جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل – كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى وتطبيقاتها

مشروع بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة بابل

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس

اشراف الدكتور

غازي عبد الله مدلول

اعداد الطالب

حيدر عماد عبد الامير

١٤٤٧هـ

٢٠٢٦ م

الآية القرآنية

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَن الرَّحِيمِ

{ اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ ۚ مَثَلُ نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ ۖ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ ۖ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِن شَجَرَةٍ مُّبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَّا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ ۚ نُّورٌ عَلَىٰ نُورٍ ۗ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَن يَشَاءُ ۚ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ ۗ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ }

صدق الله العلي العظيم

سورة النور آية (٣٥)

الاهداء

الى من بلغ الرسالة وأدى الامانة ونصح الامة ،إلى نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا محمد ﷺ

إلى من كلله الله بالهداية والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار الى من احمل اسمه بكل افتخار ، ارجو من الله ان يمد بعمرك لترى ثناراً قد حان قطافها بعد طول انتظار ، وستبقى كلماتك نجوماً أهتدي بها اليوم وفي الغد والى الاب (والدي العزيز)

الى القلب الذي لا يعرف التعب ، الى الدعاء الذي لا ينقطع ، الى الحضن الذي كان ولا يزال وطني الاول الى من سهرت الليالي لتصنع لي مستقبلاً ، الى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها (والدتي العزيزة)

الى من علموني حروفاً من ذهب وكلمات من درر وعبارات من أسمى وأجلى عبارات العلم (أساتذتنا الكرام)

الى من سرنا سوياً ونحن نشق طريق معا نحو النجاح والابداع الى من تكاتفنا يداً بيد ونحن نقطف ثمرة هذا العمل اصدقائي وزملائي

الشكر والتقدير

الحمد لله رب العالمين و الصلاة والسلام على أطهر وأشرف الانبياء والمرسلين سيد الكائنات (محمد ابن عبد الله) وآله الطيبين الطاهرين

يشرفني وقد شارف هذا الجهد على الانتهاء أن اتقدم بجزيل الشكر وعظيم الامتنان الى أساتذة كلية التربية للعلوم الصرفة بكل ما قدموه لنا وساندونا به حتى وصولنا الى هذه المرحلة

ويسرني ان اقدم شكري وإمتناني

لإستاذي الفاضل (د. غازي عبد الله مدلول) المشرف على البحث الذي كان بجهوده المميزة ودقته العلمية ومتابعته المستمرة الاثر الكبير في انجاز هذا البحث فله اسمى آيات الشكر والعرفان

قائمة المحتويات

الملخص

يناقش البحث المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى ، وهي من اهم فروع الرياضيات التطبيقية المستخدمة في تمثيل الظواهر التي تتغير مع الزمن او المكان .يهدف البحث الى التعرف على طرق حل هذه المعادلات مثل فصل المتفيرات ، المعادلات المتجانسة ، التامة ، والخطية .

كما يوضح البحث تطبيقات هذه المعادلات في مجالات متعددة ، مثل الفيزياء في دراسة الحركة والتبريد ، والكيمياء في التفاعلات ، والميكانيك في تحليل الاجسام . وتكمن أهمية البحث في إلراز دور المعادلات التفاضلية في ربط الرياضيات بالتطبيقات العملية المختلفة .

المقدمة

تعد المعادلات التفاضلية من اهم فروع الرياضيات التطبيقية ، إذ تستخدم تمثيل العديد من الظواهر الطبيعية والعلمية التي تتغير من الزمن او المكان . وتبرز اهميتها في كونها حلقة وصل بين الرياضيات والعلوم الاخرى مثل الفيزياء وكيمياء والهندسة ، حيث تسهم في صياغة القوانين العلمية وتفسير الظواهر المختلفة .

ويهدف البحث الى دراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى والتعرف على اهم طرق حلها ، إضافة الى بيان تطبيقاتها في مجالات عملية متعددة .

نبذة تاريخية عن المعادلات التفاضلية

يرجع تاريخ المعادلات التفاضلية الى نشأة علم التفاضل والتكامل في القرن السابع عشر ، على يد كل من إسحاق نيوتن (1642-1727) وغوتفريد لايبنتز (1646-1716)، حيث أسهما في وضع الاسس النظرية لهذا العلم . وقد تطورت المعادلات التفاضلية لاحقاً لتصبح من اهم ادوات التحليل الرياضي ، إذ استحدمت في دراسة الحركة والحرارة والضوء وغيرها من الظواهر الطبيعية ، مما أدى إلى توسع تطبيقاتها في مختلف فروع العلم .

مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث في تعدد انواع المعادلات التفاضلية واختلاف طرق حلها ، مما قد يسبب صعوبة فهمها والتفريق بينها . كما ان تطبيق هذه المعادلات في مجالات عملية متعددة مثل الفيزياء والكيمياء والهندسة يزيد من تعقيدها ، الامر الذي يتطلب دراسة منظمة وواضحة لأساليب حلها وكيفية توضيفها في التطبيقات العملية .

اهداف البحث

١. التعرف على مفوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى .
٢. التعرف على بعض طرائق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى .
٣. تطبيق هذه المعادلات في مجالات علمية مختلفة .

اهمية البحث

تكمن اهمية هذا البحث في إبراز الدور الكبير في للمعادلات التفاضلية في تفسير العديد من الظواهر العلمية ، كما يسهم في تكوين خلفية علمية متينة . بالإضافة الى ذلك ، يوضح البحث اهمية الرياضيات في الحياة العملية من خلال التطبيقات المتنوعة في مجالات متعددة .

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

(1-1) المقدمة [1]:

اي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

او

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

(1-2) طريقة فصل المتغيرات Separation of Variables :[1]

إذا امكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x)\, dx + g(y)\, dx = 0$$

حيث أن f(x) دالة في x فقط و g(x) دالة في y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dy = C$$

حيث C ثابت إختياري ،ويسمى ذلك الحل بالحل العام ،ويكون وضع الثابت الاختياري على الصورة حسب متطلبات شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ،نستطيع حذق الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً.

مثال 1.1.2:

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذي يمر بالنقطة (0,0) للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y\, dx + (1 + e^x) \sin y\, dy = 0$$

الحل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفي المعادلة المعطاة على $\cos y\,(1+e^x)$ فنحصل على :

$$\frac{e^x}{1+e^x}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

بالتكامل المباشر $\ln(1+e^x) - \ln|\cos y| = \ln c$

$$\ln\frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

وبدلك يكون الحل العام للمعادلة هو : $1 + \ln e^x = |\cos y|$

بالتعويض عن $x=0$, $y=0$

$1 + 1 = c$ و $C=2$

ويكون الحل الخاص $1 + e^x = 2|\cos y|$

مثال 2.1.2 : أوجد معادلة المنحنيات التي تحقق المعادلة :

$$xy\, dy - \frac{1+y^2}{1+x^2}dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.2.1.2)$$

ثم اوجد حل المعادلة *(1)* التي تعطى شكلاً يمر بالنقطة (1,-3) .

الحل :

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ، ليكن :

$$\frac{1}{x(1+\ x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + b_2}{1+x^2}$$

$$1 = A\ (1+\ x_2) + (B_1 x +\ B_2)x$$

وبمساواة الحد المطلق في الطرفين نحصل على : A = 1

وبمساواة معامل x^2 في الطرفين نحصل على : B_1 = - 1 ⟹ A +B =

وبمساواة معامل x في الطرفين نحصل على : B_2 = 0

أي ان :

$$\frac{1}{x(1+\ x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{x}{1+\ x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{y}{1+\ y^2}dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+\ x^2}\right]dx = 0$$

وبالتكامل نحصل على :

$$^1/_2 \ln(1+y^2) - \ln x + {}^1/_2 \ln(1+x^2) = \ln c$$

اي أن :

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = k \qquad , \qquad c^2 = k$$

عند y=-3 , x = 1 يكون : ⟹ k=20

$$\frac{(10)(2)}{1} = k$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$(1+x^2)(1+y^2) = 20x^2$$

$$(1 - 19x^2 + x^2y^2 + y^2 = 0$$

(١-٣)المعادلات التفاضلية المتجانسة Homogeneous Equation [1]:

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,t)dx + N(x,y)dy = 0$$

متجانسة إذا كان كل من M , N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \quad , \quad \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

1) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

$$\Longrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

اذن f(x,y) متدانسة من الدرجة 2.

2) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}}$

$$\rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

اذن $f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن ان توضع على الصورة :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

حيث أن M , N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أي أن من الممكن $f(x,y) = f(x/y)$.

مثال 1.1.3 :

أوجد الحل العام للمعادلة $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$

الحل: من الواضح أن المعادلة متجانسة .

أذن نستخدم التعويض y=vx $\leftarrow$ $dy=vdx+xdv$

أذن $(\mathrm{x}^2+v^2x^2)dx-2x^2v(vdx+xdv)=0$

أذن بالقسمة على x^2 نحصل على :

$$(1+v^2)dx-2v(v\,dx+x\,dv)=0$$

أي ان $[1+v^2-2v^2]dx-2v\,x\,dv=0$

اي

$$(1+v^2)dx-2v\,x\,dv=0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على $\frac{1}{x}dx-\frac{2v}{1-v^2}=0$

أذن بالتكامل المباشر $\ln x+\ln(1-v^2)=\ln c$

حيث أن : $v={}^{y}/_{x}$

$$x\left[1-\frac{y^2}{x^2}\right]=c \qquad \mathrm{x}^2-y^2=cx$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال 2.1.3 : أوجد الصورة العامة للمعادلة : $y' = f(\frac{y}{x})$

الحل : حيث أن المعادلة متجانسة ، $\left(\frac{y}{x}\right) = v \quad \Leftarrow \quad y = vx$

أذن $y' = v + xv'$

$$v + xv' = f(v) \qquad \Longrightarrow \qquad xv' = f(v) - v$$

أي أن $x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

أي أن الحل العام $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \ln cx$

حيث $v = {}^{y}/_{x}$

مثال 3.1.3: أستخدم النتيجة السابقة في حل المعادلة :

$$2x^2y' - y(2x + y) = 0$$

الحل : المعادلة متجانسة

$$y' = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = f(\frac{y}{x})$$

بوضع ${}^{y}/_{x} = v$

$$f(v) = v + \frac{1}{2}v^2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(v) - v = {}^{1}/_{2}\, v^2$$

أذن حل المعادلة

$$\int \frac{dv}{{}^{1}/_{2}\, v^2} = \ln c\, x$$

$$\frac{-2}{v} = \ln c\, x$$

أي أن

:

$$\frac{-2x}{y} = \ln c\, x$$

وهو الحل العام .

ولإيجاد الحل الخاص نستخدم التعويض $y(e) = e$

$$\frac{-2e}{e} = \ln c\, e \qquad \Longrightarrow \qquad -2 = \ln c + 1$$

$$\ln c = -3 \qquad \Longrightarrow \qquad c = e^{-3}$$

∴ الحل الخاص

$$\frac{-2x}{y} = -3 + \ln x$$

أو

$$2x + y \ln x = 3y$$

(1-4) المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations [2]:

تسمى المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الاولى :

(1.1.4)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بالمعادلة التفاضلية التامة إذا كانت $N(x,y)$, $M(x,y)$ دالتين متصلتين وقابلتين للتفاضل وتحقق العلاقة

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}} \qquad (2.1.4)$$

ولاثبات العلاقة (2.1.4) نفرض أن لدينا الدالة u(x,y) وبكتابة المعادلة

(1.1.4) على الصورة

$$d\,\{u\,(x,y)\,\} \qquad (3.1.4)$$

وبالتالي يكون حلها العام هو $\mathrm{u}\,(\,\mathrm{x}\,,\mathrm{y}\,)$

وبما أن

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

وعليه فإن

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad , \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4.1.4)$$

وبتفاضل العلاقة الاولى في (4) بالنسبة لـ y والثانية بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

إذن نجد أن
$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}$$

أي أن العلاقة *(2.1.4)* هو شرط ضروري ليكون الطرف الايسر للمعادلة *(1.1.4)* تفاضلاً تاماً للدالة $u(x,y)$.

مثال1.1.4 : هل المعادلة التفاضلية الاتية تكون تامة

$$xy^2dx + (x^2y - \cos(y))dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = xy^2 \qquad , \qquad N(x,y) = (x^2y - \cos(y))$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية المعاطاة تامة .

مثال2.1.4: هل المعادلة التفاضلية الاتية تكون تامة

$$\tan(y)dx + x\,dy = 0$$

الحل :

$$N(x,y) = x \qquad , \qquad M(x,y) = \tan(y)$$

إذن $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \qquad , \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2(y)$

إذن $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية المعطاة غير تامة .

* ولحل المعالة التفاضلية التامة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

بحيث أن $du = M\,dx + N\,dy \qquad , \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ونحن وجدنا مسبقاً من العلاقة (4) أن

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

وبالتالي نجد أن $u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + f(y)$

حيث أنه حساب التكامل $\int M(x,y)$ فإنه y تعتبر كثابت وبالتالي تكون الدالة $f(y)$ دالة إختيارية في Y ، ولايجاد $f(y)$ نحن سوف نفاضل الدالة $u(x,y)$ بالنسبة لـ y :

إذن $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x) + \frac{df(y)}{dy}$

وحيث أن $\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{N(x,y)}$ فإن

$$\frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)\partial x\,) + \frac{df(y)}{dy} = N(x,y)$$

ومن هذه المعادلة نحن نحصل على $f'(y)$ وبإستخدام التكامل نحن نستطيع أن نجد $f(y)$.

مثال 3.1.4: حل المعادلة التفاضلية

$$2\,x\,sin\,(3\,y)dx + 3\,x^2\cos(3\,y)\,dy = 0$$

الحل: $M(x,y) = 2\,x\sin(3\,y) \quad , \quad N(x,y) = 3\,\,x^2\cos(3\,y)$

إذن $\frac{\partial M}{\partial y} = 6\,x\cos(3\,y) \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6\,x\cos(3\,y)$

وعليه فإن الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ متحقق وهذا يعنى أن الطرف الايسر في المعادلة المعطاة تفاضل تام .

إذن

$(i) \quad \int M\,dx = \int 2\,x\sin(3\,y)dx = x^2\sin(3\,y)$

$(ii) \quad \int N\,dy = \int 3\,x^2\cos(3\,y)dy = x^2\sin(3\,y)$

إذن الحل العام هو $x^2\sin(3\,y) = c$ حيث c ثابت إختياري

(1-5) عامل التكامل Integrating factor [1]:

إذا كانت المعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ غير تامة بضرب طرفي المعادلة في $I(x,y)$

تصبح تامة .

اي ان المعادلة $I\ M\ dx + I\ N\ dy = 0$ تامة ، حيث I, M, N دوال في x,y .

∴ يتحقق الشرط

$$\frac{\partial(IM)}{\partial y} = \frac{\partial(IN)}{\partial x}$$

$$\therefore I\ M_y + I_y\ M = I\ N_x + I_x N$$

مع ملاحظة أن $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

(I)

$$I\left[M_y - N_x\right] = I_x N + I_y M$$

الان نفرض حالات خاصة لعامل التكامل $I(x,y)$

1) $I(x,y) = I(x)$:

أي أن I دالة في x فقط .

$$I_x = \frac{d\,\mu}{dx} \qquad , \qquad I_y = 0$$

تصبح المعادلة (I) :

$$I\left[M_y + N_x\right] = N\frac{d\,\mu}{dx}$$

وبفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{dI}{I} = \frac{M_y - N_x}{N}dx$$

مع ملاحظة أن $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (دالة في x فقط) وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\ln I = \int p(x)dx$$

أي أن $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ او $I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}}$.

٢) $I(x,y) = I(y)$:

أي أن I دالة في y فقط

$$I_y = \frac{dI}{dy} \quad , \quad I_x = 0$$

وبالتعويض في (I) نستنتج أن :

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}}$$

حيث نلاحظ أن $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (دالة في y فقط).

مثال1.1.5: أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3 + 2y)dx + \left(2x\ In\ 3x + \frac{3x}{y}\right)dy = 0$$

الحل :

نفرض $N = 2x\ In\ 3x + \frac{3x}{y}$, $M = 3x^3 + 2y$ فيكون :

$$M_y = 2 \quad , \quad N_x = 2 + 2\ In3x + \frac{3}{y}$$

أي أن

$$M_y - N_x = -\left(2\ In\ 3x + \frac{3}{y}\right) \neq 0$$

:

∴ المعادلة غير تامة

لكن :

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{(2\ In\ 3x + {}^{3}/_{y})}{x(2\ In\ 3x + {}^{3}/_{y})} = -\frac{1}{x} = p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{-In\, x} = e^{In \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$\left(3\text{x}^2 + \frac{2y}{x}\right) dx + \left(2\ In\ 3x + \frac{3}{y}\right) dy = 0$$

بافتراض أن

:

$$M = 3x^2 + \frac{2y}{x} \quad , \quad N = 2\ In\ 3x + \frac{3}{y}$$

$$\int M\ \ dx = x^3 + 2y\ In\ x$$

$$\int N\ dy = 2y\ In3x + 3In\ y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M\ dx = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \int (\frac{\partial}{\partial y} \int M\ dx) dy = 2y\ Inx$$

ويكون حل المعادلة هو : $x^3 + 2y\ Inx + 2y\ In\ 3x + 3\ In\ y - 2y\ Inx = c$

أي أن

$$x^3 + 2y\ In\ 3x + 3\ In = c$$

حيث c ثابت اختياري .

مثال2.1.5: أوجد الحل العام :

$$y(2x+y)dx+(3x^2+4xy-y)dy=0$$

الحل :

ليكن

:

$$M=y(2x+y) \quad , \quad N=3x^2+4xy-y$$

فإن

$$M_y=2x+2y \quad , \quad N_x=6x+4y$$

وبالتالي

$$M_y-N_x=-4x-2y=-2(2x+y)\neq 0$$

أي أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\frac{2}{y}=\frac{-2(2x+y)}{-y(2x+y)}=\frac{M_y-N_x}{-M}$$ دالة في y فقط فيكون :

$$I=I(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{In\, y^2}=y^2$$

بضرب طرفي المعادلة في 2y تصبح تامة على الصورة :

$$y^3(2x+y)dx+y^2(3x^2+4xy-y)dy=0$$

ونفترض أن

$$M=2xy^3+y^4 \quad , \quad N=3x^2y^2+4xy^3-y^3$$

وعلى ذلك فإن

$$\int M\,dx=x^2y^3+xy^4+xy^4 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx=3x^2y^2+4xy^3$$

$$\therefore \int\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right)dy=x^2y^3+xy^4$$

$$\int N\,dy = x^2y^3 = xy^4 - \frac{1}{4}y^4$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^2y^3 + xy^4 + x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4 - x^2y^3 - xy^4 = c$$

أي أن

:

$$x^2y^3 + xy^4 - \frac{1}{4}y^4c$$

(1-6) المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations [3]:

تعرف : يقال أن المعادلة التفاضلية خطية من الدرجة الأولى إذا أمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) + Py = Q \qquad (1.1.6)$$

حيث P , Q ثوابت أو دوال في x فقط (وليس في y)

طريقة حل المعادلة الخطية :

نفترض أن R (وهي دالة في x فقط) هي عامل المكاملة للمعادلة (1) .

وبضرب المعادلة (1.1.6) في R نحصل على

$$R\frac{dy}{dx} + RPy = RQ \qquad (2.1.6)$$

التي يجب أن تكون معدلة تامة . نفترض أننا نرغب في جعل الطرف الأيسر هو معامل تفاضلي لحاصل ضرب .ولكن الحل $R\left(\frac{dy}{dx}\right)$ يمكن أن نحصل أن نحصل عليه فقط من تفاضل حاصل الضرب Ry. وعلى ذلك

$$R\frac{dy}{dx} + RPy = \frac{d}{dx}(Ry) \qquad (2.1.6)$$

أي

$$R\frac{dy}{dx} + RPy = R\frac{dy}{dx} + y\frac{dR}{dx} \qquad (\ 3.1.6)$$

أي

$$\frac{dR}{R} = Pdx$$

وبالتكامل نحصل على $In\ R = \int Pdx$ (بأخذ ثابت التكامل يساوي صفراً للتسهيل). وعلى ذلك يكون $R = \int e^{\int pdx}$ عامل المكاملة للمعادلة (1.1.6) ويمكن كتابة (2.1.6) على الصورة

$$\frac{d}{dx}(Ry) = RQ\ , d(Ry) = RQdx$$

وبالتكامل

$$Ry = \int RQdx + c$$

أي

$$ye^{\int pdx} = \int \left(Qe^{\int pdx}\right)dx + c$$

وهو حل المعادلة التفاضلية الخطية (1.1.6) .

ملاحظة (1) : نتذكر ما يلي

$$e^{In\ A} = A \quad , \quad e^{m\ In\ A} = A^m \quad , e^{-m\ In\ A} = 1/A$$

ملاحظة(2): في بعض الاحيان قد لا تكون المعادلة (1.1.6) خطية في y ولكن يمكن كتابتها بحيث تكون خطية في x حيث x متغير تابع و y متغير مستقل وتكون المعادلة على الصورة

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

حيث P_1 , Q دوال في y فقط

ويكون عامل المكاملة هو $e^{\int P_1 dy}$ ويكون الحل هو

$$xe^{\int P_1 dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dy}\right)dy + c$$

مثال 1.1.6: حل المعادلة

$$x\cos x\,\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1$$

الحل : نعيد كتابة المعادل على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+(\tan x+\frac{1}{x})y=\frac{\sec x}{x}$$

ويكون عامل المكاملة $I.F.$ هو

$$I.F.=e^{\int(\tan x+\frac{1}{x})dx}=e^{In\sec x+In\,x}=x\sec x$$

ويكون الحل المطوب هو

$$yx\sec x=\int sec^2\,x\,dx+c\quad\Rightarrow\quad yx\sec x=\tan x+c$$

مثال 2.1.6 : حل المعادلة

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$$

الحل : نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1-x^2}y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بالمقارنة مع $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ فيكون $P=\frac{2x}{1-x^2}$ وعلى ذلك

$$\int P\,dx=\int\frac{2x}{1-x^2}dx=-In(1-x^2)$$

وعلى حل المعادلة المطلوب هو

$$\frac{y}{1-x^2}=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{1}{1-x^2}dx$$

وبوضع $t=1-x^2$ ، $dt=-2x\,dx$ فتحصل على

$$\frac{y}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int t^{-3/2}dt + c = t^{-1/2} + c$$

$$\frac{y}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

مثال3.1.6: حل المعادلة

$$(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y$$

الحل : من الممكن كتابة المعادلة على الصورة $dx/dy + P_1 x = Q_1$

فيكون لدينا $\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^3}{y}$, $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = 2y^2$

$\int P_1 dy = -\int \frac{1}{y}dy = -\ln y$ ويكون عامل التكامل هو $e^{-In\, y} = 1/y$

ويكون الحل المطلوب هو $\frac{x}{y} = \int 2y^2\left(\frac{1}{y}\right)dy + c$

أي $\frac{x}{y} = y^2 + c$

الفصل الثاني

تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

(2-1) المقدمة [4] :

يرجع الفضل للنجاح الذي حققته البشرية في العصر الحديث الى الاستخدام الواسع للرياضيات في مخلتف العلوم التطبيقية وبالتأكيد فإن المعادلات التفاضلية تلعب دور مهم في ذلك فبواسطة هذه المعادلات نستطيع التعبير عن التغيرات التي تحدث لأحد الانظمة مع مرور الزمن سواء كان هذا النظام يضم متغير واحد او مجموعة من المتغيرات وقد كانت بداية استخدام المعادلات التفاضلية في العلوم الطبيعية وذلك لان قوانين الفيزياء والكيمياء تكون عبارة مرتبطة بعدد محدود من المتغيرات المعروفة ومع مرور الزمن اتسع نطاق استخدام المعادلات التفاضلية ليشمل علوم اخرى مثل علم الحياة وعلم الاقتصاد والهندسة بفروعها المختلفة ولهذا تعتبر المعادلات التفاضلية من اهم العلوم الرياضية التي لاغنى عنها في مختلف العلوم التطبيقية وذلك لان الظواهر الطبيعية تتوقف على عدد متنوع من العوامل والمؤثرات الطبيعية التي تؤثر على الظواهر وعند بناء نموذج رياضي لظاهرة طبيعية يجب :

أولاً: تحديد العوامل التي لها تأثير واضح على النظام وإهمال العوامل التي لها تأثير قليل جداً او غير واضح او غير مؤكد على النظام .

ثانياً: التعبير رياضياً عن العلاقات بين العوامل المرتبطة بالنظام ومتغيراتها المتناهية في الصفر ويؤدي ذلك الى تكوين معادلة تفاضلية او عدة معادلات تفاضلية .

ثالثاً: ايجاد الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية (أو مجموعة المعادلات التفاضلية) الذي يحقق الشروط الابتدائية .

رابعاً: يجب عمل المقارنة بين النتائج التي حصلنا عليها وبين النتائج الحقيقية المشاهدة التي بين ايدينا فاذا اتفقت فان النموذج الرياضي التي تم بناءه يعتبر نموذج ناجح وغير ذلك يعتبر نموذج غير صحيح.

وسوف نعرض في هذا الفصل العديد من التطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى والتي هي في الواقع تعتبر نماذج رياضية لعدد من مجالات العلوم والمعارف .

(2-2) التطبيقات الفيزيائية [3]:

مثال 1.2.2 : طبقا لقانون نيوتن للتبريد ، المعدل التي تبرد فيه المادة في هواء متحرك يتناسب مع الفرق بين درجات حرارة المادة وحرارة الهواء . إذا كانت حرارة الهواء $290\ K^{\circ}$ وان المادة تبرد من $370\ K^{\circ}$ إلى $330\ K^{\circ}$ في *10* دقائق .أوجد متى تكون حرارة المادة $295\ K^{\circ}$.

الحل : لتكن درجة حرارة المادة ما هي *T* عند الزمن *t* (بالدقائق). فإنه من الافتراض وبتطبيق قانون نيوتن للتبريد نجد أن

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T-290) \ \Rightarrow\ \frac{dT}{T-290} = -\lambda dt \qquad (1.1.2.2)$$

حيث λ ثابت التناسب . ويتكامل (1) بين $t = 0$ ، $T = 370$ وبين $t = 10$ ، $T = 330$ ويكون لدينا

$$\int_{370}^{330} \frac{dT}{T-290} = -\lambda \int_{0}^{10} dt \ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}\ In(2) \qquad (2.1.2.2)$$

بافتراض أنه عند $t = t_1$ تصبح $T = 295$ فبتكامل *(1)* نحصل على

$$\int_{370}^{295} \frac{dT}{T-290} = -\lambda \int_{0}^{t_1} dt \ \Rightarrow -\lambda t_1 = In\, 5 - In\, 80 \ \Rightarrow$$

$$\lambda t_1 = \ln 16 \ \Rightarrow \lambda t_1 = 4 \ln 2 \ \Rightarrow \frac{1}{10}(\ln 2) t_1 = 4 \ln 2$$

مثال2.2.2: يتحرك راكب دراجة بمعدل $4m/sec$. أوقف البدال لتقف الدراجة بعجلة تناقصية $(rtardation\ fo\ the\ cycle)$ ناتجه عن قوتين ، الاولى $(0.08)m/sec^2$ ناتجه من قوة احتكاك أجزاء الدراجة والاخرى نتيجة المقاومة $(0.02\ v^2)m/sec^2$ حيث v هي السرعة بالمتر في الثانية . كم من المسافة بقطعها راكب الدراجة قبل ان يقف

$(\ln 5 = 1.6)$.

الحل : لنفرض ان الجسم يتحرك من النقطة *O* (يتحرك على المحور *OX*)ويصل الى سرعة *v* عند النقطة *P* في زمن *t* بحيث أن *OP* لتكن عجلة الجسم المتحرك عند *P* هي *a* .
وعلى ذلك

$$v = \frac{dx}{dt} \quad , a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx} \qquad (1.2.2.2)$$

من الافتراض مقدار العجلة التقصيرية تساوي

$$0.08 + 0.02y^2 = 0.02(4 + v^2)$$

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -0.02(4 + v^2) \Rightarrow dx = -\frac{1}{0.02}\frac{vdv}{(4 + v^2)} \qquad (2.2.2.2)$$

وبالتكامل *(2)* بين $x = 0$ ، $v = 4\,m/s$ حتى $x = x_1$ ، $v = 0$ ويكون لدينا

$$\int_0^{x_1} dx = -\frac{1}{0.04}\int_4^0 \frac{2vdv}{4 + v^2}$$

$$x_1 = \frac{-1}{0.04}[\ln(4 + v^2)]_4^0 = \frac{-1}{0.04}[\ln 4 - \ln 20]$$

$$= \frac{\ln 5}{0.04} = \frac{1.61}{0.04} = 40\frac{1}{4}\ meters$$

(٣-٢)التطبيقات الكيميائية [3]:

تؤدي دراسة التفاعلات الكيميائية الى معادلات تفاضلية سوف نعتبر التفاعلات خلال ثبات درجة الحرارة والضغط . واننا سندرس نظام مغلق اي النظام الذي لايضاف إليه ولا يسحب منه أي مادة أو منتج خلال عملية التفاعل .

إذا تغير جزئ من s_1 الى جزئ واحد من p فإننا نكتب $s_1 \longrightarrow p$

وإذا جزئ واحد من s_1 ، وجزئ واحد من s_2 اتحدا لاعطاء جزئ واحد من p فإننا نكتب $s_1 + s_2 \longrightarrow p$ وهكذا .

وترتيب التفاعل هو وصف لحركة الجزيئات . فإنها تعرف كم حدود التركيزات يجب ضربها مع بعض للحصول على تعبير لكل من معدل وسرعة التفاعل .للتفاعل من الرتبة الأولى تكون السرعة تتناسب مع تركيز واحد فمثلا في $s_1 \xrightarrow{k} p$

فإذا كان s_1 التركيز مول/ لتر $(moles/leter)$ لـ s_1 ، p هو التركيز مول/ لتر في p فإن

$$\frac{dp}{dt} = ks_1$$

وبالمثل للتفاعل $s_1 + s_2 \xrightarrow{k} p$ ومن الرتبة الثانية يكون

$$\frac{dp}{dt} = ks_1s_2$$

وفي التفاعل الجزئي الثلاثي يكون

$$s_1 + s_2 \xrightarrow{k_1} X\ , X + s_3 \xrightarrow{k_2} P$$

والذي سرعته تكون

$$\frac{dx}{dt} = k_1s_1s_2 - k_2xs_3\quad ,\quad \frac{dp}{dt} = k_2xs_3$$

والان تعتبر التفاعل $s_1 + s_2 \xrightarrow{k} p$ اي أن جزئ واحد من s_1 وجزئ واحد من s_2 تغيرا إلى جزئ واحد من p . وحيث ان التركيز ات يعبر عنها دائما مول/ لتر وان النظام مغلق فإن تركيز $s_1 + p\ ,\ s_2 + \mathrm{p}$ ويبقى ثابتاً اثناء التفاعل اي أن

$$s_1 + p \equiv q_1\ \ , s_2 + p \equiv q_2$$

والتالي

$$\frac{dp}{dt} = Ks_1s_2 = K(q_1 - p)(q_2 - p)$$

أي أن معادلة السرعة ويمكن اختزالها إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى في p . وإذا علمت $p(0)$ فإنه يمكن حساب $p(t)$ عندما $t \geq 0$.

مثال1.3.2: اختبر التفاعل الثاني $s_1 + s_2 \xrightarrow{k} p$ حيث $k = 2$ وافترض التركيز الابتدائي لكل من s_1 هو $3\ moles\ /liter$ ، s_2 هو $1\ mole/liter$ بينما لايوجد الناتج p إبتدائياً .اوجد $p(t)$

الحل : مسالة القيم الإبتدائية التي يجب حلها هي

$$\frac{dp}{dt} = 2s_1s_2 = 2(3 - p)(1 - p)\ \ ,\ \ p(0) = 0 \qquad (1.1.3.2)$$

أي

$$2dt = \frac{1}{(3 - p)(1 - p)}dp = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{p - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{p - 3}\right)dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{p-3}{p-1} = (\pm e^{2c})e^{4t} = c_1 e^{4t} \quad , \quad c_1 = \pm e^{2c}$$

وحيث أن $p(0) = 0$ ، فإن $c_1 = 3$ ويكون لدينا

$$\frac{p-3}{p-1} = 3e^{4t} \Longrightarrow p(t) = \frac{3e^{4t}-3}{3e^{4t}-1} = 1 - \frac{2}{3e^{4t}-1}$$

مثال2.3.2: في المثال السابق اوجد $p(t)$ إذا كان تركيز الناتج p ابتدائياً هو $3\ mol/leter$

الحل : في هذه الحالة

$$s_1 + p = 3 + 2 = 5\ ,\ s_2 + p = 1 + 2 = 3$$

وتكون مسألة القيمة الابتدائية التي يجب حلها هي

$$\frac{dp}{dt} = 2s_1 s_2 = 2(5-p)(3-p)\ , \qquad p(0) = 2$$

بحل هذه المعادلة تحصل على الحل

$$p(t) = \frac{9e^{4t}-5}{3e^{4t}-1} = 3 - \frac{2}{3e^{4t}-1}$$

ملاحظة : تكون معظم التفاعلات قابلة للانعكاس $(\boldsymbol{reversible})$ وتكتب على الصورة

$$s_1 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} p \qquad (2.2.3.2)$$

وبدلالة السرعات

$$\frac{dp}{dt} = k_1 s_1 - k_{-1}\, p\ ,\ \ \frac{ds_1}{dt} = -k_1 s_1 + k_{-1} p = -\frac{dp}{dt}$$

(٤-٢)التطبيقات الميكانيكية [3]:

تسمى دراسة القوى والحركة الناتجة عنها بالكيناتيكا $(kinetics)$ التي وضع اسحاق نيوتن القوانين الأساسية واهمها قانون نيوتن الثاني الذي ينص على :القوى المحصلة المؤثرة على جسم كتلته m تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة وفي حالة الكتلة الثابتة أي

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma \tag{1.4.2}$$

حيث F هي القوى المحصلة المؤثرة على الجسم ، v هي سرعته ، (mv) كمية الحركة ، a عجلة الجسم . اذا كانت الجاذبية الارضية المؤثرة على الجسم هي g ، فالقوى المؤثرة على الجسم هي قوة الجاذبية الارضية وتساوي mg ، أي

$$ma = -mg \tag{2.4.2}$$

ومقاومة الهواء وتعطى بالمقدار $-kv$ (لان مقاومة الهواء تتناسب مع سرعة الجسم) $k \geq 0$ هو ثابت التناسب ويسمى بمعامل احتكاك الهواء والذي يسمى بالاحتكاك اللزج $(viscous\ frction)$ وتكون اشارته عكس اتجاه الحركة .

وبالتالي تكون القوى المحصلة المؤثرة على جسم ساقط هي $F = mg - kv$ وعلى ذلك يكون لدينا

$$ma + kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{3.4.2}$$

كمعادلة لحركة الجسم .

إذا اهملنا مقاومة الهواء أو كانت غير موجودة فإن $k = 0$ وبذلك تؤول المعادلة *(3)* الى

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{4.4.2}$$

وتعرف السرعة النهائية ، v عندما $k > 0$ بالمعادلة

$$v_1 = mg/k \tag{5.4.2}$$

ملاحظة هامة :المعادلات (3.4.2) ، (4.4.2) ، (5.4.2) متحققة فقط إذا تحققت الشروط المعطاه . ولا تتحقق هذه المعادلات اذا كانت (مثلاً) مقاومة الهواء لاتتناسب مع السرعة ولكن مع مربع السرعة أو اذا اخذ الاتجاه الرأسي الى أعلى هو الاتجاه الموجب .

مثال1.4.2: اسقطت كتلة من السكون من ارتفاع 15 مترا أعلى مستوى الارض وبأهمال احتكاك الهواء فمتى تصل الكتلة الى الارض وما هي سرعتها .

الحل : نفترض أن الكتلة اسقطت عند الزمن $t = 0$ واذا كان الارتفاع أعلى مستوى الارض فإن $v = \frac{dy}{dt}$ هي سرعة الكتلة وطبقا للقانون (2) فإن

$$m\frac{dv}{dt} = -gm\,, \qquad v(0) = 0, \quad g = 9.8\,, \qquad y(0) = 15$$

وبحل المعادلة $\frac{dy}{dt} = v = -gt$ نحصل على

$$y(t) = 15 - \frac{gt^2}{2}$$

تصل الكتلة إلى الارض عندما $y = 0$ أي عند $t_1 = \sqrt{\frac{30}{g}} \cong 1.75\ sec$ وتكون سرعتها

$$v(t) = -g\sqrt{\frac{30}{g}} \cong 17.1\ m/sec$$

ملاحظة : اذا حسبنا احتكاك الهواء فإنه يولد قوى على الكتلة يتناسب في سرعة الكتلة ويكون اتجاهها عكس اتجاه الحركة ومن المعادلة (1.4.2) يكون لدينا

$$m\frac{dv}{dt} = -gm - kv \qquad (3.4.2)$$

حيث k ثابت موجب يسمى بمعامل احتكاك الهواء . وهذا النوع من الاحتكاك يسمى الاحتكاك اللزج .

مثال2.4.2: اسقطت كتلة $slug - 2$ من طائرة بسرعة ابتدائية تساوي الصفر الى اسفل . أوجد ، $v(t)$ عندما يكون معامل احتكاك الهواء $k = 0.1$

Pound per foot per second .

الحل : في المعادلة (3) $k = 0.1\ ,\ g = 32.2\ ,m = 2$ ويكون لدينا

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g\,, v(0) = 0 \implies \frac{dv}{dt} + 0.05v = -32.2 \quad, v(0) = 0$$

ويكون حلها هو

$$v(t) = -0.644(e^{0.05} - 1)$$

المصادر :

[1]. أ. د حسن مصطفى العويفي واخرون " المعادلات التفاضلية " الجزء الاول ، دار النشر مكتبة الرشيد الطبعة الاولى (1427 هـ - 2006 م)

[2]. د. مجدي امين كتبي ومروان امين كتبي "المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية " مكتبة الملك فهد الوطنية الطبعة الاولى (1419هـ - 1999 م)

[3]. أ.د عبد الشافي فهمي عبادة واخرون " المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها " ، دار الفكر العربي الطبعة الاولى (1431هـ - 2010 م)

[4]. روحي ابراهيم الخطيب ، "مقدمة في المعادلات التفاضلية الطبعة الاولى " ، دار المسيرة 2012