وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة بابل/ كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

{ عملية بواسون و تطبيقاتها في الحياة }

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة_ قسم الرياضيات

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في علوم الرياضيات

بأشراف

ا.د. كريمة عبد الكاظم مخرب الخفاجي

من قبل الطالبة

زينب علي كاظم

١٤٤٤هـ

٢٠٢٣م

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا ۖ إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة. الآية رقم (٣٢)

الاهــداء

الى من أفضلها على نفسي، و لم لا؛ فلقد ضحت من اجلي و لم تدّخر جهدا في سبيل اسعادي على الدوام

(امي الحبيبة) .

نسير في دروب الحياة ، و يبقى من يسيطر على اذهاننا في كل مسلك نسلكه صاحب الوجه الطيب ، و الافعال الحسنة ، فلم يبخل عليّة طيلة حياته

(والدي العزيز)

الى اصدقائي ، و جميع من وقفوا بجواري و ساعدوني بكل ما يملكون ، و في أصعدة كثيرة

أقدّم لكم هذا البحث و اتمنى ان يحوز على رضاكم .

الشكر و التقدير

الحمد لله الذي وفقني لأعداد هذا البحث و بما أمدني من القوة و العزم و الصبر خلال مدة البحث و الصلاة والسلام على رسول الله (صلى الله عليه و آله و سلم) و أصحابه أجمعين.

الشكر و التقدير الى استاذتي الفاضلة الدكتورة (كريمة عبد الكاظم مخرب الخفاجي) لاقتراحها موضوع البحث متمنية لها دوام الصحة و الموفقية .

و الشكر الى عمادة كلية التربية للعلوم الصرفة و بخاصة رئاسة قسم الرياضيات لما ابدوه لي من مساعدة و عون خلال المسيرة الدراسية .

فهرس الموضوعات

أهداف البحث

١. التعرف على توزيع بواسون و الدالة التوزيعية له و خصائصه و التجربة العشوائية و عملية بواسون و انواعها .

٢. بيان تطبيقات توزيع بواسون اي عملية بواسون مع توسع و عمليات العد و عمليات ماركوف و أمثلة لتطبيقات توزيع بواسون.

الخلاصة

يعرف توزيع بواسون على انه احد التوزيعات المتقطعة المهمة جدا في الكثير من التطبيقات الاحصائية و يسمى في بعض الاحيان توزيع الحوادث النادرة الوقوع كحوادث سقوط الطائرات ، عدد النداءات الهاتفية المستلمة من قبل بدالة هاتف خلال فترة زمنية محددة ، **تهدف هذه الدراسة** التعريف بعملية بواسون و هي عملية عشوائية متصلة تستخدم لنمذجة الاحداث العشوائية التي تحدث في فترة زمنية معينة كبيرة لحد ما مستقلة عن بعضها ، في هذا البحث درسنا توزيع بواسون و الدالة التوزيعية له و خصائصه و التجربة العشوائية و عملية بواسون و انواعها، و كذلك بيان تطبيقات عملية بواسون مع توسع و عمليات العد و عمليات ماركوف و امثلة لتطبيقات توزيع بواسون .

المقدمة

العملية التصادفية أو **العملية العشوائية**،، أو **الاحتمالية**، في نظرية الاحتمالات والمجالات المرتبطة، هي موضوع رياضي يعرف عادةً بوصفه مجموعة من المتغيرات العشوائية . تاريخيًا، ترتبط المتغيرات العشوائية ويُشار إليها بواسطة أرقام محددة، تظهر عادةً بوصفها نقاطًا زمنية، ما يفسر العملية التصادفية المتمثلة بقيم عددية في بعض النظم الاحتمالية المتغيرة بمرور الزمن، مثل النمو البكتيري، وتقلب التيار الكهربي خلال التشويش الحراري، أو حركة جزيئات الغاز. تُستخدم العمليات العشوائية بتوسع بوصفها نماذج رياضية للأنظمة والظواهر التي تظهر تفاوتًا في نمط العشوائية. وفي أنظمة عديدة تتضمن علوم الأحياء والكيمياء وعلوم البيئة والعلوم العصبية والفيزياء والتكنولوجيا، ومجالات الهندسة مثل **المعالجة** التصويرية، ومعالجة الإشارة ونظرية المعلومات و علم الحاسوب و علم التعمية و الاتصالات. أيضًا تطبق العشوائية في الأسواق المالية التي تحفز الاستخدام الواسع للعملية العشوائية في التمويل. ادت تطبيقات الظاهرة ودراستها إلى اقتراح عمليات عشوائية جديدة، مثل عملية فينر والحركة البراونية، التي استخدمها لوي باشوليي لدراسة تغيرات الأسعار في بورصة باريس ، وعملية بواسون، التي استخدمها إي. كي. إيرلنغ لدراسة أرقام الاتصالات الهاتفية التي تحدث في فترة معينة .هاتان العمليتان هما الأهم في نظرية العملية التصادفية، وقد اكتُشفتا مرارًا، قبل وبعد باشيليه وإيرلنغ.

أهمية البحث: تكمن اهمية هذا البحث في انه يقدم عملية بواسون و تطبيقاتها في الحياة كما ان اهميته تنبع من استخدام عملية بواسون و هي عملية عشوائية متصلة و كذلك تطبيقات على هذه العملية مثل عمليات العد مما يساعد المتخصصين في مجال الاحصاء و غيرهم من تحليل بياناتهم بكل يسر وسهولة .

منهجية البحث: تم استخدام المنهج الوصفي المتمثل في وصف بيانات الدراسة باستخدام الرسومات البيانية التي تساعد في التوصل الى الخصائص العامة لبيانات الدراسة ،ايضا تم استخدام المنهج التحليلي الاستنتاجي الذي يتمثل في دراسة امثلة و تطبيقات لعملية بواسون مع التركيز على كيفية تقدير و تفسير معالمه.

أقسام البحث : يتكون هذا البحث من فصلين مقسمة على النحو التالي:

- **الفصل الاول :** يتضمن بعض المفاهيم الاساسية المتعلقة بتوزيع بواسون الاحتمالي ثم عملية بواسون.
- **الفصل الثاني:** يتضمن تطبيقات على عملية بواسون و كذلك امثلة .

الفصـــــل الاول

١. توزيـــــــع بواسون

1.1 تمهيد [1]

تُعَد نظرية العملية التصادفية مساهمةً مهمة في الرياضيات، وتمثل باستمرار موضوعًا فعالًا لبحث الأسباب النظرية والتطبيقات. استنادًا إلى الخصائص الرياضية، تُصنف العملية التصادفية إلى فئات متعددة، تتضمن الاختيار التجريبي والمراهنات وعملية ماركوف وعملية ليفاي والعمليات الغاوسية والمجالات العشوائية وعملية التجديد تستخدم دراسة العملية التصادفية علم الرياضيات وتقنيات من الاحتمالية وحساب التفاضل والتكامل والجبر الخطي ونظرية المجموعات وعلم البدائل.

يعد توزيع بواسون أحد التوزيعات المتقطعة المهمة جدا في الكثير من التطبيقات الاحصائية و يسمى في بعض الاحيان توزيع الحوادث النادرة الوقوع كحوادث سقوط الطائرات ، عدد النداءات الهاتفية المستلمة من قبل بدالة هاتف خلال فترة زمنية محددة ، عدد الوحدات المعيبة في انتاج واسع لمصنع معين و غيرها من الامثلة التي تتصف بطابع الندرة . ان اول من اشتق هذا التوزيع هو العالم الرياضي - الفيزيائي الفرنسي Simeon Denis Poisson (١٧٨١-١٨٤٠) الذي تمكن من اشتقاق هذا التوزيع كحالة تقاربية من توزيع ثنائي الحدين و نشر اشتقاقه هذا عام ١٨٣٧ مطلقا اسمه على هذا التوزيع و فيما يلي تعريف هذا التوزيع .

يقال ان المتغير العشوائي X هو ذو توزيع بواسون اذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية لهذا المتغير تأخذ الشكل التالي :

$$P(X,\lambda)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{X!} \qquad ; X=0,1,2,...$$

$$=0 \qquad \text{Other wise}$$

- e هو رقم أويلر (.. e = 2.71828)

حيث $0 < \lambda$ تمثل معلمة هذا التوزيع . و بالرموز فان $X \sim P(\lambda)$

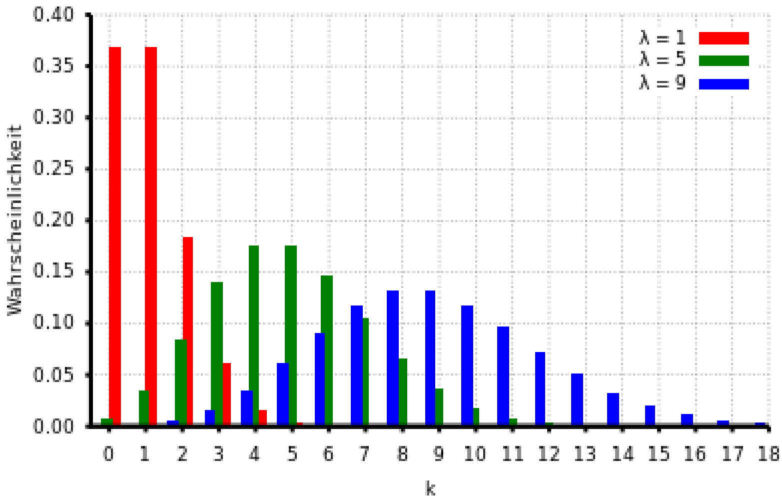
شروط التوزيع:[2]

1. ان تكون التجارب مستقلة.

2. ان يكون الاحتمال ثابتا من محاولة الى اخرى و صغيرا بشكل عام .

3. ان تكون قيم X الممكنة هي : ...... ,i ,...... ,2 , 1 , 0 : x

و هذا التوزيع يصلح بشكل عام للأحداث النادرة الوقوع او للمتغيرات التي تحدث في أزمنة عشوائية معلومة مثلا : عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة زمنية محددة ، عدد الاخطاء المطبعية في صفحة كتاب ما ، عدد السيارات المارة في مكان ما خلال فترة زمنية محددة، عدد الزلازل السنوية ، عدد الحوادث الاسبوعية ، عدد المصابيح التالفة المنتجة خلال فترة زمنية محددة...



(توزيع بواسون)

2.1 الدالة التوزيعية[1]

ان الدالة التوزيعية في توزيع بواسون بشكل عام معطاة وفق الاتي :

$$F(X) = P_r(X \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^x}{K!}$$

علما انه لا يمكن صياغة هذه الدالة بشكل آخر غير الشكل الموضح اعلاه.

3.1 خصائص توزيع بواسون *Properties of Poisson Distribution*

أولا: الوسط و التباين**[1]**

ان الخاصية المميزة لتوزيع بواسون عن بقية التوزيعات المتقطعة الاخرى هي ان متوسط هذا التوزيع مساو لتباينه و يكون مساويا لقيمة المعلمة λ .

$$\mu_x = e^{-\lambda}$$

$$\mu_x = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

فأذن

$$\sigma_x^2 = \lambda$$

و هذا يعني ان

$$\mu_x = \sigma_x^2 = \lambda$$

ثانيا: الدالة المولدة للعزوم**[1]**

يمتلك توزيع بواسون دالة مولدة لعزومه حول نقطة الاصل . هذه الدالة هي :

$$M_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(e^t-1)} \qquad -h < t < h$$

و حسب سلسلة تايلر فان المجموع الاخير متقارب من $e^{\lambda e^t}$. فأذن

$$M_X(t) = e^{-\lambda} . e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

كذلك و وفق نفس الاجراء يمكن بيان ان الدالة المميزة لتوزيع بواسون هي :

$$\emptyset(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \qquad i = \sqrt{-1}$$

ثالثا : **[3] Factorial Moment Generating Function**

$$G(t) = E[t^x] = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \ f(x)$$

$$G(t) = e^{\lambda(1-t)}$$

رابعا: الدالة المميزة لتوزيع بواسون **[3]**

تعرف الدالة المميزة للمتغير العشوائي X بالشكل

$$\varphi_x(t) = E\left[e^{itx}\right]$$

خامسا: منوال توزيع بواسون **[3]**

نلاحظ ان

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\lambda^{x+1} \ e^{-\lambda} \ / \ (x+1)!}{\lambda^x \ e^{-\lambda} \ / \ x!}$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x+1}$$

و على ذلك توجد لدينا ثلاث حالات

أ ـ أذا كان البسط > المقام أي ان

$$
\begin{aligned}
& f(x+1) > f(x) \\
& \lambda > x+1 \\
& \Rightarrow x > \lambda - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ تكون f (x) متزايدة (لها متوال وحيد)

ب ـ اذا كان البسط < المقام أي ان

$$
\begin{aligned}
& \lambda < x+1 \\
& \therefore x > \lambda - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ تكون f (x) دالة متناقصة (لها متوال وحيد)

ج ـ اذا كان البسط = المقام

$$\lambda = x+1 \quad \Rightarrow \quad x = \lambda - 1$$

$$\therefore \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1 \qquad \text{ـ١}$$

$$\therefore f(x+1) = f(x)$$

نعوض عن x من 1

$$
\begin{aligned}
& f(\lambda - 1 + 1) = f(\lambda - 1) \\
& \therefore f(\lambda) = f(\lambda - 1)
\end{aligned}
$$

و يكون هناك منوالان اذا كان $\lambda - 1$ عدد صحيح عند $x = \lambda - 1$, $x = \lambda$

← إما إذا كان $\lambda - 1$ عدد غير صحيح فأن المنوال يكون هو أول عدد صحيح يأتي فورا بعد $\lambda - 1$

4.1 شروط التجربة العشوائية :[4]

١. يمكن للتجربة العشوائية ان تصف جميع النتائج التي من الممكن وقوعها او حدوثها قبل عملية اجراء التجربة او المحاولة.

٢. لا يمكن بالضبط تحديد نتيجة التجربة الا بعد اجراء التجربة او اجراء عملية المحاولة.

عند رمي حجر النرد (dice) مرة واحدة و ملاحظة الوجه الذي سوف يظهر لنا نحن نعرف مسبقا ان الوجه الذي يظهر من رمية واحدة ممكن ان يكون احد الارقام التالية:(1,2,3,4,5,6)

أي بهذه الحالة يمكن تحديد او تشخيص جميع الحالات الممكنة او التي من الممكن ان تظهر لنا احد هذه الارقام و لكننا لا نتمكن من معرفة النتيجة بالضبط او أي من الارقام سوف يظهر على الوجه السطحي او العلوي الا بعد اجراء التجربة بعينها و لذلك سمي هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية.

5.1 عملية بواسون Poisson process [6][7]

في نظرية الاحتمال، **عملية بواسون** بالإنجليزية(Poisson process): هي عملية عشوائية متصلة تستخدم لنمذجة الأحداث العشوائية التي تحدث في فترة زمنية معينة كبيرة لحد ما مستقلة عن بعضها (كلمة الحدث المستخدمة هنا لا يقصد بها مفهوم الحدث المشاع استخدامه في نظرية الاحتمال) الأمثلة المحتملة على هذه الأحداث تشمل المكالمات الهاتفية التي تصل إلى لوحة المفاتيح الهاتفية أو طلبات صفحات الويب على الخادم. سميت باسم عالم الرياضيات الفرنسي سيميون بواسون.(1781–1840)

6.1 أنواع عملية بواسون [6][7]

أولا : عملية بواسون المتجانسة

عملية بواسون المتجانسة توصف بمعدل المعامل λ أيضا تعرف بالكثافة، حيث أن عدد الأحداث في الفترة الزمنية $[t, t + \mathrm{T})$ يتبع توزيع بواسون الذي يرتبط بالمعامل λT وهذه العلاقة تعطى كالآتي : $k = 0,1,2, \ldots.$ $P\left[\left(N\left(t + \mathrm{T}\right) - \mathrm{N(t)}\right) = \mathrm{k}\right] = \frac{e^{-\lambda \mathrm{T}}(\lambda \mathrm{T})^{k}}{k!}$

حيث أن $N(t + \mathrm{T}) - N(t)$ يصف ويمثل عدد الأحداث في الفترة الزمنية.$[t, t + \mathrm{T})$

حيث أن عملية بواسون تتصف بالمتغير العشوائي بواسطة عددية المعامل λ فإن عملية بواسون المتجانسة تتصف بمعدل المعامل λ وهو العدد المتوقع من «الأحداث» أو «الوافدين» التي تحدث لك لوحدة من وحدات الزمن $N(t)$.هي نموذج من عملية بواسون المتجانسة، وينبغي عدم الخلط بينها و بين الكثافة أو دالة التوزيع.

ثانيا : عملية بواسون غير المتجانسة

أيضاً تُعرف باللامتجانسة. عموماً معدل المعامل قد يتغير مع الوقت. في هذه الحالة دالة معدل العمومية تعطى بـ $\lambda(t)$ العدد المتوقع من الاحداث بين الوقت a و الوقت b هو

$$\lambda_{a,b} = \int_a^b \lambda(t)\, dt$$

هكذا عدد الوصول في الفترة الزمنية $[a, b]$ تعطى بـ $(N(b) - N(a))$يتبعها توزيع بواسون المرتبط بالمعامل $\lambda_{a,b}$

$$[(N(b) - \mathrm{N(a)}) = \mathrm{k}] = \frac{e^{-\lambda_{a,b}}(\lambda_{a,b})^k}{k!} \qquad k = 0,1,2,\dots.$$

عملية بواسون المتجانسة ممكن أن تنظر على أنها حالة خاصة متى كان $\lambda(t) = \lambda$ معدل ثابت

ثالثا : عملية بواسون المكانية

الاختلاف الأخر لعملية بواسون تسمى عملية بواسون المكانية تقدم اعتماد مكاني على دالة المعدل وتعطى بـ $\Lambda(\overrightarrow{x}, t)$ حيث $\vec{x} \in V$ لبعض فضاء المتجه V مثلاً ($\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$)لأي مجموعة$S \subset V$ (مثل منطقة مكانية) مع مقياس محدود، عدد من الأحداث التي تحدث داخل هذه المنطقة ممكن أن تشكل على أنها عملية بواسون المرتبطة بدالة المعدل $\lambda S(t)$ وهذا:

$$\Lambda_S(t) = \int_S \lambda(\overrightarrow{x}, t) d\vec{x}.$$

في حاله خاصة دالة المعدل العمومية هي داله مفصولة عن الوقت والمكان ونحصل: $\lambda(\overrightarrow{x}, t) = f(\vec{x})\lambda(t)$لبعض الدالة $f(\vec{x})$. من غير فقد للعمومية تكون: $\int_V f(\vec{x})$ ماعدا ذلك نحن قد نقيس $\Lambda(t)$ بشكل ملائم الآن $f(\vec{x})$ تمثل داله كثافة الاحتمال المكاني لهذه الأحداث العشوائية في الحالات التالية. أثر أخذ العينات لعملية بواسون المكانية تكافئ علمية بواسون بدالة المعدل $\lambda(t)$وترتبط مع كل حدث عشوائي موجه مأخوذ دالة كثافة الاحتمال $\vec{X}$ أي نتيجة مماثله ممكن أن ترى لحالة العمومية (الغير مفصولة).

الفصل الثاني

2. تطبيقات على عملية بواسون

1.2 عملية بواسون مع توسع Poisson Process and its extension [8]

1.1.2 عمليات العد Counting Process

١. وصول الزبائن في أي مول (سوق مركزي) إلى كاونتر الدفع (الكاشير).
٢. المكالمات الهاتفية إلى مكتب الحجز لأي مكتب خطوط جوية.
٣. حدوث الحوادث (Events–أي حوادث) خلال فترة من الزمن.
٤. وصول السفن التجارية إلى رصيف التحميل أو التفريغ.
٥. وصول المريض إلى المستشفيات أو العيادات للحصول على خدمة المعاينة الصحية.
٦. وصول المكالمات الهاتفية إلى البدالة (Switchboard).
٧. وصول المركبات إلى محطة تعبئة الوقود للحصول على خدمة التزود بالوقود.
٨. وصول الطائرات إلى سماء المطار لغرض الحصول على خدمة أستخدام المدرج للهبوط أو بالعكس.
٩. وصول الطلبة إلى بوابة الجامعة أو الكلية لغرض الحصول على خدمة الدخول.
١٠. الأفراد الواصلين إلى تسديد فواتير الماء والكهرباء والهاتف الأرضي.
١١. الكتب الرسمية المنتظرة بأخذ دورها بالطباعة على الحاسبة.
١٢. المكائن العاطلة المنتظرة أمام ورشة التصليح لأخذ دورها وأصلاح أعطابها.

- الأمثلة السابقة وغيرها ممكن وصفها بدالة العد (Counting function)

2.2 عمليات ماركوف هي عمليات بواسون وشروطها [8]

The Poisson Process is Markov Process

تعريف: عملية العد $\{N(t),t\geq 0\}$ تكون عملية بواسون Poisson Process وبمعدل $\lambda > 0$ إذا تحققت الشروط من (١)← (٥) الآتية:

١. العملية العشوائية يكون لها زيادات مستقلة (أي الحوادث حدثت أو سوف تحدث في فترات غير متداخلة في الوقت وهي مستقلة بعضها عن البعض الآخر).

٢. الزيادات للعملية تكون مستقرة (ويعني هذا ان التوزيع الأحتمالي لعدد الحوادث في أي فترة زمنية من الفترات الغير متداخلة يعتمد فقط على طول الفترة الزمنية ولا يعتمد على متى تبدأ الفترة).

٣. الأحتمال الدقيق لحادثة واحدة حدثت في أي فترة زمنية بطول h أو Δt يكون كما يلي

$$\begin{aligned} P[N(h)=1] &= P[N(t,t+h)=1] \\ &= \lambda h + O(h) \qquad \dots (3) \end{aligned}$$

٤. الأحتمال لأكثر من حادثة واحدة حدثت في أي فترة زمنية بطول h أو Δt يكون:

$$P[N(h)\geq 2] = P[N(t,t+h)\geq 2] = O(h) \qquad \dots (4)$$

٥. أحتمال عدد الحوادث صفر (أي لم تحدث أي حادثة) في أي فترة زمنية بطول h أو Δt يكون كالآتي

$$\begin{aligned} P[N(t)=0] &= P[N(t,t+h)=0] \\ &= 1-\lambda h + O(h) \qquad \dots (5) \end{aligned}$$

والمعادلة رقم (٥) كانت نتيجة للمعادلتين (٣) و(٤) وكما يلي

$$P[N(h)=0] = 1 - P[N(h)=1] - P[\mathrm{N(h)} \geq 2] = 1-\lambda h - O(h) - O(h)^{**}$$

3.2 أمثلة تطبيقات توزيع بواسون[9]

أ) المسائل التي تحتاج الى الانتظار او المرتبطة بالزمن مثل :

_ عدد حوادث السير في اسبوع بمدينة ما .

_ عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة .

_ عدد المراجعين في احد مراكز الخدمة في اليوم .

_ عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديوتاكسي في الدقيقة .

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ او الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة و منها :

_ عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة .

_ عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران.

_ عدد الاخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها احدى السكرتيرات .

4.2 مثال(1) [10]

اذا كان من المعلوم ان عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا ، اذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة خلال الشهر من هذه السلعة .

المطلوب :

أ ـ ما هو نوع المتغير العشوائي ؟

ب ـ اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير .

ح ـ احسب الاحتمالات التالية :

- احتمال ان الاسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر ؟
- احتمال ان اسرة ما تستهلك وحدة واحدة على الاقل خلال الشهر ؟
- احتمال ان اسرة ما تستهلك 3 وحدات على الاكثر خلال الشهر ؟

خ ـ احسب الوسط الحسابي ، و الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة .

د ـ حدد شكل التوزيع .

الحل :

أـ عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة X متغير كمي منفصل ، و مدى هذا المتغير في هذه الحالة هو : X:{x=0,1,2,3,......}

ب ـ شكل دالة الاحتمال :

بما ان متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة خلال الشهر هو : m=3 ، اذا دالة الاحتمال هي :

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3} 3^x}{x!}\ , \qquad \mathrm{x} = 0,1,2, \dots$$

ح ـ حساب الاحتمالات :

- حساب احتمال ان الاسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر ، $f(2)$

$$f(2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2 \times 1} = 0.22404$$

- احتمال ان اسرة ما تستهلك وحدة واحدة على الاقل خلال الشهر هو:

$$p(X \geq 1) = f(1) + f(2) + \cdots$$

$$= 1 - f(0) = 1 - \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = \frac{0.0498}{1} = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

- احتمال ان اسرة ما تستهلك 3 وحدات على الاكثر خلال الشهر هو :

$$p(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$\frac{e^{-3} 3^3}{3!} + \frac{e^{-3} 3^2}{2!} + \frac{e^{-3} 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} 3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498 \left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1} \right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

خ ـ حساب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة :

- الوسط الحسابي (m) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي :

$$m = 3$$

في هذا التوزيع ، فأن التباين يساوي الوسط الحسابي :

أي ان : $s = m = 3$

و من ثم يكون الانحراف المعياري هو :

$$s = \sqrt{m} = \sqrt{3} = 1.732$$

و يمكن حساب معامل الاختلاف النسبي ، بتطبيق المعادلة :

$$V.C = \frac{s}{m} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

د ـ تحديد شكل التوزيع :

دائما التوزيع البواسوني موجب الالتواء.

5.2 مثال (٢)[8]

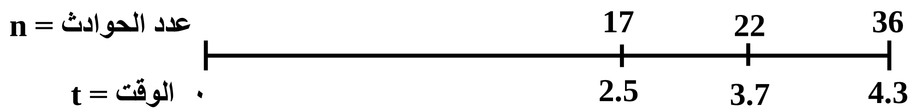
أفترض ان عدد الحوادث **N** تحدث وفقاً لتوزيع بواسون وبمعدل $\lambda = 8$ أحسب الأحتمال الآتي:

سيكون الرمز $N_t = n \quad = N(t) = n$

وكلاهما يرمز إلى عدد الحوادث هو N حدثت *في الفترة* t

$$P\{N_{2.5} = 17 \quad , N_{3.7} = 22 \qquad , N_{4.3} = 36\}$$

يفضل الأستعانة بالشكل الآتي لزيادة فهم السؤال



الحل:

يجب ان نستخرج λt لكل فترة ويجب معرفة عدد الحوادث ويجب أن نتذكر دائماً N(t)-N(s) هو الذي يعطينا عدد الحوادث بين **t,s**.

١) $t_1 \quad \lambda$

$$\lambda t_1 = 2.5 \ * 8 = 20$$

٢) $\mathrm{t_2 - t_1}$

$$\lambda \mathrm{t_2} = 3.7 - 2.5 = 1.2 * 8 = 9.6$$

$$n = 22 - 17 = 5$$

٣)

$$\lambda \mathrm{t_3} = 4.3 - 3.7 = 0.6 * 8 = 4.8$$

$$n = 36 - 22 = 14$$

والآن نبدأ تطبيق قانون بواسون

$$= \frac{e^{-20} \quad 20^{17}}{17} * \frac{e^{-9.6}(9.6)^5}{5!} * \frac{e^{-4.8}\,(4.8)^{14}}{14!}$$

6.2 مثال (3) [5]

ليكن المتغير العشوائي X المنفصل يخضع لتوزيع بواسون و في هذا للتوزيع اذا كان

$P(x = 2) = \frac{2}{3}P(x = 1)$ فأوجد $p(x \geq 3)$

الحل: لأيجاد معلمات التوزيع نستفيد من المساواة المعطاة :

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!} \Longrightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4}\lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{3}\ ,\lambda = 0$$

و عليه فأن الدالة الاحتمالية للتوزيع هي :

$$P(X, \lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{3}}\ \dfrac{(\frac{4}{3})^X}{X!} & ,X = 0,1,2, \dots .. \\ 0 \end{cases}$$

و يكون الاحتمال المطلوب .

$$p(x \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2) = 1 - \sum_{X=0}^{2} e^{-\frac{4}{3}} \frac{(\frac{4}{3})^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}!}$$

المصادر : References

1. هرمز، أمير حنا (1990) ،الاحصاء الرياضي ، دار الكتاب للطباعة و النشر.

2. اديب ، مبارك اسبر(2008-2009)، مبادئ في الاحتمالات و الاحصاء ، جامعة تشرين - سوريا.

3.ابو بكر، غريبة محمد(2019)، مشروع بحث مقدم لاستكمال متطلبات الحصول على درجة البكالوريوس بعنوان انحدار بواسون مع تطبيق عملي باستخدام برنامج R، قسم الاحصاء، كلية العلوم، جامعة سبها.

4 . زراك ،غازي عطية (2015)،مبادئ علم الاحصاء التطبيقي لغير الاختصاص ، دار الكتب و الوثائق ببغداد.

5. صبري ،عزام عبد الرحمن (2015)، الاحصاء التطبيقي بنظام SPSS، الدار المنهجية للنشر والتوزيع _عمان

6.Sung Nok Chiu؛ Dietrich Stoyan؛ Wilfrid S. Kendall؛ Joseph Mecke (27 يونيو ٢٠١٣& John wiley)

7. Roy L. Streit (15 سبتمبر ٢٠١٠). Springer Science & Business Media.

8.Lecturenotes/محاضرات/uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/10/10_2018_07_10!11_50_39_PM.docx

9. خواجة، خالد زهدي (2017)،أساسيات الاحتمالات ، المعهد العربي للتدريب و البحوث الاحصائية، بغداد.

10. خليل ،شرف الدين (2012)،الاحصاء الوصفي ،مكتبة شبكة الابحاث و الدراسات الاقتصادية.