوير هذا المجال والاستفادة منه في التطبيقات العلمية المختلفة.

أولاً، يُوصى بالاهتمام بدراسة كثيرات الحدود المتعامدة بشكل أوسع ضمن المناهج الدراسية في كليات العلوم والهندسة، لما لها من أهمية كبيرة في التحليل العددي والتطبيقات الرياضية المختلفة.

ثانياً، يُنصح باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة بشكل أكبر في مسائل التقريب، خاصة عند التعامل مع البيانات الكبيرة أو الدوال المعقدة، وذلك لما توفره من تبسيط في العمليات الحسابية وتحسين في دقة النتائج.

ثالثاً، يمكن توسيع هذا البحث من خلال دراسة أنواع أخرى من كثيرات الحدود المتعامدة، مثل كثيرات حدود هيرميت ولاغير، وبيان تطبيقاتها في مجالات مختلفة مثل الفيزياء وميكانيكا الكم.

رابعاً، يُوصى بإجراء دراسات تطبيقية باستخدام برامج الحاسوب مثل MATLAB أو Python لتطبيق طريقة المربعات الصغرى باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة، مما يساعد في فهم الجانب العملي بشكل أفضل.

خامساً، يمكن مستقبلاً دراسة العلاقة بين كثيرات الحدود المتعامدة وطرق التقريب الأخرى، مثل التقريب باستخدام السلاسل (Series Approximation) أو الشبكات العصبية، وذلك بهدف مقارنة الأداء والدقة بين هذه الطرق.

سادساً، يُنصح الباحثون بالتركيز على التطبيقات العملية لهذا الموضوع في مجالات مثل تحليل البيانات، والذكاء الاصطناعي، ومعالجة الإشارات، حيث يمكن أن تسهم هذه المفاهيم في تطوير حلول أكثر دقة وكفاءة.

وأخيراً، يمكن اعتبار هذا البحث نقطة انطلاق لدراسات مستقبلية أكثر عمقاً في مجال التقريب الرياضي، خاصة في ظل التطور الكبير في التقنيات العددية واستخدام الحاسوب في حل المسائل الرياضية المعقدة.

المصادر (References)

عبد الله، م. ح. (٢٠١٨). التقريب باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة وتطبيقاتها العددية .رسالة ماجستير، جامعة بغداد، كلية العلوم .

السامرائي، س. ع. (٢٠١٧). استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقريب الدوال وتحليل البيانات .رسالة ماجستير، الجامعة المستنصرية، كلية العلوم .

الخفاجي، ع. ح. (٢٠١٩). دراسة كثيرات الحدود المتعامدة وتطبيقاتها في التحليل العددي .أطروحة دكتوراه، جامعة البصرة، كلية العلوم .

الجبوري، ق. م. (٢٠١٦). استخدام الطرق العددية في تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود .رسالة ماجستير، جامعة الموصل، كلية علوم الحاسوب والرياضيات .

عبد الكريم، أ. م. (٢٠٢٠). تطبيق طريقة المربعات الصغرى في حل المسائل العددية .رسالة ماجستير، جامعة الكوفة، كلية العلوم .

عبد الرزاق، م. ع. (٢٠٢١). تحليل واستخدام كثيرات الحدود المتعامدة في التقريب العددي .أطروحة دكتوراه جامعة القادسية، كلية العلوم

٨ - الشويرف، م. ف. أ. (٢٠٢٥). تقريب الدوال باستخدام كثيرات الحدود. رسالة ماجستير، الجامعة الأسمرية الإسلامية، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

٩- الرحبي، ر.، وظاهر، ن. (بدون سنة). التقريبات باستخدام المربعات الصغرى وكثيرات الحدود المتعامدة. ملف محاضرات/ملخص علمي في التحليل العددي.