جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

التحويلات التكاملية لابلاس وفورير

بحث تقدم به الطالبة

دعاء صباح كاظم

كأحد متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة – جامعة بابل

إشراف الدكتورة :سحر محسن

1444هـ   2023م

بِسْمِ اللَّـهِ الرَّحْمَـنِ الرَّحِيمِ

(وَيَسْئَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ

إِلَّا قَلِيلًا)

صدق الله العلي العظيم

سورة الاسراء (85)

الاهداء

نهدي ثمرة هذا البحث الى من بلغ الرسالة وادى الامانة ونصح الامة . .

الى النبي الهاشمي نبي الرحمة محمد (صلى الله عليه وسلم) . .

والى من كلله الله بالهيبة والوقار والى من علمني العطاء دون انتظار الى من احمل اسمه بكل افتخار الى قدوتي في الحياة الى من ارجوا من الله ان يطيل في عمره ليرى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار الى من ستبقى نصائحه وكلماته كالنجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد والى الابد (والدي الحبيب) .

الى من ضحت وربت وسهرت الليالي الى من افضلها على نفسي والى بسمتي في الحياة الى من لم اجد كلاماً يعبر عنها ويفي بوصفها الى من كان دعائها ولازال يرافقني هو السر في نجاحي (والدتي الحبيبة) اسال الله ان يطيل في عمرك ويديمك لنا .

الى من هم السند والعضد والقلوب الطاهرة والنقية الرقيقة الى النفوس البريئة الى رياحين حياتي (اخوتي وخواتي) الاعزاء .

الى الحبيب والشمعة التي دائماً تنطفئ لأضيء انا الى صاحب القلب الطيب الى من كان ولازال سنداً لي الحبيب(زوجي) اسال الله ان يحفظك وان يوفقك اينما تكون .

الى كل من وقف على منابر العلم واعطى حصيلة فكره لينير طريقنا (الاساتذة الكرام) كما نهدي

الشكر والتقدير

نشكر الله العلي القدير الذي انعم علينا بنعمة العقل والدين ونثني ثناء حسن ووفاء وتقدير واعترافاً منا بالجميل نتقدم بجزيل الشكر لأولئك المخلصين الذين لم يدخروا جهداً في مجال البحث اساتذتنا الكرام كل التبجيل والتوقير لكم يا من صنعتم المجد بفضلكم فهمنا معنى الحياة حيث استقينا منكم العلوم والمعارف والتجارب بفضلكم عرفنا البحث ع الجوهر والمضمون بفضلكم وجدن لما مكانة في الحياة فأنتم لم تعلمونا حرفاً واحداً بل بجهودكم تعلمنا الحياة ولابد لنا ونحن نخطو خطوتنا الاخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود فيها الى اعوام قضيناها في رحاب الجامعية مع اساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك مجوداً كبيراً في بناء جيل الغد وقبل ان نمضي لا يسعنا سوى ان نتقدم بأسمى الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة في الحياة الى الذين مهدوا طريق العلم والمعرفة .

ونخص بالشكر والتقدير مشرف البحث الاستاذه سحر محسن لجهوده المبذولة معنا وكذلك نخص بالشكر رئاسة جامعة بابل والسيد عميد كلية التربية للعلوم الصرفة الدكتور ورئاسة قسم الرياضيات .

الفهرس

الخلاصة

ان استخدام تحويلات لابلاس لحل بعض مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية موضوع هام لا يقل أهمية عن باقي الموضوعات المرتبطة بعلم الرياضيات كونه تخصص بالمسائل التي تم حلها بواسطة تحويل لابلاس حيث وجدنا فرقاً واضحاً في سهولة الحل بواسطة تحويل لابلاس خصوصاً في المشتقات العليا لأننا في طريقة تحويل لابلاس توصلنا الى إمكانية حل مسائل القيم الحدية في خطوة واحدة ، وكذلك استنتجنا أن تحويل لابلاس يساعد في تحويل المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة إلى معادلة جبرية .

وهذا لا يعني ان استخدام الطرق العادية ليست ذات فائدة لكن من اجل الوصول الى الحل بطريقة أسهل واسرع بالإضافة الى العمليات الذهنية المجهدة وكما نعلم تماماً ان علم الرياضيات علم تراكمي يعتمد على ما تم الوصول اليه مسبقاً فلولا التوصل الى الطريقة العادية ما كان لنا ان نصل الى طرق أخرى مثل تحويل لابلاس وغيرها من الطرق ، اترك موضوع تطوير البحث والتوصل الى طرق اسهل واقصر في مجال لابلاس للأجيال القادمة ان شاء الله

هناك العديد من الطرائق التي يمكن استخدامها في دراسة السلاسل الزمنية الموسمية , وطريقة فورير واحدة من هذه الطرائق التي تتعامل مع بيانات السلسلة الزمنية كسلوك جيبي باستخدام الدوال المثلثية . في هذا الفصل سنتناول تحويل فورير وفي المعادلات التفاضليةّ الجزئيةّ ويقصد بتحويل فورير هو عملية رياضية تستخدم لتحويل دالّة رياضية بمتغير حقيقي وذات قيم مركّبة إلى دالّة أخرى من نفس الطراز. وكثيرًا ما يطلق على هذه الدالة الجديدة لقب التمثيل في نطاق التّردّد للدالة الأصلية.

الفصل الأول

لاباس

المقدمة

عند حل الكثير من المسائل الهندسية التطبيقية أحيانا ماتظهر بعض انواع من المسائل الحدية او الابتدائية تختلف فيها المعادلات التفاضلية عن الطرق العادية فمثلا تظهر بعض المعادلات التفاضلية التي يكون فيها الحد الغير متجانس G(t). على شكل نبضات او في شكل دوال متصلة على فترات وهو الامر الذي لايمكن مع استخدام الطرق العادية لحل هذه الانواع من المسائل وبالتالي علينا ان نبحث عن طرق واساليب رياضية اخرى للتعامل مع هذه المعادلات واحدى هذه الطرق هي تحويل لابلاس سمي بهذا الاسم نسبة الى العالم الفرنسي بيير سيمون لابلاس (1749– 1827) حيث ان الفائدة العظمى لهذا التحويل تكمن في قدرته على حل المسائل الحدية أو الابتدائية المرتبطة باي نوع من المعادلات التفاضلية والتي يتم تحويلها من معادلات تفاضلية اعتيادية الى معادلات جبرية بتأثير استخدام تحويل لابلاس والتي يكون فيها المجهول هو تحويل لابلاس وهو ممسكا بحل المعادلة تحت قبضته وتأثيره وبحل هذه المعادلة الجبرية يمكن ان نحصل على تحويل لابلاس لتلك المعادلة ومن ثم نستخدم معكوس تحويل لابلاس فنتمكن من تحرير الحل من قبضة تحويل لابلاس وبذلك نحصل على حل المعادلة التفاضلية الاصلية وذلك باستخدام تحويل لابلاس اولا ومن ثم استخدام معكوس تحويل لابلاس مرة اخرى . حيث أتممنا بحثنا في فصلين تناولنا في الفصل الاول العديد من المواضيع ومنها تعريف تحويل لابلاس وخواصه مع برهانها وكذلك تناولنا تعريف معكوس تحويل لابلاس وخاصيته الخطية.وتعرفنا على الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس . كما تناولنا بعض النضريات عن تحويل لابلاس مع اثباتها وايضا قمنا بحل بعض الامثله عن تحويلات لابلاس ومعكوساتها مع جدول تحويلات لابلاس لبعض الدوال الهامه وايضا جدول معكوس تحويل لابلاس لبعض الدوال الهامه. اما في الفصل الثاني فلقد تناولنا استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وذكرنا في هذا الفصل تحويل لابلاس للمشتقات من الدرجة الاولى المشتقات النونية من الدرجة (n) . وبينا خطوات حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية باستخدام تحويل لابلاس كما تناولنا بعض الامثلة وحلها باستخدام تحويل لابلاس وكذلك حلها بالطرق العادية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية [1]

المفاهيم الأساسية

(1-1) بعض التعاريف والنظريات عن تحويل لابلاس)[2]

تعريف (1-1) : تحويل لابلاس : هو مؤثر تكاملي خطي يعمل على تحويل الدالة f(t) بحيث ان $t > 0$ الى $f(p)$ والذي يرمز له بالرمز $\bar{f}(p)$ بحيث تكون

$\bar{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, .p(t)dt$ بشرط أن يكون هذا التكامل متقارب وp هو أي عدده حقيقي ويمكن استخدام رمز آخر لتحويل لابلاس وهو $\bar{f}(p) = L\{f(t)\}$.

خواص تحويل لابلاس [2]:

$$1- L\{f(t) \mp g(t)\} = L\{f(t)\} \mp L\{g(t)\}$$
$$2- L\{af(t)\} = aL\{f(t)\}$$
$$3- L\{af(t) \mp bg(t)\} = L\{af(t)\} \mp L\{bg(t)\} = aL\{f(t)\} \mp bL\{g(t)\}$$

تعريف (2-1) معكوس تحويل لابلاس : لتكن $f(t)$ حالة بحيث أن $L\{f(t)\} = \bar{f}(p)$ يقال بان $f(t)$ معكوس تحويل لابلاس $\bar{f}(p)$ وتكتب بالصورة $L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(t)$ حيث أن L^{-1} هو مؤثر لتحويل لابلاس يقوم بإعادة تحويل لابلاس إلى الدالة الأصلية .

خواص معكوس لابلاس :

$$1- L\{L^{-1}[\bar{f}(p)]\} = \bar{f}(p)$$
$$2- L^{-1}\{L[f(p)]\} = f(p)$$
$$3- L^{-1}\{a\bar{f}(p)\} = aL^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$
$$4- L^{-1}\{a\bar{f}(P) + \beta\bar{g}(P)\} = aL^{-1}\{\bar{f}(P)\} + \beta L^{-1}\{\bar{g}(P)\}$$

حيث β , α ثوابت :

برهان خواص تحويل لابلاس:

$$1- L\big(a\, f(t)\big) = a\, L\, \big(f(t)\big)$$
$$L\big(a\, f(t)\big) = \int_0^\infty a\, f(t).\, e^{-pt}dt$$
$$= a\, \int_0^\infty f(t).\, e^{-pt}dt = a\, L\, (f\, (t)\,)$$

2- سنبرهن من خاصية التعميم لانها شاملة للخاصيتين

$$L\big(af\,(t) + bg(t)\big) = aL\,\big(f(t)\big) + bL\,(g(t))$$
$$L\big(af(t) \mp bg(t)\big) = \int_0^\infty \big(af\,(t) \mp bg(t)\big).\, e^{-pt}dt$$
$$= a\int_0^\infty f(t).\, e^{-pt}\, dt \mp b\int_0^\infty g(t).\, e^{-pt}.\, dt$$
$$= aL\,\big(f\,(t)\big) \mp bL(g(t))$$

(2−1)الشرط الضروري والكافي لوجود تحويل لابلاس:[3]

إذا كانت الدالة f(t) متصلة على فترات ، أو متقطعة الاتصال على كل فترة محدودة [0 , b]

حيث b> 0 وكان $|f(t)| \leq Ce^{\beta t} \forall t \geq t_o$

حيث t_o , β , C ثوابت فإنه يوجد للدالة f(t) تحويل لابلاس $L\{f(t)\}$ وذلك لكل P>b بكلمات أخرى فإن تحويل لابلاس للدالة f(t) لا يكون تقاربياً إلا تحت الشرط التالي[3]:

$$\lim_{t\to\infty}\left|f(t)e^{-\beta t}\right| = 0$$

(3−1)بعض القواعد او النظريات لتحويل لابلاس[3]

قاعدة (1) : اذا كانت $f(t) = a$ فان $L[f(t)] = \frac{a}{P}$؟

حيث a عدد حقيقي R ∈

البرهان :

$$L[f(t)] = L[f(a)] = \int_0^\infty ae^{-Pt}dt$$
$$= -\frac{a}{P}(e^{-Pt})_0^\infty = -\frac{a}{P}(0-1) = \frac{a}{P}$$

قاعدة (2) إذا كانت $f(t) = e^{at}$ فان $\bar{f}(p) = \frac{1}{p-a}$ for $p > a$

البرهان :

$$\bar{f}(p) = L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at}.e^{-pt}dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(p-a)t}.\ dt = \left[\frac{-1}{p-a}e^{-(p-a)t}\right]_0^\infty = 0-\left(\frac{-1}{p-a}\right); p > a = \frac{1}{p-a}$$

قاعدة (3) إذا كانت [دالة القوى] ؟ $.n = 0,1,2,...$ $f(t) = t^n$ فان $\bar{f}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$

البرهان :

$$\bar{f}(p) = L(t^n) = \int_0^\infty e^{-pt}.t^n.dt$$
$$= \left[-\frac{1}{p}e^{-et}.t^n\right]_0^\infty + \frac{n}{P}\int_0^\infty e^{-Pt}.t^{n-1}dt; P > 0$$
$$= 0 + \frac{n}{P}\int_0^\infty e^{-Pt}.t^{n-1}dt; P > 0$$
$$= \frac{n}{P}L(t^{n-1}) = \frac{n}{P}.\frac{n-1}{P}L(t^{n-2})$$
$$= \frac{n}{P}.\frac{n-1}{P}.\frac{n-2}{P}.L(t^{n-3})$$
$$= \frac{n(n-1)\,(n-2).....}{p^n}.L(1)$$
$$= \frac{n!}{p^n}.\frac{1}{P} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

القاعدة (4) إذا كانت $f(t) = \sin(at)$ فان $\bar{f}(P) = \frac{a}{P^2+a^2}$؟

البرهان :

$$\therefore\ \sin(at)=\frac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)$$

$$\therefore\ L(\sin(at))=L\left[\frac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\right]=\frac{1}{2i}L\left(e^{iat}\right)-\frac{1}{2i}L(e^{-iat})$$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{iat}dt-\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{-iat}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-(P-ia)t}dt-\frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-(P+ia)t}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{P-ia}.e^{-(P-ia)t}\right]_0^\infty-\frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{P+ia}.e^{-(P+ia)t}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{P-ia}(0-1)\right]-\frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{p+ia}(0-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{P-ia}-\frac{1}{P+ia}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{p+ia-P+ia}{(P-ia)(P+ia)}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{2ia}{P^2+a^2}\right]=\frac{a}{P^2+a^2}$$

القاعدة (5) اذا كانت $f(t)=\cos(at)$ فان $L(\cos(at))=\frac{P}{P^2+a^2}$؟

البرهان :

$$\therefore\ \cos(at)=\frac{1}{2}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)$$

$$\therefore\ L(\cos(at))=L\left[\frac{1}{2}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)\right]=\frac{1}{2}L\left(e^{iat}\right)+\frac{1}{2}L\left(e^{-iat}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{iat}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{-iat}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(p-ia)t}dt+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(P+ia)t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-ia}.e^{-(P-ia)t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+ia}.e^{-(P+ia)t}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-ia}(0-1)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+ia}(0-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P-ia}+\frac{1}{P+ia}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{P+ia+P-ia}{(P-ia)(P+ia)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2P}{P^2+a^2}\right]=\frac{P}{P^2+a^2}$$

القاعدة (6) اذا كانت $f(t)=\sinh(at)$ فان $\bar{f}(P)=\frac{a}{P^2-a^2}$؟

البرهان :

$$\therefore\ \sinh(at)=\frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$$

$$\therefore\ L(\sinh(at))=\frac{1}{2}L(e^{at})-\frac{1}{2}L(e^{-at})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{at}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{-at}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(P-a)t}dt-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(P+a)t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-a}e^{-(P-a)t}\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+a}.e^{-(P+a)t}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-a}(0-1)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+a}(0-1)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P-a} - \frac{1}{P+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{P+a-P+a}{(P-a)(P+a)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{p^2-a^2}\right]$$
$$= \frac{a}{P^2-a^2}$$
$$\therefore\ L(\sinh(at)) = \frac{a}{P^2-a^2}$$

القاعدة (7) إذا كانت $f(t) = \cosh(at)$ فان $\bar{f}(P) = \frac{a}{P^2-a^2}$؟

$$\therefore\ \cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$$
$$\therefore\ L(\cosh(at) = \frac{1}{2}\ L(e^{at}) + \frac{1}{2}L(e^{-at})$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{at}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-Pt}.e^{-at}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(P-a)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(P+a)t}dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-a}e^{-(P-a)t}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+a}e^{-(P+a)t}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P-a}(0-1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{P+a}(0-1)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P-a} + \frac{1}{P+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{P+a+P-a}{(P-a)(P+a)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2P}{p^2-a^2}\right]$$
$$= \frac{P}{P^2-a^2}$$
$$\therefore\ L(\cosh(at)) = \frac{P}{P^2-a^2}$$

القاعدة (8) اذا كان $L[f(t)] = \bar{f}(P)$ فان $L\left(e^{at}f(t)\right) = \bar{f}(P-a)$؟

البرهان :

$$L\left(e^{at}f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-pt}.e^{at}f(t)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(P-a)t}.f(t)dt = \bar{f}(P-a)$$

وكذلك إذا كان $L\left(e^{-at}f(t)\right) = \bar{f}(P)$ فان $L\left(f(t)\right) = \bar{f}(P)$

القاعدة (9) $L\left(tf(t)\right) = -\frac{d\bar{f}(P)}{dP} = \frac{dL(f(t))}{dP}$؟

البرهان:

$$\bar{f}(P) = \int_0^\infty e^{-Pt}.f(t)dt$$
$$\frac{d\bar{f}(P)}{dP} = \bar{f}(P) = \int_0^\infty (-t)e^{-Pt}.f(t)dt = -L(tf(t))$$
$$\therefore\ L\left(tf(t)\right) = -\frac{d\bar{f}(P)}{dP}$$

القاعدة (10) $L\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(P)}{dP^n} = (-1)^n \frac{d^n L(f(t))}{dP^n}$

ان برهان هذه العلاقة هو ناتج من n من الاشتقاق بالنسبة الى P بعد تطبيق قانون التكامل [4].

القاعدة(11) تغيير المقاييس // اذا كان $L\left(f(t)\right) = f(P)$ فان $L\left(f(at)\right) = \frac{1}{a} f(\frac{P}{a})$

قاعدة (12) إذا كان $L[f(t)] = f(P)$ فان $L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{f(P)}{P}$

$L\left[\int_0^t \sin(2u)du\right]$?

$\therefore L(\sin 2t) = \frac{2}{P^2+4}$

$\therefore L\left[\int_0^t \sin(2u)du\right] = \frac{2}{\frac{P^2+4}{P}} = \frac{2}{P(P^2+4)}$

قاعدة (13) الدالة الجذرية : $\sqrt{t}$؟

برهن ان اذا كانت $L[f(t)] = \frac{1}{2P}\sqrt{\frac{\pi}{P}}$؟ فإن $f(t) = \sqrt{t}$

$L[f(t)] = L[\sqrt{t}] = \int_0^\infty (t)^{\frac{1}{2}} . e^{-Pt} dt$

باستخدام دالة جاما $\int_0^\infty e^{-\beta t}(t)^{a-1} dt = \frac{\Gamma a}{\beta^a}$

وبالمقارنة بين دالة جاما نجد أن

$\beta = P, a-1 = \frac{1}{2} \to a = \frac{3}{2}, \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-t}(t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma\frac{3}{2}}{P^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{P^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2P} . \sqrt{\frac{\pi}{P}}$

قاعدة (14) مقلوب الدالة الجذرية $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

ولاثبات ان اذا كانت $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ فان $L\left(f(t)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{P}}$؟

$L[f(t)] = L\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^\infty e^{-Pt} \quad .(t)^{-\frac{1}{2}} dt$

حسب قانون دالة جاما فأن $\int_0^\infty e^{-\beta t} . (t)^{a-1} dt = \frac{\Gamma a}{\beta^a}$

وبالمقارنة مع دالة جاما ينتج

$\beta = P, a-1 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \ , \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

$\therefore \ \int_0^\infty e^{-\beta t}(t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{P^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{\pi}{P}}$

قاعدة (15) اذا كانت $f(t) = t^n . e^{at}$ فبرهن ان $[f(t)] = \frac{n!}{(P-a)^{n+1}}$؟

البرهان :

$$[f(t)] = L[t^n . e^{at}] = \int_0^\infty e^{-Pt} . e^{at} . t^n dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(P-a)t} . t^n dt$$

وباستخدام الدوال الخاصة

$$\int_0^\infty e^{-\beta t} (t)^{b-1}\, dt = \frac{\lceil b}{\beta^b}$$

وبالمقارنة بين دالة جاما

$$\beta = P - a \;, b - 1 = n \rightarrow b = n + 1$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-(P-a)} \, . t^n dt = \frac{\lceil b}{\beta^b} = \frac{\lceil(n+1)}{(p-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(P-a)^{n+1}}$$

قاعدة (16) اذا كانت الدالة الاسية مضروبة في دالة مثلثية : $\cos(bt)$

$$f(t) = e^{at} \cos(bt) \quad ? \quad L[f(t)] = \frac{P-a}{(P-a)^2 + b^2}$$

$$L[f(t)] = L[e^{at} \cos(bt)] = (P - a)$$
$$\therefore \; L[e^{at}] = f(P - a)$$
$$\therefore \; L[\cos(bt)] = \frac{P}{P^2 + b^2}$$
$$\therefore \; L[e^{at} \cos(bt)] = f(P - a) = \frac{P-a}{(P-a)^2 + b^2}$$

قاعدة (17) اذا كانت الدالة الأسية مضروبة في دالة مثلثية : $\sin(bt)$

$$f(t) = e^{at} \sin(bt) ? \quad L\big(f(t)\big) = \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$$
$$L[f(t)] = L[e^{at} \sin(bt)]$$
$$\therefore L[e^{at}] = f(P - a)$$
$$\therefore L[\sin(bt)] = \frac{b}{P^2 + b^2}$$
$$\therefore L[e^{at} \sin(bt)] = f(P - a) = \frac{b}{(P-a)^2 + b^2}$$

(1-4)بعض الأمثلة عن تحويلات لابلاس ومعكوسها ؟[4]

(i) $(t + 2)^2$

$$F(P) = L[(t + 2)^2] = L[t^2 + 4t + 4] = L(t)^2 + 4\, L(t) + L(4)$$
$$= \frac{2}{P^3} + \frac{4}{P^2} + \frac{4}{P}$$

(ii) $2\sinh(t)-1$

$$F(P)=L[2\sinh(t)-1]=2L(\sinh(t))-L(1)$$
$$=2\left(\frac{1}{P^2-1}\right)-\frac{1}{P}=\frac{2}{P^2-1}-\frac{1}{P}$$

(i) $L(t\sin 2t)$

$\therefore$ $L[\sin 2t]=\frac{p}{p^2+4}$

$\therefore$ $L[t\sin 2t]=(-1)^n.\frac{d^n}{dP^n}[L(\sin 2t)]$

$\therefore$ $[t\sin 2t]=(-1)^n\frac{d}{dP}\left(\frac{2}{P^2+4}\right)=(-1)\left(\frac{-4P}{(P^2+4)^2}\right)=\frac{4P}{(P^2+4)^2}$

(ii) $L\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)\quad ,t>0$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}(2e^{2t})=2$$

$\therefore$ $L(e^{2t}-1)=L(e^{2t})-L(1)=\frac{1}{P-2}-\frac{1}{P}, P>2$

$\therefore$ $L\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)=\int_P^\infty\left(\frac{1}{P-2}-\frac{1}{P}\right)dP$

$$=(\mathrm{Ln}|P-2|-\mathrm{Ln}|P|)_P^\infty=\left(\mathrm{Ln}|\frac{P-2}{P}|\right)_P^\infty$$
$$=0-\mathrm{Ln}\left|\frac{P-2}{P}\right|=\mathrm{Ln}\left(\left|\frac{P-2}{P}\right|\right)^{-1}=\mathrm{Ln}|\frac{P}{P-2}|$$

$L^{-1}\left[\frac{3P-5}{4P^2+4P+1}\right]$?

$\therefore$ $\frac{3P-5}{4P^2+4P+1}=\frac{3\left(P+\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{2}}{4(P+\frac{1}{2})^2}$

$\therefore$ $L^{-1}\left[\frac{3P-5}{4P^2+4P+1}\right]=\left[\frac{3\left(P+\frac{1}{2}\right)-\frac{13}{2}}{4(P+\frac{1}{2})^2}\right]$

$$=\frac{3}{4}L^{-1}\left(\frac{1}{P+\frac{1}{2}}\right)-\frac{13}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{\left(P+\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$
$$=\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{13}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$$

$L^{-1}\left(\frac{1}{P^2+2P-3}\right)$?

$$L^{-1}\left(\frac{1}{P^2+2P-3}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(P-1)(P-3)}\right)$$
$$=L^{-1}\left(\frac{A}{P-1}+\frac{B}{P+3}\right)$$
$$3A-B=1\ldots\ldots(1)$$

$$A + B = 0 \rightarrow B = -A \ldots\ldots(2)$$

بتعويض (2) في (1) ينتج

$$3A + A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4} \Longrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left(\frac{1}{P^2+2P-3}\right) = L^{-1}\left[\frac{1}{4(P-1)}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{4(P+3)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$L^{-1}\left(\frac{3!}{P^4} + \frac{P}{P^2+9}\right)?$$

$$L^{-1}\left(\frac{3!}{P^4} + \frac{P}{P^2+9}\right) = L^{-1}\left(\frac{3!}{P^4}\right) + L^{-1}\left(\frac{P}{P^2+9}\right)$$

$$= t^3 + \cos 3t$$

$$L^{-1}\left(\frac{a}{P(P+a)}\right)?$$

$$L^{-1}\left(\frac{a}{P(P+a)}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{P+a}\right)$$

$$A(P + a) + BP = a$$

$$Aa = a \rightarrow A = 1 \ldots\ldots(1)$$

$$A + B = 0 \rightarrow B = -A = -1$$

$$\therefore\ L^{-1}\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{P+a}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{P}\right) + L^{-1}\left(\frac{-1}{P+a}\right) = 1 - e^{-at}$$

(5−1)جدول تحويلات لابلاس لبعض الدوال الهامة[4]

في الجدول (1−1) المزيد من تحويلات لابلاس لبعض الدوال الأساسية والمهمة ، حيث يتم إيجاد التحويلات لهذه الدوال عن طريق تطبيق قانون تحويل لابلاس السابق الى جانب الاستفادة من خصائص ونظريات تحويل لابلاس .

الدالة f(t)	تحويل لابلاس الدالة f(P)
$f(t)=a$	$L[f(t)] = \frac{a}{P}, P > 0$
$f(t)=e^{at}$	$L[f(t)] = \frac{a}{P-a}, P > a$
$f(t)=\sin(at)$	$L[f(t)] = \frac{a}{P^2+a^2}$
$f(t)=\cos(at)$	$L[f(t)] = \frac{P}{P^2+a^2}$
$f(t)=t^n$	$L[f(t)] = \frac{n!}{P^{n+1}}, P > 0$
$f(t)=\sinh(at)$	$L[f(t)] = \frac{a}{P^2-a^2}, P > \lvert a\rvert$
$f(t)=\cosh(at)$	$L[f(t)] = \frac{P}{P^2-a^2}, P > \lvert a\rvert$
$f(t)=t^n e^{at}$	$L[f(t)] = \frac{n!}{(P-a)^{n+1}}, n = 1,2,3 \ldots ..$
$f(t))= t\cos(at)$	$L[f(t)] = \frac{P^2-a^2}{(P^2+a^2)^2}$
$f(t)= t\sin(at)$	$L[f(t)] = \frac{2ap}{(P^2+a^2)^2}$
$f(t)=\sqrt{t}$	$L[f(t)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2P\sqrt{P}}$
$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$	$L[f(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{P}}, P > 0$
$f(t)= e^{at}\sin(bt)$	$L[f(t)] = \frac{b}{(P-a)^2+b^2}$
$f(t)= e^{at}\cos(bt)$	$L[f(t)] = \frac{P-a}{(P-a)^2+b^2}$

(6−1)معكوس تحويل لابلاس لبعض الدوال الهامة[5]

الجدول (1−2)

تضمن عدد من تحويلات لابلاس لدوال أساسية ومهمة بحيث تم إيجاد المعكوس لهذه الدوال

تحويل لابلاس الدالة	معكوس تحويل لابلاس الدالة
$L[a]=\frac{a}{P}$	$L^{-1}\left[\frac{a}{P}\right]=a$
$L[e^{at}]=\frac{1}{P-a}$	$L^{-1}\left[\frac{1}{P-a}\right]=e^{at}$
$L[\sin(at)]=\frac{a}{P^2+a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{a}{P^2+a^2}\right]=\sin(at)$
$L[\cos(at)]=\frac{p}{P^2+a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{P}{P^2+a^2}\right]=\cos(at)$
$L[\sinh(at)]=\frac{a}{P^2-a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{a}{p^2-a^2}\right]=\sinh(at)$
$L[\cosh(at)]=\frac{P}{P^2-a^2}$	$L^{-1}\left[\frac{P}{P^2-a^2}\right]=\cosh(at)$
$L[t^n e^{at}]=\frac{1}{(P-a)^{n+1}}, n=1,2,3\ldots$	$L^{-1}\left[\frac{1}{(P-a)^{n+1}}\right]=t^n e^{at}$
$L[t\cos(at)]=\frac{P^2-a^2}{(P^2+a^2)^2}$	$L^{-1}\left[\frac{P^2-a^2}{(P^2+a^2)^2}\right]=t\cos(at)$
$L[t\sin(at)]=\frac{2aP}{(P^2+a^2)^2}$	$L^{-1}\left[\frac{2aP}{(P^2+a^2)^2}\right]=t\sin(at)$
$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}$	$L^{-1}\left[\frac{n!}{p^{n+1}}\right]=t^n$

(1−7)استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية [5]

تحويلات لابلاس للمشتقات :

إن تحويل لابلاس يساعدنا في إيجاد وسائل مفيدة لحل المعادلات التفاضلية ولهذا السبب يكون من اللازم لنا أن نوجد تحويلات لابلاس للمشتقات وذلك من خلال النظريات التالية :

نظرية (1) : نفرض أن $f(t)$ هي المشتقة الأولى للدالة $f(t)$ فيكون لدينا

$$L[f^{/}(t)] = PL[F(t)] - F(0) = Pf(P) - F(0)$$

البرهان :

$$L[F^{/}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-Pt} F^{/}(t)dt$$
$$\text{let}: u = e^{-Pt} \to du = -Pe^{-Pt}dt$$
$$dv = F^{/}(t)dt \to V = F(t)$$
$$L[F^{/}(t)] = (e^{-Pt}F(t))_0^{\infty} + P\int_0^{\infty} e^{-Pt}\, F(t)dt$$
$$L[F^{/}(t)] = \left(\lim_{t\to\infty} e^{-Pt}F(t) - \lim_{t\to 0} e^{-Pt}F(t)\right) + PL(f(t))$$
$$\therefore L[F^{/}(t)] = \left(0 - F(0)\right) + PL(F(t))$$
$$\therefore L[F^{/}(t)] = PL\,(F(t) - F(0)$$

ويمكن تعميم نظرية (1) كما يلي

نظرية (2)// نفرض أن $F^{(n)}(t)$ هي المشتقة النونية للدالة $F^{/}(t)$ فيكون لدينا

$$L[F^{n}(t)] = P^{n}F(P) - P^{n-1}F(0) \dots\dots\dots\dots F^{(n-1)}(0)$$

البرهان // يمكن برهان هذه النظرية باستخدام الاستنتاج الرياضي كما في النظرية السابقة

الان لنفرض أن

$$y = F(t), F(0) = y_0\,, F^{/}(0) = y_1, F^{//}(0) = y_2\,, F^{n}(0) = y_n$$

اي ان

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = t_1, \frac{d^2y^2}{dt^2}\Big|_{t=0} = y\ \ , \dots\dots\dots, \frac{d^ny}{dt^n}\Big|_{t=0} = y_n$$

لنفرض أن

$$\bar{y} = L[F(t)] = f(P)$$
$$\therefore L[y] = \bar{y} \qquad , L[\bar{y}] = P\bar{y} - \ y_0$$
$$L[y^{//}] = \ P^2\bar{y} - Py_0 - y_1$$
$$L[y^{///}] = P^3\bar{y} - P^2y_0 - Py_1 - y_2$$

وهكذا حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية باستخدام تحويل لابلاس :

إن من اهم تطبيقات تحويل لابلاس هو حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والتي تتوفر لها شروط ابتدائية كما تعتبر مسألة حل هذا النوع من المعادلات من المسائل التي تؤول الى حل معادلة جبرية بعد استخدام تحويل لابلاس لها .

- **(8−1)خطوات حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية باستخدام تحويل لابلاس [5]**

1− نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية .

2− نعوض الشروط الحدودية المرافقة للمعادلة لتبسيط المعادلة .

3− نجعل $f(P)$ و $y(P)$ في طرف وباقي الحدود في طرف آخر .

4− نأخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين لايجاد الحل العام بدلالة $y\,,t$.

ملاحظة : يمكن استخدام رموز أخرى بدل الرموز المذكورة .

(9−1)بعض الأمثلة باستخدام تحويل لابلاس وكذلك بالطرق العادية للمعادلات التفاضلية[5]

$$\frac{dy}{dt} + 2y = \mathrm{cost}\,?\; y(0) = 1$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) + L(2y) = L(\mathrm{cost})$$

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2L(y) = L(\mathrm{cost})$$

$$P\bar{y}(P) - y(0) = 2y(P) = \frac{P}{P^2+1}$$

$$\bar{y}(P) = \frac{P}{(P+2)(P^2+1)} + \frac{y(0)}{(P+2)}$$

$$\bar{y}(P) = \frac{P}{(P+2)(P^2+1)} + \frac{1}{(P+2)}$$

$$\bar{y}(P) = \frac{P+P^2+1}{(P+2)(P^2+1)} \Longrightarrow \bar{y}(P) = \frac{A}{P+2} + \frac{Pc+d}{P^2+1}$$

$$(P^2+1)A + Pc(P+2) + (P+2)d = P^2 + P + 1$$

$$AP^2 + A + cP^2 + 2cP + dP + 2d = P^2 + P + 1$$

$$A + C = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2C + d = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots . . (2)$$

$$A + 2d = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

من $(1) \Longrightarrow A = 1 - C$

وبالتعويض في معادلة $(3) \Longleftarrow$ $1 - C + 2d = 1$

$$\Longrightarrow 2d - C = 0 \ldots\ldots\ldots . . (4)$$

نضرب معادلة (4) في (2) ونجمعها مع معادلة (2) نحصل على

$$\begin{array}{c} d+2C=1\ldots\ldots(2) \\ 4d-2C=0\ldots\ldots(4) \\ \hline (2)+(4) \Longrightarrow 5d=1 \Longrightarrow d=\frac{1}{5} \end{array}$$

بالتعويض عن قيمة $d = \frac{1}{5}$ في معادلة (2)

$2C + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow 2C = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow 2C = \frac{4}{5} C = \frac{2}{5}$

وبالتعويض عن قيمة $C = \frac{2}{5}$ في معادلة (1) ينتج

$A + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow A = 1 - \frac{2}{5} \Rightarrow A = \frac{3}{5}$

$\bar{y}(P) = \frac{3}{5(P+2)} + \frac{2P}{5(P^2+1)} + \frac{1}{5(P^2+1)}$

$y(t) = \frac{3}{5} L^{-1}\left(\frac{1}{P+2}\right) + \frac{2}{5} L^{-1}\left(\frac{P}{P^2+1}\right) + \frac{1}{5} L^{-1}\left(\frac{1}{P^2+1}\right)$

$\therefore\ y(t) = \frac{3}{5}\, e^{-2t} + \frac{2}{5} \text{cost} + \frac{1}{5} \text{sint}$

الحل / باستخدام الطرق العادية $\frac{dy}{dt} + 2y = \text{cost}$ حيث $y(o) = 1$ ؟

$\frac{dy}{dt} + 2y = \text{cost}$

$P(t) = 2\,, Q(t) = \text{cost}$

$\int P(t)dt = \int 2dt = 2t$

$I.f = e^{\int P(t)dt} = e^{2t}$

$ye^{2t} = \int (I.f).Q(t)dt$

$ye^{2t} = \int e^{2t}\,\text{cost}\ dt$

since: $I = \int e^{2t}\,\text{cost}\ dt$

let : $u = e^{2t} \rightarrow du = 2e^{2t}dt$

$dv = \text{cost}\ dt \rightarrow v = \text{sint}$

$I = u.v - \int v.du \quad = e^{2t}\text{sint} - 2\int e^{2t}\text{sintdt}$

let: $u = e^{2t} \rightarrow du = 2e^{2t}dt$

$dv = \text{sint}\ dt \rightarrow v = -\text{cost}$

$I = e^{2t}\text{sint} + 2e^{2t}\text{cost} - 4I \Rightarrow 5I = e^{2t}\text{sint} + 2e^{2t}\text{cost} + c$

$I = \frac{e^{2t}\text{sint}}{5} + \frac{2e^{2t}\text{cost}}{5} + c$

$\because ye^{2t} = \int e^{2t}\text{costdt}$

$\therefore ye^{2t} = \frac{e^{2t}\text{sint}}{5} + \frac{2e^{2t}\text{cost}}{5} + c$ بالضرب في e^{-2t} فأن

$y = \frac{\text{sint}}{5} + \frac{2\text{cost}}{5} + e^{-2t}c$

وبالتعويض بالشرط الحدودي $y(0) = 1$ ينتج

$\frac{2}{3} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{5} \Rightarrow C = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} \Rightarrow C = \frac{3}{5}$

وبالتعويض عن قيمة $C = \frac{3}{5}$ في المعادلة فأن

$y = \frac{\text{sint}}{5} + \frac{2\text{cost}}{5} + \frac{3}{5}e^{-2t}$

نلاحظ ان حل المعادلة التفاضلية مشابه تماما للحل بطريقة لابلاس بسبب وحدانية الحل.

$L(y^{//}) + 7L(y^{/}) + 12L(y) = L(0)?$

$P^2\bar{y} - Py(0) - y^{/}(0) + 7(P\bar{y} - y(0)) + 12\bar{y} = 0$

وبتعويض الشروط المعطاة ينتج

$P^2\bar{y} - P + 7P\bar{y} - 7 + 12\bar{y} = 0$

$\bar{y}(P^2 + 7 + 12) = P + 7$

$\bar{y} = \frac{P+7}{P^2+7P+12} \Longrightarrow \bar{y} = \frac{P+7}{(P+3)(P+4)}$

$\bar{y} = \frac{A}{P+3} + \frac{B}{P+4}$

$(P + 4)A + (P + 3)B = P + 7$

$A+B=1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$4A+3B=7 \ldots\ldots\ldots(2)$

$3x(1)-(2) \Longrightarrow -A=-4 \Longrightarrow A=4$

وبالتعويض في (1) $\quad B = 1 - A \Longrightarrow B = 1 - 4 = -3$

$\therefore\ \bar{y} = \frac{4}{P+3} - \frac{3}{P+4}$

$\therefore\ y(t) = L^{-1}\left(\frac{4}{P+3}\right) - L^{-1}\left(\frac{3}{P+4}\right)$

$\therefore\ y(t) = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}$

$\therefore$ الحل باستخدام الطرق العادية (2)

$y(0) = 1 \ = \bar{y}(0) = 0 \qquad \bar{\bar{y}} + 7\bar{y} + 12y = 0$

اكتب المعادلة بصورة المؤثر $\qquad (D^2 + 7D + 12)y = 0$

(المعادلة المميزة) $\qquad (m^2 + 7m + 12) = 0$

$\therefore\ (m + 3)(m + 4) = 0$

$\therefore$ either : $(m + 3) = 0 \Longrightarrow m_1 = -3$

$\therefore$ or: $(m + 4) = 0 \Longrightarrow m_2 = -4$

$\therefore\ y = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$

$\therefore\ y = c_1e^{-3t} + c_2e^{-4t}$

الآن نشتق مرة واحدة $\qquad \therefore\ \bar{y} = -3c_1e^{-3t} - 4c_2e^{-4t}$

وبالتعويض عن الشروط الحدودية لايجاد قيم الثوابت

$\therefore\ y(0) = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore\ \bar{y}(0) = 0 \Longrightarrow -3C_1 - 4C_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

بضرب معادلة (1) في 3 وجمعها مع معادلة (2) ينتج

$\therefore\ \Longrightarrow -C_2 = 3 \Longrightarrow C_2 = -3$

وبالتعويض عن $C_2 = -3$ في معادلة (1) ينتج $C_1 = 4$

$\therefore\ y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t}$

$$\therefore\ y = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}$$

نلاحظ ان حل المعادلة التفاضلية مشابه تماما للحل بطريقة لابلاس بسبب وحدانية الحل.

$$2\frac{dy}{dx} + 3y = e^{4t}\ \ ?\quad y(0) = 5$$

$$L(2\bar{y} + 3y) = L(e^{4t})$$
$$2L(\bar{y}) + 3L(y) = L(e^{4t})$$
$$\therefore\ y_0 = 5$$
$$\therefore\ 2P\bar{y} - 10 + 3\bar{y} = \frac{1}{P-4}$$
$$\therefore\ \bar{y}(2P+3) - 10 = \frac{1}{P-4} \Longrightarrow \bar{y} - \frac{10}{(2P+3)} = \frac{1}{(P-4)(2P+3)}$$
$$\bar{y} = \frac{A}{P-4} + \frac{B}{2P+3} + \frac{10}{2P+3}$$
$$A(2P+3) + B(P-4) = 1$$
$$2A + B = 0 \ldots\ldots(1) \Longrightarrow B = -2A$$
$$3A - 4B = 1 \ldots\ldots..(2)$$

نعوض عن $B = -2A$ في معادلة رقم (2) ينتج $3A + 8A = 1$ مما يؤدي $11A = 1$

ومن هذا ينتج ان $A = \frac{1}{11}$ وبالتعويض في$B=-2A$ $\Longleftarrow$ $B = \frac{-2}{11}$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{1}{11(P-4)} - \frac{2}{11(2P+3)} + \frac{10}{2P+3}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{11(P-4)} - \frac{108}{11(2P+3)}$$
$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{11(P-4)}\right) + L^{-1}\left(\frac{108}{11(2P-4)}\right)$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{11}e^{4t} + \frac{54}{11}e^{-3/2t}$$

الحل // باستخدام الطرق العادية للمعادلات التفاضلية $2\frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$ حيث $y(0) = 5$؟

$$2\frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$$

نكتب المعادلة بصورة المؤثر

$$(2D+3)y = e^{4t}$$

$(2m+3) = 0.$ (المعادلة المميزة)

$2m + 3 = 0 \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

$\because yc = c_1 e^{mt}$

$\therefore yc = c_1 e^{-\frac{3}{2}t}$

let $y_p = \frac{1}{f(D)} . e^{bt} \ni f(D) \neq 0$

$f(D) = (2D + 3) \Rightarrow f(4) = (2 \times 4) + 3 = 11 \neq 0$

$\therefore \; y_p = \frac{1}{2D+3} . e^{4t} = \frac{1}{11} e^{4t}$

since: $y = y_c + y_p$

Then: $y = c_1 e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{11} e^{4t}$

وبتعويض الشرط الحدودي $y(0) = 5$ ينتج

$y(o) = 5 \Rightarrow c_1 + \frac{1}{11} = 5$

$\Rightarrow c_1 = 5 - \frac{1}{11}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{55}{11} - \frac{1}{11} \Rightarrow c = \frac{54}{11}$

وبالتعويض عن قيمة c في الحل العام فأن

$\therefore y(t) = \frac{54}{11} e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{11} e^{4t}$

نلاحظ ان حل المعادلة التفاضلية مشابه تماما للحل بطريقة لابلاس بسبب وحدانية الحل.

الفصل الثاني

سلاسل وتكاملات فورير

(1-2)المقدمة

تعد متسلسلات فورير إحدى النظريات الهامة في التحليل الحديث، ولا يغيب عنا الدور الهام الذي تلعبه المؤثرات الخطية المحدودة طرائق الجموعيةفي هذه النظرية، وفي هذا المجال تم الحصول على نتائج أساسية باستخدام العديد من الطرائق، حيث ان المتسلسلات الفورير قد نشأت لحل بعض المسائل الفيزيائية الرياضية كالانتشار الحراري وغيرها.في هذا الفصل تم التطرق إلى بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية لدوال فورير . وكذالك تعريف الدالة الدورية وتوضيح معاملات فورير .[6].

(2-2)الدوال الدورية وسلاسل فورير

يقال للدالة f بانها دوريه ذات دورة p اذا كانت

1) $f(x)$ معرفة لكل قيم x

2) $f\left(x+p\right)=f(x)$ لكل x

الدالتين $cosx$, $sin\ x$ تعتبر من الأمثلة البسيطة للدوال الدورية ذات دورة .π2 الدالتين $\sin(\frac{2\pi x}{p})$, $\cos(\frac{2\pi x}{p})$ تكون دورية ذات دورة p.

والدالة الدورية يمكن ان تكون لها عدة دورات فمثلا اذا كان

$f\left(x\right)=f(x+p)$ فأن

حيث انn تمثل اي عدد صحيح لذلك

$$f\left(x\right)=f\left(x+p\right)=f\left(x+p2\right)=f\left(x+np\right)....$$

فان $\sin x$ لها الدورات $\pi2, \pi4, \pi6, \dots, n.2\pi$ومن الواضح ان دورة الدالة الدوريه يجب ان تكون موجبة ؛ ولكن شرط الدورية يتحقق للقيم السالبة بالإضافة الى الموجبة ويمكن القول ان

$f\left(x-p\right)=f(x)$ لكل x.

حيث n تمثل اي عدد صحيح لذلك

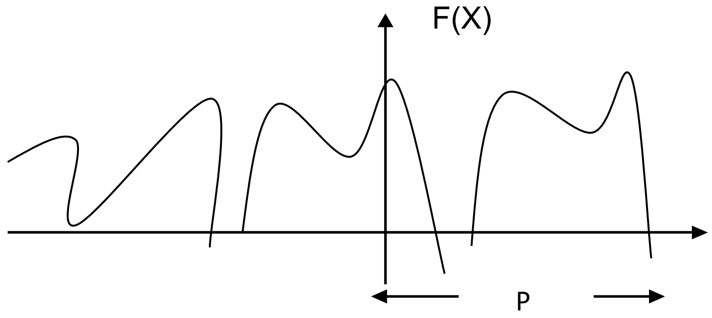
$(x) = (x + p) = f(x + 2p) = f(x + np) \ldots$

فان *sin x* لها الدورات $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, n.2\pi$ومن الواضح ان دورة الدالة الدوريه يجب ان تكون موجبة ؛ ولكن شرط الدورية يتحقق للقيم السالبة بالإضافة الى الموجبة ويمكن القول ان .

$f(x-p)= f(x)$ لكل x لأن

$f(x)=f(x-p+p)=f(x-p)$ كذلك $f(x)=f(x-p)=f(x-2p)$

ومن تعريف الدوال الدورية يتبين لنا ان قيم الدالة تعيد نفسها وهذا يؤدي ان بيان الدالة الدورية يمكن ان يرسم لكل قيم الدالة *X* وذلك بعمل قالب للمخطط في فترة طولها *.P*وبعد ذلك يستنسخ المخطط من القالب اعلى واسفل محور *x-* [7]



شكل رقم (1)

معظم الدوال التي تظهر في الهندسة والفيزياء تكون دوريه في المسافة او الزمن – فمثلا الموجات الصوتيه (*(ACOUSTIC WAVES*ولكي نفهم هذة الموجات بشكل افضل نحتاج لتمثيلها بدلالة دوال دورية بسيطة (*Periondic*)

$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2\pi\pi$ ...... الخ من الواضح ان كل هذة الدوال لها دورة مشتركة 2π بالرغم من كلا منهما له دورات اخرى.

اذا كانت *f* دورية ذات دورة $\pi 2$ نحاول ان نمثل *f* بدلالـــــة سلسله غيرمنتهية *(Infinite Series)*

$$F(x) = a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos nx + b_n \sin nx)\ nx + bn \sin nx\ )\ (1)$$

نلاحظ ان كل حد في هذه السلسلة ذو دورة π2 لذلك اذا كان مجموع هذة السلسله موجودا ، فسوف يكون دالة ذات دورة 2π هناك سؤالان يحتاجان الى اجابة: *[7]*

(3-2)معاملات فورير *(fourier coefficion)*

(أ) ماهي القيم التي تأخذها a_0, a_n, b_n

(ب) اذا وجدنا قيما مناسبة هذه المعاملات ، هل ان المتسلسلة تمثل حقا الدالة المعطاة *f(x)*

يظهر لأول مرة إنه من الصعوبة الإجابة على السؤال . لان المعادلـــة (١) هي عدد غير منتهي من المجاهيل.

ولكـــن يمكن ايجاد جواب مقبول لهذا السؤال باستخدام العلاقات التعامدية *(Orthogonalite)*الاتية:*[7]*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos\ nx\ dx\ = \begin{cases} 0\ , & n \neq 0 \\ 2\pi & ,\ n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ nx\ \ cos\ mx\ dx\ =\ 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ nx\ dx\ = \begin{cases} 0\ , & n \neq 0 \\ \pi & ,\ n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx\ = \begin{cases} 0\ , & n \neq m \\ \pi & ,\ n = m \neq 0 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص هذة العلاقة بالقول ،التكامل المحدد (في الفترة من $-\pi$الى π) لوجدنا اي دالتين مختلفتين في السلسلة في المعادلة رقم (١) يكون صفرا .

والفكرة الاساسيه تكمن في ان المساوات المقترحة في المعادلة (١) يجب ان تكون مساواة حقيقية ، وبالتالي فان كلا الطرفين يعطي النتيجة نفسها بعد اجراء العمليات نفسها . وبذلك فان العلاقات التعامدية تقدم عمليات لتبسيط الطرف الايمن من المعادلة (١)اي . نضرب طرفي المعادلة

المقترحة بإحدى الدوال التي تظهر هناك ثم نكامل من $-\pi$الى π) يجب ان نفرض ان تكامل السلسلة يتم أجراءه حداً بعد حد.

الان اذا ضربنا طرفي المعادلة رقم(١) بثابت($cos\ 0x$), 1 ونكامـــل من (π الى −π) نجد ان

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

كل حد في تكامل السلسلة يكون صفرا .لذلك فان الطرف الايمن في هذه المعادلة يختصر الى.
$2\pi a_0$

وبذلك يكون

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

هذا يعني ان a_0هي القيمة المتوسطة (*(mean value)* لـــ *f(x)* في دورة واحدة

ثم ، اذا ضربنا طرفي المعادلة(١) بـ *sin mx* حيث *m* تمثل عدد صحيح مثبت ،ثم تكامل من −π الى π سوف نجد

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \ \sin mx\, dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos nx \sin mx\, dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n\, sin\, nx \sin mx\, dx$$

من المعادلة(٢) نلاحظ ان جميع الحدود التي تحتوي على a_n, a_0 سوف تختفي .بالإضافة الى هذا . فان الحد الوحيد الذي لا يساوي صفرا من الحدود التي تحتوي على b_nهو الذي فيه

تذكـــــــر n=m (ان n هي دليل (index) المجموع وتاخذ جميع قيم الاعداد الصحيحة ......3,2,1 نختار m عدد صحيح ثابت لذلك فان n=m تحدث مرة واحدة.

والان سيكون لدينا الصيغة الاتية:

$$b_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) بـ $\cos mx$ (m صحيح) ثم نكامل لنحصل على

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

والان يمكن ان نلخـــــــص هذه النتائج . والتي تتحقق المساوات المقترحة.

$$\sum_{n-1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

$$F(x) = a_0$$

يجب ان نختار a_0, a_n, b_n حسب الصيغ الأتية :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

يسمى الطرف الايمن من المعادلة(١) بسلسلة فورية للدالf وتسمى بمعاملات فورية a_0, a_n, b_n .

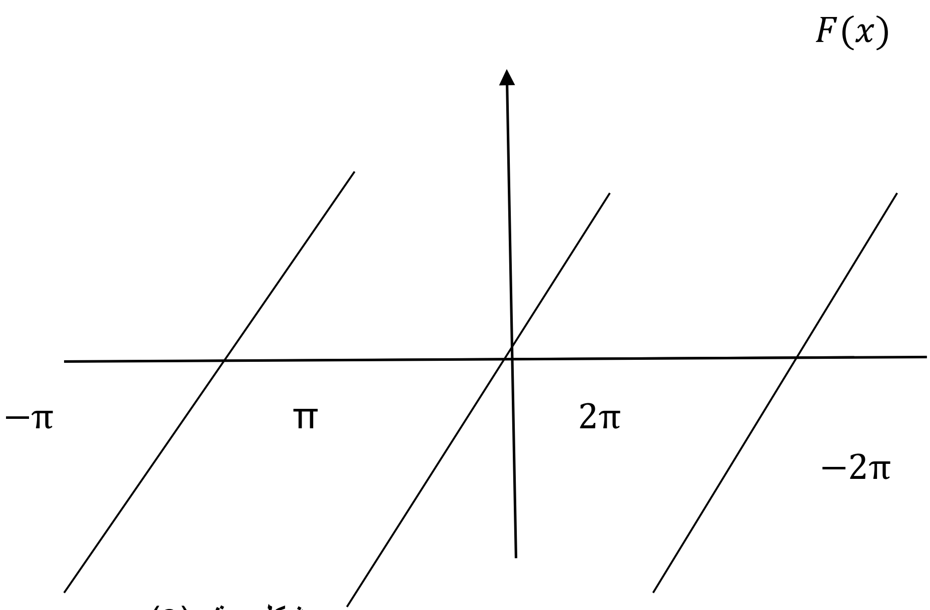
(fourier coefficients) ولحد الان لم نجب على السؤال (ب) حول المساواة لذا سو نكتب

$$a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos nx \ + \ b_n \, sin \, nx)$$

$\sim f(x)$

لكي نشير الى سلسله فورية المقترنة بــ $f(x)$

مثال:- لتكن *f(x)* دورية ذات دورة 2π معرفة بالصيغة *f(x)= x* في الفترة $-\pi < x <$ π لاحظ الشكل(2) حسب الصيغ التي حصلنا عليها سابقا يكون لدينا



شكل رقم (2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \ \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \ \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \, sin \, nx}{n}\right] = 0$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \, sin \, nx \, dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sin\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin\, nx}{n^2} + \frac{x\, cos\, nx}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{(-2\pi)\cos 2\pi}{n}$$

وبهذا لا جل حل هذه الدالة لدينا

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)}{n} \sin x$$

$$\sim 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \;\; \sin 3x - + \cdots\right)$$

(4-2) **الدورة الاختيارية ونشر نصف- المدى** *arbitrary period and halfrange expansion*

فيما سبق وجدنا طريقة لتمثيل الدالة الدورية ذات دورة *ππ2* بواسطة سلسله فورية وليس من الضروري ان نقيد انفسنا بهذه الدورة ذلك انه يمكن توسيع فكرة سلسلة فورية لتمثل دوال لأية دورة بواسطة تعديل بسيط لمقياس المتغيرات.

لنفرض ان *f* دالة دورية ذات دورة 2 *a*(اخذنا *a*2 بدلا من *p* لكونها ملائمة كما سنلاحظ لاحقا) لذلك يمكن ان نكتب *f* على شكل سلسله من الدوال

sin (2πx/a) ،cos (πx/a)،sin (πx/a) ،

وجميعها ذات دورة $2a$ ، بالصيغة *f(x)*

$$\sim a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n\, sin\, \frac{n\pi x}{a}$$

ان معاملات السلسلة الفورية والتي مكن تحديدها اما بالقياس الى الصيغ في بند 1 واما بواسطة مفهوم التعامدية . في اي من الحالتين تكون المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

$$a_n = \int_{-a}^{a} \frac{1}{a} f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\ dx$$

$$b_n = 0$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{a} f(x)\, sin \frac{n\pi x}{a}\ dx$$

منحني الدالة الدورية:

يكـــفى للدالة الدورية *f(x)* التي لها الدورة *T* ان نرسمها على الفتر $[0, T]$ مثلا ، ثم نكرر منحناها على كل فترة اخرى طولها *T*

نظرية تكامل الدالة الدورية :

ليكن *f(x)* دالة دورية لها الدورة *T* فأن

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

البرهان:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{T}^{a+T} f(x)dx$$

ولكن

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x_1 + T)dx_1 = \int_{0}^{a} f(x_1)dx_1$$

وعلى ذلك فان

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} F(X)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

ونلاحظ أن

$$\int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_T^{3T} f(x)dx = \int_{-T}^{0} f(x)dx$$

تغيير الدورة:

نعرف ان ليست كل الدوال لها الدورة 2π ولذلك سنلجأ الى تغير دورة الدالة 2π ليكن $f(x)$ لها دورة T, أي أن $f(x+T) = f(x)$ ليكن قيم *X*.

ونفرض ان *X= KU* حيث *K* ثابت موجب وعلى ذلك فان

$$f(ku+T) = f(ku)$$

وليكن $f_1(u) = f(ku)$ على ذلك فأن

$$f(ku+T) = f\left(k\left(u+\frac{T}{k}\right)\right)$$

$$f_1\left(u+\frac{t}{k}\right) = f_1(u)$$

وعلى ذلك فان $f_1(u)$ دالة دورية لها الدورة *K T*، نختار *K* بحيث ان $\frac{T}{k} = 2\pi$ وعلى ذلك فأن $k = \frac{T}{2\pi}u$ ومن ذلك نرى ان التحويل $X = \frac{T}{k}$ يحول الدالة $f(x)$ الى دالة $f_1(u)$ التي لها دورة 2π *[7]*

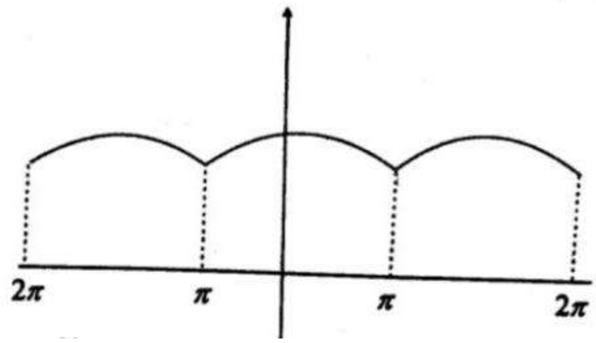
(2-5) انواع خاصة من الدوال الدورية:

يوجد اربعة انواع من الدوال الدورية والتي تتميز بصفة التماثل (بدرجة ما) ويمكن التميز فيما بينهم بمجرد النضر الى منحنياتها. *[7]*

***1*-الدالة الزوجية *:* even funcion**

هي دالـــــــة دورية لها الدورة 2πولها الخاصية $f(x) = f(-x)$ وفيها

$$f(\pi + x) = f(\pi - x)$$



شكل رقم (3)

وذلك لان

$$F(\pi + x) = f(2\pi - \pi - x) = F(\pi - x)$$

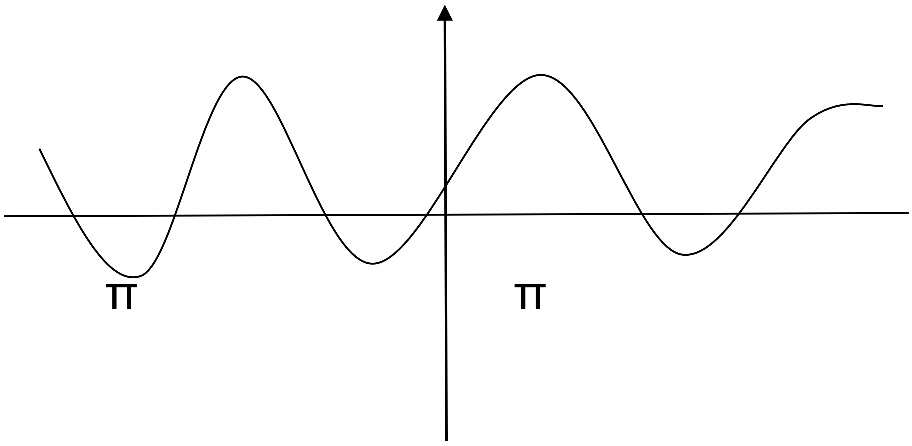
$$f(-\pi - x)$$

تبين العلاقة $f(x) = f(-x)$ ان منحني الدالة متماثل حول المحور y ، بينما تبين العلاقة

$f(\pi + x) = f(\pi - x)$ ان المنحني متماثل حول المستقيم $x = \pi$.

***2*-الدالة الفردية : odd function**

لهـــا الخاصية$f(x) = -f(x)$ كما في الشكل(٢)

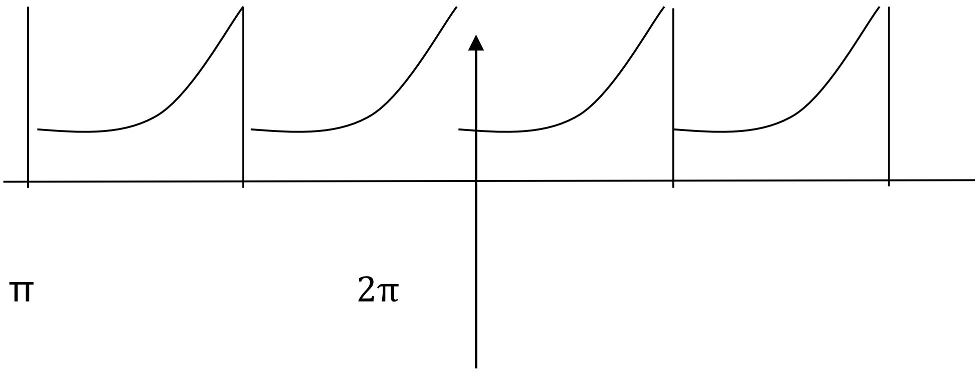


شكل رقم (4)

• نلاحظ ان $f(0)=0$, $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$ وان المنحني متماثل حول نقطة الاصل.

3-دالة زوجية التوافق: *Even harmonic function*

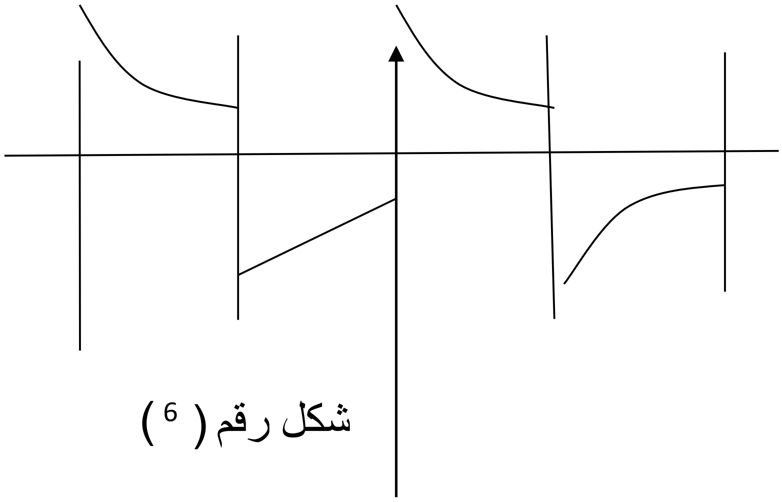
ولها الخاصية $f(\pi + x) = f(x)$ كما في الشكل رقم(٣)



شكل رقم(5)

د) دالة فردية التوافق: *Odd harmonic function*: ولها خاصية

f(π + x) = - f(x) كما ي الشكل (5)



شكل رقم (6)

بعض التكاملات الخاصة:

سوف تحتاج الى بعض التكاملات المحدد في دراستنا المتسلسله فورير

$$i)\int_0^{2\pi}\sin(nx)dx=\int_0^{2\pi}cos(nx)dx=0$$

$$ii)\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,cos(mx)dx=$$

$$\int_0^{2\pi}cos(nx)\,cos(mx)dx=\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,cos(mx)dx=0$$

علماً أن $m\neq n$

$$iii) \int_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = \int_0^{2\pi} sin^2(nx)dx = 0$$

مثال: ليكن $f(x) = x$ معروفا بالفترة $-1 < x < 1$ فان مخطط توسيع الدورية (ذات دورة 2) يمكن ملاحظته بالشكل(2)

وان معاملات الفورية هي

$$a_0 = 0\,, a_n = b_n = \int_{-1}^{1} x\ \sin n\pi x\ dx = -\frac{2\cos\pi}{n\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

ان دالتي sin x , cos x التي ظهرت في سلسله فورية لها بعض خواص التناظر (symmetry) والتي لها اهمية في ايجاد المعاملات . ومخطط دالة cos x يكون متناظرا حول المحور العمودي بينما مخطط دالة sin x تكون غير متناظرا حول المحور نفسة . نوضح هذه الخواص بتعريف

مبرهنة: اي دالة دورية وحيدة القيم ولها الدورة $\pi\pi 2$ يمكن التغير عنها بالمتسلسلة [8].

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \ldots \qquad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,sin(nx)\,dx$$

البرهان:

تتكامل المتسلسله(1) بالنسبة الى x من 0 الى 2π نحصل على

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = \pi$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

وبضرب طرفي المتسلسلة (1) بالنسبة الى x من 0 الى 2π نحصل

$$\int_0^{-2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0 + a_0\int_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = 0 + a_0\pi$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

وبالمثل بضرب طرفي(١) في $\sin nx,$ والتكامل 0 الى 2π نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,sin(nx)\,dx$$

قد استخدمنا في البرهان نتائج التكاملات المحدودة الخاصه.

مثال : اوجد متسلسله فوريير للدالة

$$F(x) = \begin{cases} x & ,0 \le 0 \le \pi \\ \pi & ,\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

الحل/

الدالة المعطاة لها الدورة 2π ومن الشكل نرى انها لا تحقق اي من الخواص الاربعه وهي

$$F(-x) = \pm f(x)(f + x) = \pm F(x)$$

وبذلك نستخدم الصيغة العامة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right|$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} xdx + \int_x^{2x} n\,dx\right] = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{1}{2}a_0 = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{x} x\cos(nx)\,dx + \int_x^{2\pi} \pi\ \cos(nx)\,dx]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx + \int_x^{2x} \pi\ \cos(nx)\,dx]$$

وعلى ذلك فــان

$$\pi + \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\sum_{n=}^{\infty}\frac{\cos(nx)-1}{n^2} \quad \cos(nx) - \frac{1}{n}\ \sin(n)$$

$$F(x) = \frac{3}{4}$$

مثال : عبر عن الدالة

$$F(x) = \begin{Bmatrix} a & ,0 \le x \le \pi \\ -a & ,\pi \le x \le 2\pi \end{Bmatrix}$$

في صور ة متسلسله فوريير

الحل: - من الشكل نرى$f(x) = -f(x)\,, f(t+\pi) = -f(x)$

اي ان الدالة فردية وله خاصة فردية التوافق وتكون متسلسله فوريير على الصورة

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}\sin(2m+1)x$$

حيث أن

$$B_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,sin(2m+1)x\,dx$$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, sin(2m+1)x\, dx$$

$$= \frac{4a}{\pi(2m+1)}$$

وبذلك يكون

$$F(x) = \frac{4a}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{sin(2m+1)}{2m+1}$$

.

المصادر

1- حسن مصطفى العويظي ، وعبد الوهاب عباس رجب ، وسناء علي زراع (دار النشر مكتبة الرشد الطبعة الأولى 1427 هـ - 2006 م)

2- خالد احمد السامرائي ، جامعة بغداد ، ويحيى عبد سعيد- جامعة الموصل .

3- السيد محمد أبو دهب خضيري، و طاهر عبد الحميد نوفل، جامعة الطائف - السعودية (الطبعة الأولى 1441هـ -2020م)

4- مجدي أمين كتبي ، مروان أمين كتبي، الطبعة الأولى (1419هـ -1999م) جامعة أم القرى - مكة المكرمة .

5- Ali Umit keskin . or dinary Differentia Equation for Engineers . Problems with MATLAB Solutions.

6-ديفيد . ياورز – ترجمة الدكتور . نزار حمدون شكر- مسائل القيمة الحدودية – مديرية دار الكتب والنشر –جامعة الموصل –العراق-1409-1989

7-.د حسن مصطفى العويضي- المعادلات التفاضلية الجزء الثاني- مكتبة الرشد – الرياض -

- المملكة العربية السعودية-١٤٢٦ه | ٢٠٠٥م

8-الطرائق الرياضيه في تحويل فورير -تاليف الدكتور محمد بن عبد الرحمن القويز