جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

تطبيقات الدوال التحليلية

و الدوال التوافقية

بحث مقدم من قبل الطالبة (نوران طالب نور) الى لجنة المناقشة المحترمون و هو

جزء من متطلبات

نيل شهادة البكلوريوس في الرياضيات

تحت اشراف

م،م عدي حاتم صاحب

2023م 1444ه

بسم الله الرحمن الرحيم

/

صدق الله العلي العظيم

سورة الاسراء -٨٥

الخلاصة

خصص لعرض بعض التعاريف و المفاهيم الاساسية التي نحتاجها بدراسة الدوال التحليليه والدوال التوافقية

مثل : تعريف الاعداد المركبة و التي يمكن ان تعرف بانها حقل غير مرتب وبيان خواصها و كذلك المرافق للعدد العقدي و القوة و الجذر النوني و الدوال المثلثية و الدوال الدائرية

و كذلك دراسة كوشي ريمان والتي من خلالها نعرف ان الدالة تحليلية او ليست تحليلية بطريقة ابسط و اوضح من الطرق الاخرى

وندرس ايضا الدالة التحليلية والدالة التوافقية

الاهداء

الى القلوب الطاهرة التي عرفت بها معنى الحياة

الى صاحبي عند شدتي وذكره يطمئن قلبي و يجدد املي و قوتي الى صاحب الزمان (عج)

الى يدي الثالثه ومعجزتي الاولى الذين يجملون حياتي واول من امن بقدراتي واول من يساعدوني على الوقوف عندما اتعثر ولولاهم لما كنت الان كما انا الى عائلتي

الى التي جاهدت كثيرا و وقفت و وصلت على رغم الصعاب الى نفسي

الى الذين ارادوا لي خيرا واحد اسباب ابتسامتي رغم بشاعه العالم

ومن جعلهم الله النور الذي في اخر النفق الى صديقاتي

الى كل من وقفوا بجانبي رغم قله معرفتهم بي ودخلو عالمي واضافوا

عليه مزيدا من الالوان وكانوا معي في الضراء قبل السراء

الى كل هؤلاء اهديهم هدا العمل المتواضع ،سائله الله العلي القدير ان ينفعنا به ويمدنا بتوفيقه

الشكر و التقدير

لابد لنا ونحن نخطوخطواتنا الاخيرة في الحياة الجامعية من وقفه نعود الى اعوام قضيناها في رحاب الجامعه مع اساتدتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير بادلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الامه من جديد

و قبل ان نمضي تقدم اسمى ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبه الى الذين حملو اقدس رساله في الحياة الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفه الى جميع اساتدتنا الافاضل

وبالاخص الى الاستاذ (عدي حاتم صاحب)

جدول المحتويات

الفصل الاول

الفصل الثاني

الفصل الاول

الاعداد المركبة

المقدمة

التحليل العقدي او التحليل المركب هو أحد فروع الرياضيات التي تبحث في دوال الاعداد المركبة والتي تعرف ايضا بالعقدية

للتحليل المركب استخدامات واسعه في الرياضيات التطبيقية وفي فروع متعددة من الرياضيات.

الاهتمام الاساسي للتحليل المركب هو الدوال التحليلية ذات المتغيرات المركبة او ما يعرف بالدوال تامه الشكل.

التحليل العقدي هو واحد من الفروع الاعتيادية للرياضيات تعود جذوره الى قبيل بداية القرن التاسع عشر. هنالك مجال اخر مهم يستعمل غي التحليل العقدي هو نظريه الاوتار. في العصر الحالي صار التحليل العقدي شعبيا جدا بسبب استعماله في إطار التحليل الديناميكي وفي الكسريات اللائي هن مجرد تكرار الدوال التامة.[١]

(1-1) الماهية الجبرية للأعداد المركبة

مقدمه

تعرف مجموعة الاعداد المركبة والتي يرمز لها بالرمز ℂ بانها حاصل الضرب الديكارتي لمجموعه الاعداد الحقيقية R في نفسها اي ان:

$\mathbb{C}$=R×R={(x,y):x,y∈ R}

وتعرف عمليتا الجمع و المضاعف العددي لعناصر المجموعه ℂكما هي في الازواج المركبه فيكون الجمع بجمع المركبات المتناظرة والمضاعف العددي بضرب كل المركبات بالعدد المعنى وبالرمز يكون:

(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)

$\propto(x,y)=(\propto x,\propto y)$

لكل (a,b) ,(X,y) في ℂ و ∝فيR

ويمكن القول ان النظام الجبري الثلاثي(ℂ،+،.) يمثل فراغا خطيا.

كما يمكن تعريف عمليه الضرب لعددين مركبين بالمواساة التاليه :

(x,y).(a,b)=((ax-by),(xb+ay))

خصائص عمليه الضرب للأعداد المركبة: -

١-عمليه الضرب عمليه تبديليه:

(x,y).(a,b)=(a,b).(x,y)

٢-عمليه الضرب عمليه تجميعيه:

(x,y).((a,b).(c,d))=((x,y).(a,b)).(c,d)

٣-يوجد عنصر نضير ضربي وهو :

(1,0)

٤-لكل عنصر (x,y) في ℂ° يوجد نضير ضربي له و هو $(x,y)^{-1}$ حيث :

$$(x,y)^{-1}=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$$

اذا رمزنا للعدد المركب (1,0)بالرمزi فان :

i^2 =(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1

أي $i=\sqrt{-1}$ ويسمى العدد التخيلي و بالتالي ياخذ العدد المركب zالصورة التاليه :

x=Rez , y=Imz: حيث ان z=(x,y)=x+yi

اي ان الجزء الحقيقي من العدد المركب zهو x والجزء التخيلي من العدد المركب zهو Y.

واذا كان x=0فان z=yiعدد تخيلي خالص و اذا كان y=0 فان z=x عدد حقيقي خالص .

وعليه فان مجموعه الاعداد المركبه تعرف كما يلي

تعريف :- مجموعه الاعداد المركبه ℂمعرفه بالمساواة التاليه:

$$\mathbb{C}=\{x,yi:x,y\epsilon R, i=\sqrt{-1}$$

اما عمليات الجمع و الطرح و الضرب و المضاعف العددي فتعرف كما يلي (a+bi)±(c+di)=(a±c)+(b±d)i

(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i

∂(a+bi)=(∂a)+(∂b)i

و مما تقدم نستنتج ان النضير الجمعي للعدد المركب (a+bi) هو (a-b -) و ان النضير الضربي له هو (x+yi) حيث ان :

$$x+yi=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

اما قسمة العددين المركبين a+bi c+di، فهي :

$$\frac{a+bi}{c+di}=(a+bi)(x+yi)$$

حيث ان x+yi يمثل النضير الضربي للعددc+diاي ان:

$$\frac{a+bi}{c+di}=(a+bi)(\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}i)$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

مثال/

اكتب الكسر التالي على الصورة x+yi :

$$\frac{(2-3i)+(5+2i)}{(-1+2i)(1+i)}$$

الحل/

بتطبيق مفهوم جمع و ضرب و قسمه الاعداد المركبة نجد :

$$\frac{(2-3i)+(5+2i)}{(-1+2i)(1+i)}=\frac{7-i}{-3+i}$$

$=(7-i)(-3+i)^{-1}$

$=(7-i)(\frac{-3}{10}+\frac{-1}{10}i)$

$=\frac{1}{10}(-22-4i)$

$=\frac{-11}{5}-\frac{2}{5}i$

[2]

(1-2) مرافق العدد العقدي

ندعوا العدد x-yi بالعدد المرافق للعدد z= x+yi و نرمز له بالرمز $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$$

الخواص : -

١- مهما يكن z من ⊆لدينا :

z=$\bar{\bar{z}}$

البرهان :

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z$$

٢ – مهما يكن z من ⊆لدينا:

z=$\bar{z} \leftrightarrow z\epsilon R$

البرهان :-

z=$\bar{z} \leftrightarrow x + yi = x - yi$

$$\leftrightarrow yi = -yi$$

$$\leftrightarrow y = 0$$

$$\leftrightarrow z = x\epsilon R$$

٣ – جداء عددين مترافقين $z\bar{z}$هو عدد حقيقي موجب

البرهان:

z$\bar{z}$=(x+yi) (x-yi)

=$x^2 - xyi + yxi - y^2i^2$

=$x^2 + y^2$

٤ – اذ كان: $z_2 = x_2 + iy_2$ ، $z_1 = x_1 + iy_1$ فان :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}i$$

البرهان:بالضرب بالعدد المرافق للمقام نحصل على :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

ليكن العدد العقدي $Z=x+iy\neq 0$, $|z|=r$, $\theta = \arg z$ عندئذ :

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\theta = \arg z \qquad , \qquad x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

و بالتالي :

$$z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

الخواص:-

1- ليكن $z_1 = |\,z_1|(\,\text{c0s}\theta_1 + isin\theta_1)$

$$z_2 = |\,z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

عندئذ:-

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow |\,z_1| =|\,z_2|, t_1 = t_2 + 2\pi k, k =0,\pm1, \ldots$$

2– ليكن $z_1 = |\,z_1|(cos\theta_1 + isin\theta_1)$

$$z_2 = |\,z_2|(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

عندئذ :-

$$z_1z_2 = |\,z_1z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)]$$

(1-3) القوة: لتكن الاعداد العقدية

$z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + isin\theta_2$ ، $z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + isin\theta_1)$

$z_n = |z_n|(cos\theta_n + isin\theta_n$

من اجل كل عدد عقدي z لدينا

$$z^2 = |z|^2(cos2\theta + isin2\theta)$$

من اجل كل عدد عقدي z و كل عدد طبيعي n لدينا :

$$z^n = |z|^n(cosn\theta + isinn\theta)$$

و بشكل عام نعبر عن القوة z^n بما يلي

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + isin\, n\theta) \quad n = 1,2 \dots \dots$$

و اذا كان العدد z يحقق الشرط ١ =|z| حصلنا على ماهو معروف بدستور موافر الذي يستخدم عادة لحساب القوة:

$(cos\theta + isin\theta)^n$=(cos n$\theta$+$isin\, n\theta$)

(1-4)الجذر النوني للعدد العقدي:

ندعو كل عدد عقدي z يحقق الشرط z^n=a بالجذر النوني للعدد a و نرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$و بذلك يكون $z^n = a \leftrightarrow$

$z = \sqrt[n]{a}$

فاذا كان :

z=|z|(cosθ+$isin\theta$),

a=|a|(cosθ+$isin\theta$)

حصلنا على التوالي:

$$|z|^n(cos\theta + isin\theta)^n = |a|(cos\theta + isin\theta)$$

$$|z|^n(\cos n\theta + isin\, n\theta) = |a|(cos\theta + isin\theta)$$

$$|z|^n = |a|\, , nt = \theta + 2k\pi$$

|z|=$\sqrt[n]{|a|}$, $t = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, $k = 0, \pm1, \pm2 \dots \dots$

مع ملاحظه انه من بين جميع السعات (أي الزوايا) $\frac{\theta+2k\pi}{n}$

(عندما تتحول k على مجموعه الاعداد الصحيحة) يوجد بالضبط n من الزوايا المختلفة و التي لا تختلف عن بعضها بمضاعفات العدد 2π

و يتم الحصول عليها عادة بوضع k=0,1,….,n-1 و عندئذ تكون قيم هذه الزوايا:

$$\theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n}\ , k = 0,1, \dots n-1$$

١ – يوجد بالضبط n من الجذور النونية للعدد a و هذه الجذور هي :

$z_k = \sqrt[n]{|a|}(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isin\frac{\theta+2k\pi}{n})$ ، حيث k=0,1,2,…..n-1

٢-تقع الجذور على محيط دائرة مركزها المبدأ و نصف قطرها $\sqrt[n]{|a|}$ و هذه الجذور تقسم محيط الدائرة هذه الى n من الاقسام المتساوية .

البرهان/ $\arg z_{k+1} - arg z_k = \frac{\theta+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta+2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$

$$\rightarrow \arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{2\pi}{n}\ , k = 0,1, \dots n-1$$

مع الملاحظة ان $z_n = z_0$

مثال /

حل المعادلة $z^4 - 1 + i = 0$

الحل/

حلول المعادلة هي قيم الجذر $z=\sqrt[4]{1-i}$ و لدينا :

1-i=|1-i|(cos$\theta + isin\theta$)

=|2|(cos$\frac{-\pi}{4} + isin\frac{-\pi}{4}$)

اذن:

$$\sqrt[4]{1-i} = z_k = \sqrt[4]{2}(cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + isin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}$$

حيث k=0,1,2,3 و في النهايه

$$z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{16} + isin\frac{\pi}{16})$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16})$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16})$$

[3] $$z_3 = \sqrt[4]{2}(cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16})$$

(1-5)الدوال المثلثية و الزائدية المركبة

يمكن ان يستخدم الاس المركب لتعريف الدوال المثلثية المركبة حيث ان:

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ و يتبع ذلك :

$$\text{Cos } y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \ ,\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

و نعمم هذه التعاريف الى المستويات المركبة كما يلي :

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

تكون هذه الدوال كلية لأنها مجموع دوال كلية ، و يحقق:

$$(\cos z)` = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$(\sin z)` = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -\cos z$$

تعرف الدوال المثلثية الاربع الاخرى بدلالة دوال الجيب (sin) و جيب تمام (cos) بواسطة العلاقات المعتادة :

$$\tan z =\frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad ,$$

$$\sec z =\frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

و هذه دوال تحليلية الا اذا كان المقام مساويا للصفر ، و هي تحقق قواعد الاشتقاق التالية :

$$(\tan z)' = sec^2 z \quad , \quad (\sec z') = \sec z \tan z$$

$$(\csc z') = -\csc z \, cot \, z \quad , \quad (\cot z') = -csc^2 z$$

تبقى جميع العلاقات المثلثية المعتادة صحيحة في المتغيرات المركبة ، و يعتمد الاثبات على خواص الاسس، فعلى سبيل المثال :

$$cos^2 z + sin^2 z = \frac{1}{4}\left[(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2\right] = 1$$

$$\cos z_1 cos z_2 - sin z_1 sin z_2 = \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}.\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}.\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} = \frac{2e^{iz_1}e^{iz_2}+2e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{4} = \cos(z_1 + z_2)$$

نحصل من تعريف (cos) على:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2} = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + isinx) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - isin\ x) = [\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}]\cos\ x - i[\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}]\sin\ x$$

اذن :

cos z=cos x cosh y-isin x sinh y

و نجد بالمثل ان :

sin z=sin x cosh y+icos x sinh y

تعريف

$$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

مرة اخرى ، تطبق جميع العلاقات المعتادة و قواعد الاشتقاق على الدوال الزائدية المركبة نلاحظ مع هذا :

$$\sinh iz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = isin\ z \quad , \quad \cosh iz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

[4]

الفصل الثاني

الدوال التحليلية

والدوال التوافقية

كوشي – ريمان

شرطا كوشي – ريمان:

ليكن f=u+iv تابعا معروفا في جوار النقطة z_0 .

كما وجدنا ان وجود و استمرار المشتقات الجزئية u_x , u_y , v_x , v_y في النقطة (x_0 , y_0) لوجدها لا تكفي كي يكون f

قابلة للمفاضلة في z_0 و لابد من تحقق الشرط $f_{\bar{z}} = 0$ أو الشرطين $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

مثال / اعط مثال توضح فيه ان تحقق شرطي كوشي – ريمان لوحدهما غير كاف كي يكون التابع المركب f=u+iv

قابلا للمفاضلة .

الحل /

لناخذ التابع :

$$F=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \ : \ z = (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ : \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ان التابع f يحقق شرطي كوشي – ريمان في النقطة (0,0) لان :

$$U=Ref=f \ \rightarrow \ u_x|(0,0) = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

بالمثل نجد ان :

$$u|(0,0) = 0$$

واضح ان :

$$v_x|(0,0) = v_y|(0,0) = 0$$

بالمقابل التابع f غير قابل للمفاضلة في النقطة $z=0$ لانه على المسار $y=mx$ و لدينا النهاية $\lim_{z\rightarrow 0} f = \frac{m}{1+m^2}$

مرتبطة بالمسار .

مثال 2/ اثبت ان التابع f=2z+i قابل للمفاضلة في كل المستوى c وان f=|z| و f=$\bar{z}$ قابل للمفاضلة في النقطة z=0 فقط

الحل /

لدينا

f=2z+i=2(x+iy)+i

=2x+i(2y+1)=u+iv

$$\rightarrow u = 2x \ , \qquad v = 1 + 2y$$

$$\rightarrow u_x = 2 \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = 2$$

نلاحظ ان الشرطان متحققان لكل (x,y) و التابع قابل للمفاضلة في كل المستوى c

بالنسبة للتابع f=$\bar{z}$ لدينا :

f=$\bar{z} = x - yi = u + iv$

$$\rightarrow u = x \quad , \qquad v = -$$

$$\rightarrow u_x = 1 \quad , \quad u_y = 0 \quad , v_x = 0 \quad , \quad v_y = -$$

بما ان الشرط $u_x = v_y$ لا يتحقق الا في النقطة (0,0) فان $\bar{z}$ قابل للمفاضلة في النقطة z=0 فقط . و اخيرا :

f=|z|=$\sqrt{x^2 + y^2}$ =u+iv$\rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ،v=0

و بنفس الاسلوب نجد ان احد شرطي كوشي – ريمان يتحقق فقط في النقطة(0,0)

[5]

(2-2) الدوال التحليلية

يقال الدالة f لمتغير مركب z انها تحليلية عند النقطة z_0 اذا كانت مشتقتها موجودة ليس فقط عند النقطة z_0 ، بل عند جميع نقط جوار ما للنقطة z_0 . و يقال ان f تحليلية في منطقة R اذا كانت تحليلية عند كل نقطة من نقاط R .

الدالة $f(z)=|z|^2$ مثلا دالة غير تحليلية عند اي نقطة ، و ذلك لأنها قابلة للاشتقاق عند نقطة واحدة فقط و هي z=0 .

اذا كانت f دالة تحليلية في منطقة R ،فانه يوجد حول كل نقطة z من R جوار يقع في نطاق تعريف f . و هذا يعني ان z لابد و ان تكون نقطة داخلية لنطاق تعريف الدالة ، و عليه فأن الدوال التحليلية تكون معرفة دائما على نطاقات . و على اية حال ، فاذا ذكرنا على سبيل المثال ان f دالة تحليلية على القرص المغلق$|z| \leq 1$ ، فسيكون مفهوما ضمنيا ان f دالة تحليلية على نطاق يحتوي هذا القرص .

يقال الدالة انها شاملة اذا كانت هذه الدالة تحليلية عند كل نقطة من نقط المستوى .

و حيث ان مشتقة كثيرة الحدود لها وجود عند اي نقطة ، نستنتج ان اي كثيرة حدود تكون دالة شاملة .

اذا كانت دالة ما ليست تحليلية عند نقطة z_0 و كانت في نفس الوقت تحليلية عند نقطة ما من نقاط اي جوار يحتوي z_0 ، فأننا نسمي z_0 نقطة شاذة للدالة أو (نقطة شذوذ) للدالة . لاحظ مثلا ، انه اذا كان $f(z)=\frac{1}{z}\ (z \neq 0)$ فأن$=\frac{1}{z^2}$ $f\acute{}(z)$ و عليه فأن f تحليلية تكون عند كل نقطة فيما عدا عند z=0 حيث الدالة غير معرفة اصلا . من هذا يتضح ان z=0 نقطة شاذة لتلك الدالة .

و من ناحية اخرى ، الدالة $f(z)=|z|^2$ ليس لها نقطة شاذة ، و ذلك لأنها ليست تحليلية عند اي نقطة .

شرط ضروري – و ليس بأي سبيل كاف حتى تكون دالة ما f تحليلية في نطاق D هو بطبيعة الحال اتصال f على D باكمله . كما ان وجوب تحقيق معادلتي كوشي – ريمان هو ايضا شرط ضروري ، الا انه ليس بكاف .

النظريتان:-

1- لتكن الدالة f(z)=u(x,y)+iv(x,y)

معرفة عند كل نقطة من نقاط جوار ما لنفطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ، و لنفرض ان المشتقات الجزئية الاولى للدالتين u,v بالنسبة للمتغيرين x,y لها وجود في هذا الجوار ، متصلة عند (x_0, y_0).

اذا حققت هذه المشتقات الجزئية الاولى معادلتي كوشي – ريمان عند (x_0, y_0) فأن المشتقة $\acute{f}\ (z_0)$ يكون لها وجود يكون لها وجود .

2- لتكن الدالة $\acute{f}(z_0) = e^{-i\theta_0}[u_r(r_0, \theta_0) + iv_r(r_0, \theta_0)]$

f(z)=u(r,θ) $+ iv(r, \theta)$

معرفة لجميع نقط جوار ما للنقطة غير الصفرية $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ، و لنفرض ان المشتقات الجزئية الاولى للدالتين u,v بالنسبة للمتغيرين r,θ لها وجود في هذا الجوار و بانها دوال في (θ, r)متصلة عند (r_0, θ_0). اذا حققت هذه المشتقات الجزئية معادلتي كوشي –ريمان في الصورة القطبية عند (r_0, θ_0) ، فان المشتقة$\acute{f}(\ z_0)$يكون لها وجود .

لتوضيح هذه النتائج اعتبر الدالة $f(z)=\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}$

نلاحظ ان$u(r,\theta) = cos\theta/r$ ، $\mathbf{v(r,\theta)} = -\boldsymbol{sin\ \theta/r}$.

$z=r\boldsymbol{e^{i\theta}}$ من نقاط المستوى المركب .

و عليه تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند أي من هذه النقاط غير الصفرية .

فأنه هذه النظريتان تمدانا بشروط كافية حتى تكون الدالة تحليلية على D.

و حيث ان مشتقة حاصل جمع او حاصل ضرب دالتين له وجود طالما كانت كل من الدالتين قابلة للاشتقاق ، فأننا نستنتج ان حاصل جمع او حاصل ضرب دالتين كل منهما تحليلية في D هو دالة تحليلية في D . و بالمثل حاصل قسمة هاتين الدالتين هو دالة تحليلية في D شرط ان الدالة في مقام القسمة لا تأخذ القيمة صفر عند اي نقطة من نقاط D . و على وجه التخصيص فانه حاصل القسمة P(Z)/Q(Z) لكثيرة الحدود ، يكون دالة تحليلية في أي نطاق لا تنعدم فيه Q(Z) عند أي نقطة من نقاطة .[6]

مثال 1/

الدالة $f(z)=z^2$ دالة تحليلية على كل الاعداد المركبة (لان $f'(z)=3z^2$ معرفة و موجودة لكل عدد مركب) و بالتالي فهي دالة كلية و لكن الدالة $f(z)=z\bar{z}$ ليست تحليلية لأنها قابلة للاشتقاق عند النقطة $z=0$ فقط (و ليست قابلة للاشتقاق على أي جوار للنقطة $z=0$) و بالتالي فهي ليست كلية .

مثال 2/الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ قابلة للاشتقاق على كل الاعداد المركبة $z\neq 0$ (لان $f'(z)=\frac{-1}{z^2}$) . و بالتالي فأنها تحليلية عند كل عدد مركب $z\neq 0$ اما عند النقطة $z=0$ فأن الدالة ليست معرفة (فضلا عن كونها غير قابلة للاشتقاق) و لأن الدالة تحليلية على نقطة واحدة على الاقل في كل جوار للنقطة $z=0$ (ما عدا $z=0$ نفسها) فأن النقطة $z=0$ نقطة متفردة (شاذة) للدالة f .

و نلاحظ كذلك ان الدالة $f(z)=\bar{z}$ ليس لها نقاط متفردة (شاذة) مع كونها ليست تحليلية على أي عدد مركب .

و كذلك الدالة $f(z)=z.\bar{z}$ ليس لها نقاط متفردة (شاذة) (مع كونها قابلة للاشتقاق على النقطة $z=0$) لأنها ليست تحليلية عند أي نقطة في المستوي .

ملاحظة / ان الدالة التحليلية تعتمد في تركيبها على المتغير z فقط و لكن الدوال غير التحليلية لا تعتمد على z فحسب بل على $\bar{z}$ كذلك ، لذلك نستطيع التعرف على كون الدالة تحليلية ام لا بالتعبير عن متغيراتها x,y بدلالة $z,\bar{z}$ فأذا استطعنا حذف $\bar{z}$ تكون تحليلية و اذا لم نستطع حذف $\bar{z}$ فان الدالة ليست تحليلية كما في المثال التالي :

مثال 3/ تعرف على الدالة التحليلية و الدالة غير التحليلية بين الدالتين :

$$F(z)=x^2-y^2+2xyi \qquad , \qquad g(z)=(x^2+2x+y^2)+2yi$$

الحل /تذكر قيمة x,y بدلالة $z,\bar{z}$ و هما :

$$X=Re.z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad , \qquad y=Im.z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

لنحصل على :

$$F(z)=\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2-\frac{-1}{4}(z-\bar{z})^2+\frac{1}{2i}(z+\bar{z})(z-\bar{z})i$$

$$=\frac{1}{4}(2z^2+\bar{z}^2)+\frac{1}{2}(z^2-\bar{z}^2)=z^2$$

و بما اننا تخلصنا من $\bar{z}$ فأنها تكون تحليلية (و نلاحظ ايضا ان هذه الدالة قابلة للاشتقاق على كل الاعداد المركبة و بالتالي فهي كلية فضلا عن كونها تحليلية).

و لكن الدالة :

$$g(z)=\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2+(z+\bar{z})-\frac{1}{4}(z-\bar{z})^2(z-\bar{z})$$

$$=\frac{1}{4}(4z\bar{z})+2z$$

$$=Z(\bar{z}+2)$$

و هذه الدالة تعتمد على $\bar{z}$ و حيث ان :

$(\frac{g(z)}{z}-2)$ تحليلية على كل الاعداد المركبة ما عدا z=0 ، و بالتالي فأن $\bar{z}$ تحليلية على كل الاعداد المركبة ما عدا z=0 و لكن هذا ليس صحيحا لذلك لا تكون الدالة تحليلية .

على ان هذه الطريقة هي الكشف عن الدالة التحليلية و غير التحليلية تواجه عدة عقبات منها قد لا تكون من السهل التعبير عن الدالة بدلالة z و $\bar{z}$ خاصة اذا احتوت الدالة في تركيبها على الدوال المثلثية و الاسية و غير ذلك .

و عقبة اخرى قد لا يكون من السهل تبسيط الدالة لنعرف اعتماد الدالة على $\bar{z}$.

و هناك نوع من الدوال تكون تحليلية على منطقة ما و لا تكون تحليلية على مكملتها و ليس من السهل التعرف على حدود هذه المنطقة ، للتغلب على العقبات جميعها و لذلك نحتاج الى **معادلتي كوشي – ريمان .**

مثال4 / بين باستخدام معادلتي كوشي – ريمان ان الدالة $f(z)=\bar{z}$ ليست تحليلية .

الحل / بما ان f(z)=x+yi

فأن u(x,y)=x , v(x,y)=-y

و مع ذلك فأن : $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$

و بما ان $v_x = 1 \neq -1 = v_y$ لجميع قيم $z=x+yi$

فأن الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند أي عدد مركب و بالتالي ليست تحليلية.

مثال 5/ بين ان الدالة $f(z)=e^x \cos y + i\, e^x \sin y$ كلية (أي تحليلية على كل المستوى المركب).

الحل / نجد المشتقات الجزئية للدالتين :

$$v(x,y) = e^x \sin y, \qquad u(x,y)=e^x \cos y$$

و هي :

$$v_y = e^x \cos y, \qquad u_x = e^x \cos y$$

$$v_x = e^x \sin y, \qquad u_y = -e^x \sin y$$

و هذه الدوال متصلة لجميع قيم z و بالمقارنة نجد ان :

$$u_y = -v_x, \qquad u_x = v_y$$

و بالتالي فأن المشتقة موجودة عند كل نقطة من نقاط المستوي المركب و هي :

$$\acute{f}(z)=u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z)$$

و بالتالي فهي تحليلية على كل المستوي المركب أي انها كلية .

_ و هذا يبين انه اذا كانت الدالة f=u+iv تحليلية فأنه ليس من الضروري ان تكون الدالة

g = v +iuتحليلية .ذلك يعني انه اذا كانت المشتقات الجزئية للدالتين u , v تحققان معادلتي كوشي – ريمان فأنه ليس من الضروري ان u , v تحققان معادلتي كوشي – ريمان

كما موضح في المثال التالي :-

مثال 6 / من المعلوم ان الدالة : f(z)=$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ تحليلية و لكن هل الدالة

g(z)= 2xy+I($x^2 - y^2$) (بعد تبديل دور كل من u , v في الدالة السابقة f) تحليلية

الحل / نجد المشتقات الجزئية للدالتين :

U(x,y)=2xy , v(x,y)=$\boldsymbol{x^2 - y^2}$

و هي: $u_x = 2y$, $v_x = 2x$, $u_y = 2x$, $v_y = -2y$

و هذه الدوال متصلة و لكن :

$$u_x = v_y \leftrightarrow 2y = -2y \leftrightarrow y = 0$$

$$u_y = -v_x \leftrightarrow 2x = -2x \leftrightarrow x = 0$$

اي ان معادلتي كوشي – ريمان لا تتحقق الا عند النقطة z=0 و بالتالي فأن

g(z)=2xy+i($x^2 - y^2$) ليست تحليلية .[2]

الدوال التوافقية $(2\text{-}3)$

من المعادلات الهامة في العلوم الفيزيائية و الهندسية المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

و التي تسمى معادلة لابلاس نسبة للعالم الفيزيائي . ان الدالة الحقيقية القيمة ذات المتغيرين $u(x,y)$ التي تمثل حلا لهذه المعادلة ذات اهمية كبيرة و معان هامة .

ان مثل هذه الدالة $u(x,y)$ تمثل الجزء الحقيقي لدالة مركبة $f=u+vi$.

تعريف :

تسمى الدالة حقيقية القيمة $u(x,y)$ ذات المتغيرين x,y دالة توافقية في المجال D اذا كانت المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية لهذه الدالة u بالنسبة للمتغيرين x,y موجودة و متصلة و تحقق :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مثال/ بين ان الدالة : $u(x,y)=x^3 - 3xy^2$ توافقية على المستوى المركب .

الحل/ نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة u بالنسبة للمتغيرين x,y و هي:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 \qquad , \qquad u_{xx} = 6x$$

$$u_y = -6xy \qquad , \qquad u_{yy} = -6x$$

و بالتالي ينتج أن :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

لجميع قيم x,y الحقيقية ، و من ذلك فأن u توافقية على المستوى المركب .

النظرية تربط بين الدالة المركبة التحليلية و بين الدوال التوافقية

نظرية :-

اذا كانت الدالة f=u+vi تحليلية على المجال D فأن كلا من u(x,y) , v(x,y) توافقية في المجال D .

البرهان :

بما أن f=u+vi تحليلية في المجال D فأن u,v تحققان معادلتي كوشي – ريمان بالاضافة الى كون المشتقات الجزئية لهما موجودة و متصلة و بالتالي ينتج أن :

$$u_x = v_y \qquad , \qquad u_y = -v_x$$

و بايجاد الاشتقاق الثاني بالنسبة للمتغيرين x,y نجد أن :

$$u_{xx} = v_{yx} \ , \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

و بهذه فأن : $v_{yx} = v_{xy}$ و لكن معروف من التفاضل و التكامل ان أي دالة قابلة للاشتقاق الثاني تحقق المساواة

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

و هذا يثبت أن u توافقية (أي تحقق معادلة لابلاس). و بالمثل يمكن اثبات أن v توافقية كذلك.

اذا كانت الدالتان u,v توافقيتين (تحققان معادلة لابلاس) و كانت المشتقات الجزئية u,v للمتغيرين x,y موجودة و متصلة على المجال D و تحقق معادلتي كوشي – ريمان فأن :

الدالة v تسمى المرافق التوافقي للدالة .

و هكذا يمكن ان نقول ان الدالة f=u+iv تحليلية على المجال D اذا و اذا فقط كانت الدالة v مرافقا توافقيا للدالة u على المجال D .

مثال /

بين ان الدالة $U(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ توافقية على كل الاعداد المركبة $z\neq 0$ ثم جد المرافق

التوافقي $v(x,y)$ لهما

الحل /

نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x,y و هي :

$$u_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\quad,\qquad u_{xx}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\quad,$$

$$u_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\quad,\qquad u_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

و بالجمع ينتج ان :

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

و هذا يشير ان u دالة توافقية على كل الاعداد المركبة $z\neq 0$ و بما ان v هي المرافق التوافقي للدالة فان النظرية تؤكد ان u+iv تحليلية على كل الاعداد المركبة $z\neq 0$

و بالتالي فان u,v تحققان معادلتي كوشي – ريمان و من ذلك

نستنتج ان :

$$u_x=v_y\quad,\quad u_y=-v_x$$

و من المعادلة الاولى فان :

$$v_y=u_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

و باجراء التكامل بالنسبة للمتغير y نستنتج ان :

$$V(x,y)=\int\frac{2x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=2\tan^{-1}(y/x)+g(x)$$

حيث ان g(x) تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير y . لكي نجد الدالة v يجب ان نجد g(x)

لذلك نستفيد من المعادلة الثانية من معادلتي كوشي – ريمان

حيث ان :

$$v_x(x,y) = \frac{2}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(y/x) + \acute{g}(x)$$

$$= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \acute{g}(x)$$

و لكن :

$$v_x = -u_y = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$

و بالمقارنة بين قيمتي v_x فأن $\acute{g}(x) = 0$ لذلك فأن $g(x)=c$ و هي الدالة الثابتة و هذا يعني

ان المرافق التوافقي للدالة u هو :

$V(x,y)=2tan^{-1}(y/x) + c$

[2]

المصادر

[1] . ويكبيديا

[2]. [د. محمود كتكت- مبادىء التحليلي المركب –

دار و مكتبة الهلال (بيروت) ، دار الشرق (جدة)-

2008م-1429ه]

[3] . [د. حسن بدور ، د. محمد علي ، التحليل العقدي ،

سنة 1430-1431 ه ، 2009-2010م]

[4]. [وليام ر.دريك-التحليل المركب وتطبيقاتة ،

النشر العلمي و المطابع – جامعة الملك سعود]

[5]. [الدكتور زكريا نوت – التحليل المركب (العقدي) - مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية –سنة 1432ه-2011م]

[6]. [تأليف (دويل ف . تشرشل ، جيمس و . براون ، روجر ف . فيرهى)

- ترجمة (دكتور بديع توفيق محمد حسن ، دكتور اسماعيل عبد الرحمن أمين) – المتغيرات المركبة و تطبيقاتها]