رية العراق
العالي والبحث العلمي
معة بابل
ية للعلوم الصرفة
الرياضيات

التوزيعات الاحتمالية المستمرة

بحث تقدم به الطالبة

زينب عدنان خليف تومان

كأحد متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة ــ جامعة بابل

إشراف

أ.م.د عقيل كتاب مزعل

١٤٤٤هـ ٢٠٢٣م

بسم الله الرحمن الرحيم

((امنو بالله ورسوله وانفقوا مما جعلكم مستخلفين فيه فالذين امنو منكم وانفقوا لهم اجر كبير))

صدق الله العلي العظيم

سورة الحديد

جزء من اية (٧)

الاهداء

إلى المنبر الذي تلقيت منه اسمي دروس الحياة . . . .فكان أعظم منبر

إلى السراج الذي أنار لي ظلمة الدروب . . . .وأعانني على مواجهة الصعوبات .

إلى المثل الأعلى والقدوة المثلى . . .والنفس التي انحني أمامها بكل ود واحترام "والدي الغالي

إلى ربيع عمري الأجمل . . . ونعمة ربي الأكمل . . .والمثل الأعظم دوما

إلى العربية العظيمة . . .والروح الحكيمة . . .والنفس الكريمة . ملهمتي " والدتي الغالية "

إلى من أمدني من ينبوع علمه وثمار أفكاره ومجهوده إلى من صار لي عضدا وساندني

إلى من قدم لي التوجيه والمساعدة ليظهر هذا البحث بهذه الصورة

إلى كل من قدم لي يد العون . . . . . أساتذتي الأفاضل

الى كل هؤلاء اهدي لكم هذا البحث

الشكر والتقدير

الحمد الله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد (صلى الله عليه واله وسلم) ، وبعد فاني احمد الله كثيرا واشكره شكرا وفيرا لما وفقني له واعانني في اتمام بحثي هذا وان اسجل اجلالا وعرفانا عظيم شكري وامتناني لأستاذ الفاضل

(عقيل كتاب مزعل)المشرف على هذا البحث لما بذله من جهد علمي صادق ، ولما غمرتني به من خلق علمي وتوجيهات رشيدة كما ان شكري موجه الادارة كلية التربية للعلوم الصرفة بجامعة بابل القسم الرياضيات

للمجهودات المبذولة من قبل اساتذتنا الكرام في الجامعة لتوفير افضل بيئة للتدريس في افضل الاحوال التي تلائم طلبة العلم

كذلك شكري وحبي الى اسرتي و بالأخص ابي وامي واخوتي لما قدموه من تعاون ومشقه وصبر اثناء الانشغال بالدراسة

المحتويات

محتويات الاشكال

الخلاصة

في هذا البحث تناولنا حيث يتحدث عن التوزيعات الاحتمالية المستمرة الذي يتكون من فصلين الفصل الاول يتحدث عن الاحتمالات و من اهم المواضيع الذي تناولنا عنها وهي تعريف للاحتمالية وقواعد الاحتمال و التوافيق اما الفصل الثاني يتحدث عن صلب الموضوع أنواع التوزيعات الاحتمالية المستمرة ومن اهم المواضيع الذي تحدثنا عنها وهي التوزيع المنتظم و التوزيع الاسي السالب و التوزيع الطبيعي و هذا ما تم دراستة في البحث

المقدمة

الاحصاء: الأحصاء هو أحد فروع الرياضيات الذي يعني بترتيب البيانات وتحليلها وتفسيرها بغرض اتخاذ قرار ما، بينما الاحتمالات هي الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية . واستعمل الناس منذ القدم الاحتمالات والإحصاء لأسباب عقدية وصحية واقتصادية وغيرها. ولكن تأسيس الاحتمالات بشكله الرياضي تم من خلال مراسلات كانت بين الفرنسيين Pierre de Fermat وBlaise Pascal في سنة ١٦٥٤م. بينما يعتبر الإنجليزي John Graunt هو أول من قام بتحليل إحصائي في سنة ١٦٦٢م،من خلال دارسته لعدد الوفيات نتيجة أوبئة أصابت مدينة لندن. تطبيقات الاحتمالات والإحصاء كثيرة في مختلف الميادين خاصة في الظواهر العلمية المعقدة التي يصعب دراستها :

نشأ مصطلح الإحصاء بالمفهوم الحديث في ألمانيا عام ١٧٤٩. وتغير تفسير هذه الكلمة عبر التاريخ. ارتبط تطور علم الإحصاء بالدول ذات السيادة، خاصةً الدول الأوروبية بعد صلح وستفاليا (١٦٤، وبتطور نظرية الاحتمالية، التي تضع علم الإحصاء أساسًا لنظرياتها.(١) مبكرًا، اقتصر مفهوم الإحصاء على بعض المعلومات عن الدول ، مثل تعداد السكان. توسع علم الإحصاء لاحقًا ليشمل مجموعات المعلومات من كل الأنواع ، واتسع حديثًا ليشمل تحليل وتفسير مثل هذه البيانات، وفي مفهومنا الحديث يعني الإحصاء مجموعتين من البيانات التي جُمعت . مثل الحسابات القومية وتسجيل درجات الحرارة، والعمل التحليلي الذي يتطلب الاستدلال الإحصائي ترتبط النشاطات الإحصائية عادةً بنماذج يُعبر عنها باستخدام الاحتمالات، ومن ثم تتصل بنظرية الاحتمالات مباشرةً. تجعل التطبيقات الكبيرة لمعالجة البيانات من الإحصاء تطبيقًا مهمًا للحوسبة. تؤثر المفاهيم الإحصائية في مجموعة واسعة من العلوم، تشمل تصميم التجارب والاستدلال الإحصائي. في بداية القرن الثامن عشر، نشأ مصطلح الإحصاء وارتبط بالمجموعات المنهجية الديموغرافية والبيانات الاقتصادية للدول، تمثلت هذه البيانات في جداول الموارد المادية والبشرية، واستخدُمت لفرض الضرائب أو في الاستخدامات العسكرية وفي بداية القرن التاسع عشر، تزايد جمع البيانات وتوسع مفهوم الإحصاء ليتضمن الاهتمام الواضح بجمع البيانات وتلخيصها تحليلها .واليوم تُجمع البيانات ، وتحسب الإحصاءات وتُستخدم على نطاق واسع في الحكومات والأعمال وأغلب العلوم والرياضيات.

ساعدت الحواسيب على تسريع إجراء الحساب الإحصائي ، مع تسهيل جمع البيانات تصنيفها .يمتلك محل البيانات مجموعة من الملفات المحتوى على بيانات تتضمن ملايين التسجيلات ، يتضمن كل منها عشرات إلى مئات القياسات المنفصلة(٢) جمعتُ خلال الوقت من طريق عمليات الحاسوب)مثل بيانات البورصة (أو المستشعرات الحاسوبية وتسجيل نقاط البيع .تنتج الحواسيب ملخصات واضحة ودقيقة ، وتسمح بالمزيد من التحليل الدقيق، يتطلب مثل هذا التحليل تحويل مصفوفة كبيرة أو تنفيذ المئات من الخطوات المتكررة ، التي لا يمكن القيام بها يدويا تسمح العمليات الحاسوبية السريعة للإحصاء بتطوير طرق الحاسوب المكثف، التي تنظر إلى كل أساسيات التغيير أو العشوائية للبحث في 10آلاف تبديل للمشكلة، لتقدير الإجابات

التي لا يمكن قياسها نظرياً فقط. يحدد مفهوم الإحصاء الرياضي النظريات الرياضية للاحتمالية والداخل الإحصائي ، المستخدم في الممارسة الإحصائية. تطورت العلاقة بين الإحصاء ونظرية الاحتمالية لاحقًا. في القرن التاسع عشر، تزايد استخدام الإحصاء لنظرية الاحتمالية ، التي توصلت إلى نتائج ، خاصةً في تحليل ألعاب الحظ (القمار).

سنة 1800استخدم علم الفلك نماذج الاحتمالية ، خاصةً طريقة المربع الأصغر .استخدمت نظرية الاحتمالية الأوليةوالإحصاء في القرن التاسع عشر، واستخدم علماء الاجتماع السببية الإحصائيةونماذج الاحتمالية لتطوير العلوم الجديدة للسايكولوجيا الاختبارية وعلم الاجتماع ، واستخدمها علماء الفيزياء المختصون في الديناميكا الحرارية وميكانيكا الإحصاء.

ارتبط تطور السببية الاحصائية بتطور المنطق الاستقرائي والمنهج العلمي ، وأصبح العمل النظري أسهل مع تطور الحواسيب. وفي السبعينيات أصدر (جون) و(كوتز) ملخصًا للتوزيع الإحصائي في ٤ مجلدات، والذي لايزال مصدرًا قيمًا حتى الآن.

لا يُعَد الإحصاء التطبيقي فرعًا من فروع الرياضيات بل علمًا مستقلًا ، مثل علوم الكومبيوتر وأبحاث العمليات . على عكس الرياضيات ، تعود أصول الإحصاء إلى الإدارة العامة . نشأت التطبيقات مبكرًا في الديموغرافيا والاقتصاد . نطاقات واسعة من الاقتصاد الجزئي والكلي اليوم هي (إحصائيات) ، مع التركيز على تحليل السلاسل الزمنية ، وعلى التعلم من البيانات والتوصل إلى أفضل التوقعات ، تُشكَّل الإحصاءات أيضًا من طريق مجالات البحث الأكاديمي، متضمنةً الاختبار النفسي والطب وعلم الأوبئة. تتداخل أفكار الاختبار الإحصائي كثيرًا مع علم القرار . مع الاهتمام بالبحث وتقديم البيانات بفعالية ، تتداخل الإحصائيات مع علوم المعلومات وعلوم الكومبيوتر.(٣)[1]

الفصل الاول

الاحتمالية

(١-١)مقدمـة

كثيرا ما تستخدم كلمة الاحتمال (probability) في حياتنا اليومية، فنتكلـم عـن احتمال فوز متسابق على متسابق آخر، وذلك بمعنى إمكانية الفوز، وقد نضيـف إلى كلمة محتمل أو إمكانية كلمة أخرى تدل على قوة أو درجة هذا الاحتـمـال فنقول مثلا إنه من المحتمل جدا أو من الممكن جدا أن تمطر السماء بعد ظهـر اليوم، أو أن احتمال أن تمطر السماء قليلا . أو أنه من غير الممكن أن ينجح طالب معين أو أن إمكانية نجاحه قليلة جدا. إلا أن الإحصائيين لايرضون بالتعبير عـن الاحتمال بأنه صغير أو كبير، بل يرون ضرورة إعطائه قيمة كمية أو عددية يمكن التعبير عنها بدقة. مما سبق نلاحظ أن كلمة احتمال تعني شيئين رئيسين هما :

(١) مقياس تحليلي لمعرفة .ثبوت حادث معين.

(٢) مقياس يقيس درجة تيقن حادث ما مثل درجة التيقن .

الفضل في اكتشاف علم الاحتمال إلى عالمين رياضيين فرنسيين في القرن السابع عشر الميلادي هما بلييز باسكال (Blaise Pascal)، وبيير ديفيرمات

(Pierre De Fermat) وذلك عنـد مـعالـجـتـهـما لمـش كلات القـمـار

(gambling problems). وقـام بـعد ذلك كل مـن بيرنولي (J. Bermuolli ،

ودي موافر (A. De Moivre) ولابلاس (P. S. Laplace) بتطوير مفهوم علم الاحتمال . تطور المفهوم العلمي الحديث للاحتمال فيما بعد خلال العشرينات والثلاثينـات من هذا القرن ليجـاري النقلة النوعية والكميـة في البحث العلمي التي تعود إلى ذلك الزمن . أصبحت نظرية الاحتمالات، في وقتنا الحاضر ، أكثر تطبيقا لتشمل مجالات متعددة تساهم في عمليات استقراء النتائج، واتخاذ القرارات الذكية البارعة في كثير من العلوم الأخرى المختلفة كالاقتصاد، والإدارة ، وعلم الاجتماع، وعلم الفلك، وعلم الفيزياء، والهندسة، وبحوث العمليات، وعلم الأجنـة، وعـلـم

النمذجة بالإضافة إلى مجالات أخرى من العلوم التجريبية أو النظرية . وباختصار يظهر علم الاحتمال وتزداد الحاجة إلى تطبيقاته أينما يظهر عدم التيقن وتحكم العشوائية سلوك الظاهرة المدروسة . ومن المفيد قبل الدخول في تعريف الاحتمال ومفاهيمه ونظرياته التعرض لبعض التعريفات والمفاهيم الأساسية المستخدمة في نظرية الاحتمالات .[1]

(١-٢) تعريف الاحتمالية

هناك نوعان من التعريفات اجدهما هو التعريف الكلاسيكي و الاخر هو التعريف التجريبي [2]

١-التعريف الكلاسيكي Classical definition

وفيه يعرف احتمال حدوث حدث ما وليكن هذا الحدث E مثلا بأنه النسبة بين عدد مرات ظهور هذا الحدث المرغوب فيه desired event (n) إلى عدد كل النواتج الممكنة (m)، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$P_r = \frac{n}{m} \qquad (1).$$

ومن هذا التعريف فإن أقل قيمة للاحتمال هي الصفر عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه مساويا للصفر وأعلى قيمة للاحتمال هي الواحد الصحيح عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه (n) مساويا لعدد كل النواتج الممكنة (m).

مثال 1

ما هو احتمال الحصول على صورة (H) عند رمي قطعة نقود مرة واحدة ؟ وللحصول على قيمة هذا الاحتمال فإن عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه هو ١ والعدد الكلي للحالات الممكن حدوثها هو ٢ وعلى ذلك فإن احتمال الحصول على صورة يساوي $\frac{1}{2}$، مع ملاحظة أن قطعة النقود هذه يجب أن تكون غير متحيزةfair، بمعنى عند رمي هذه القطعة فإنها تستقر إما على الصورة أو على الكتابة بنفس درجة التوقع. ويجب ملاحظة أنه عند استخدام هذا التعريف الكلاسيكي للاحتمال فإنه يشترط أن تكون الأحداث متنافية mutually exclusive، أي حدوث أي منها يمنع حدوث الأخرى وأن يكون لكل حدث نفس الفرصة في الظهور equally likely [3]

مثال 2

ما هو احتمال الحصول على ولد Jack عند سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) ؟

عدد الأوراق التي عليها Jack = 4

العدد الكلي للأوراق = ٥٢ و هذا يمثل كل الأحداث الممكنة

إذا احتمال الحصول على Jack ٤÷٥٢=٠.٠٧٦٩

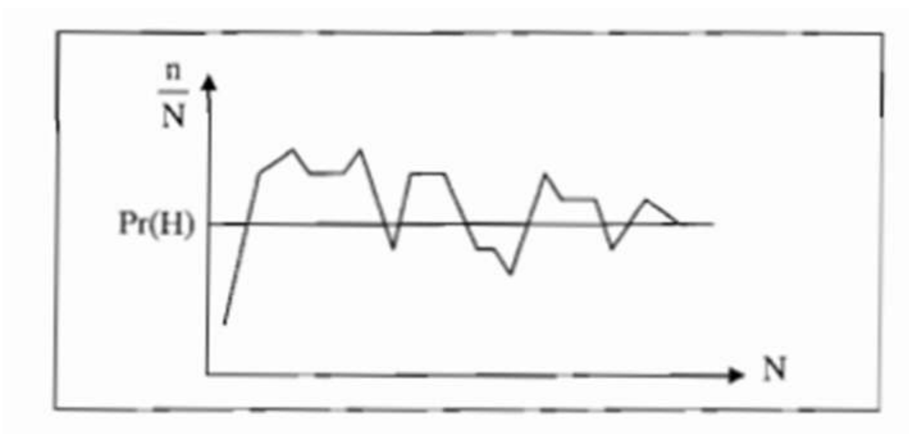
٢-التعريف التجريبي Experimental or empirical definition

إذا أجريت تجربة من عدة محاولات في كل محاولة يرمى مثلا عدد من قطع النقود N، ظهرت الصورة (H) في n منها فإنه عندما تؤول N إلى∞ (ما لانهاية) فإن النسبة$\frac{n}{N}$ تعبر عن قيمة الاحتمال أى أن:

$$P_r(H) = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N} \dots\dots\dots\dots(2)$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا بالشكل ١ إذا كان المحور السيني يمثل N والمحور

الصادي يمثل النسبة$\frac{n}{N}$



شكل ١ التمثيل البياني للتعريف التجريبي للاحتمال

ومن هذا التعريف التجريبي للاحتمال يتضح أنه كلما زادت N كلما أمكن الحصول على قيمة دقيقة للاحتمال بعيداً عن تأثير الصدفة chance التي قد تلعب دورا كبيرا إذا كانت N صغيرة.[4]

مثال ٣

إذا كان عدد العجول الذكور المولودة ٤٩٠٠ علماً بأن العدد الكلي ١٠٠٠٠ عجل من الذكور والإناث. فما احتمال الحصول على عجل ذكر ؟

احتمال الحصول على عجل ذكر$0.49 = \frac{49}{100} = \frac{4900}{10000}$

وأبسط طريقة للحصول على قيمة الاحتمال لحدوث حدث ما وليكنE_i هو كتابة

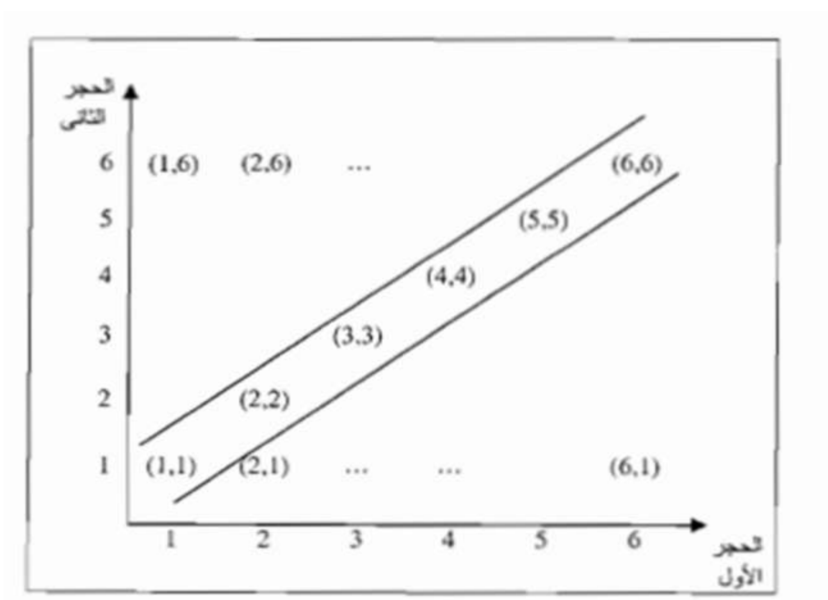
كل الحالات المختلفة الممكن ظهورها ثم تحصر عدد الحالات التي يظهر فيها الحدث المرغوب

E_iوباستخدام تعريف الاحتمال الكلاسيكي السابق الإشارة إليه يمكن حساب قيمة الاحتمال المراد تقديره.[5]

مثال ٤

عند إلقاء حجري نرد ما احتمال الحصول على الوجهين متشابهين؟ افترض أن الإحداث السيني يمثل الحجر الأول والإحداث الصادي يمثل الحجر الثاني حيث تكون كل النقط الممكن ظهورها ٣٦ وعدد المرات التي يظهر فيها الوجهان متشابهين ٦ مرات وعليه فإن احتمال الحصول على الوجهين متشابهين هو:$\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

كما هو واضح من شكل(٢)[6]



شكل ٢ النقط الممكن ظهورها عند إلقاء حجرى نرد مرة واحدة

ولكن حساب الاحتمال بتلك الطريقة قد يحتاج إلى جهد ووقت لحصر كل الحالات المختلفة الممكن حدوثها ولذا تستخدم قواعد الاحتمالات التي وضعت لتوفر الوقت والجهد[2]

(١-٣)قواعد الاحتمال Rules of probability

١-قاعدة الجمع Addition rule

إذا ألقى حجرا نرد غير متحيزين مرة واحدة، فما احتمال الحصول على وجهين متشابهين (هو نفس المثال ٤)؟ ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي: ما قيمة احتمال الحصول على: (١١) أو (٢ ،٢) أو (٣٣) أو (٤٤) أو (٥,٥) أو (٦٦) ؟ لاحظ أنه إذا ألقي حجرى نرد فإن الحصول على (١,١) على كلا الوجهين للحجرين يمنع ظهور الحالات الأخرى الممكنة. والحصول على (٢,٢) يعني أيضا عدم ظهور الحالات الأخرى، وهكذا فإن ظهور أي حدث يمنع ظهور الأحداث[7]

الأخرى. ويعبر عن تلك الخاصية بأنها أحداث متنافية mutually exclusive ويكون احتمال الحصول على هذه الأحداث المتنافية والتي لها نفس الفرصة في الظهور هو مجموع احتمالات كل منها ويعبر عن ذلك كما يلى:

$$P_r[(1,1)or(2,2) \ldots \ldots \ldots . or(6,6)] = p_r(1,1) + \cdots .. + p_r(6,6)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots . + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في مثال ٤-٦. ويمكن تعميم هذه القاعدة

لأي من الأحداث المتنافية أي:

$$p_r(E_\downarrow\ OR\ E_2 \ldots . E_K) = P_r(E_1) + P_r(E_2) + \cdots . + P_r(E_K)$$

أما إذا كانت الأحداث غير متنافية (وهذا شرط أساسي يلزم توفره) فإن النتيجة

سوف تختلف وسوف تكون الإجابة خطأ، والمثال التالي يبين ذلك:

مثال5

ما احتمال الحصول على وجهين متشابهين أو أن يكون مجموع الوجهين هو ٢

عند إلقاء حجرى نرد مرة واحدة ؟

عند النظر للرسم البياني (شكل2)في المثال ٤ وحصر عدد النقط التي تمثل الحصول على الوجهين

متشابهين (٦ نقاط) أو أن يكون مجموع الوجهين هو ٢ وهي قيمة (نقطة واحدة) وعليه فإن الاحتمال عبارة

عن: $\frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$

مضبوطة للاحتمال. وللحصول على القيمة المضبوطة تستخدم العلاقة التالية:

$$P_r(A\ OrB) = P_r(A) - P_r(AB)$$

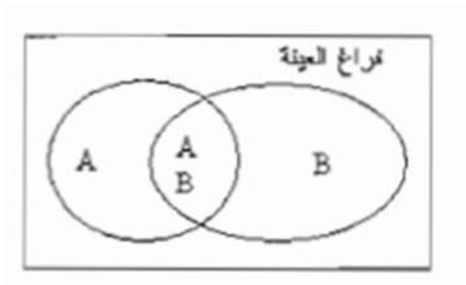
وتعبر Pr(AB) عن الاحتمال المشترك joint probability وهو احتمال الحصول على الحدث A والحدث B معا أي نسبة عدد المرات التي يظهر فيها الحدث A والحدث Bمعاً إلى العدد الكلى الممكن حدوثه. وقد يعبر عن المعادلة (٤-٨) كما يلى:

$$P_r(A \cup B) = p_r(A) - P_r(B) - P_r(A \cap B)$$

حيث تمثل به∪ اتحاد union بينما تمثل ∩- تقاطع intersection. وتكون الاجابة الصحيحة للمثال كالتالي

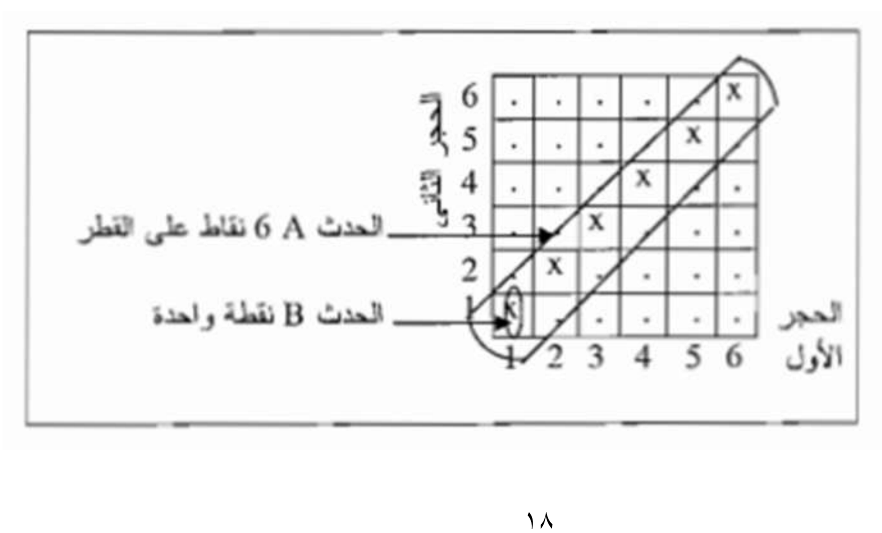
$$\frac{6}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$$

يمكن التعبير عن المعادلة بالشكل المعروف باسم venn diagram



شكل رقم (٣) تخطيط (شكل) فن venn diagram

حيث إن احتمال الحصول على الحدث A أو الحدث B هو احتمال الحصول على الحدث A مضافاً إليه احتمال الحصول على الحدث B مطروحاً منه احتمال الحصول على كليهما معاً. ولتوضيح هذا الشكل فإنه في المثال ٤-٧ يمكن التعبير عن كل النقط الممكنة وعددها ٣٦ بفراغ العينة sample space ويعبر عن عدد النقط التي يظهر فيها الوجهان متشابهين بالحدث A وهى ٦ نقاط وعدد النقط التي فيها مجموع الوجهين يساوي ٢ بالحدث B وعددها نقطة واحدة ويمكن بيان ذلك بالشكل(٤)



شكل (٤)عدد النقاط التي يمثلها الحدث A وعدد النقاط التي يمثلها الحدث B

وفي هذه الحالة فإن احتمال الحصول على الحدث B هو نفسه احتمال الحصول على الحدثين A،B معا.[8]

٢-قاعدة الضرب

تستخدم لترتيب عدد من الظواهر التي يمكن ترتيبها في " حيث تمثل النتائج التي تظهر في المرحلة الأولى و ١٢ تمثل النتائج التي تظهر في المرحلة الثانية وان كل ناتج من المرحلة الأولى مرتبط مع كل ناتج من المرحلة الثانية وهكذا يكون العدد المتوقع للنتائج هو n_2, n_1 ولتعميم هذه النتيجة فان$n_1, n_2 \ldots . . n_r$حيث(أن

$r = 1,2 \ldots . , i$أعداداً صحيحة)

مثال ٦

يرغب شخص بتناول وجبة خفيفة تتضمن سندوتش وحلوى وشراب ، فإذا كان هناك ١٠ أنواع مختلفة من السندوتش و٦ أنواع مختلفة من الحلوى و٨ أنواع مختلفة من الشراب ، فكم عدد الاختيارات المتوفرة ؟

الحل

عدد الاختيارات للوجبة ٤٨٠ = $n_1, n_2, n_3; = 10 \times 6 \times 8$ وذلك لان الاختيار في كل مرحلة مرتبط مع المراحل الأخرى.

مثال٧

كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام ١,٢,٣,٤,٥ بحيث لا يتكرر ظهور الرقم في كم أي من هذه الأعداد ؟

الحل

٦٠ = ٣ × ٤ × ٥ = ! ٥ أي أن هناك ثلاثة أماكن حيث يملأ المكان الأول بخمسة طرق والثاني بأربعة طرق والثالث بثلاثة طرق وبالنتيجة يكون عدد الطرق ٦٠

طريقة.

٣-قاعدة الجمع

تستخدم إذا كـان لـدينا عدة عمليـات تـتم بـعـدة طـرق أي أن :[3]

$$n_1 + n - 2 + \cdots + n_k$$

مثال 8

إذا كان لدينا (٣) باصات و(٥) قطارات فبكم طريقة يمكن تنظيم رحلة بحيث يتم استخدام القطار والباص [3]؟

الحل

قاعدة الجمع فـان عـدد الطـرق = عـدد الباصات + عدد القطارات =

٣+٥=٨

(١-٤)التوافيق Combination

هي عملية اختيار أو انتخاب عدد من المفردات بحجم " من مجموعة كبيرة nوبدون ترتيب ويتم حساب ذلك من العلاقة الآتية :[3]

$n, r \in I^+$ حيث ان $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مع ملاحظة بعض الخواص

$$\binom{n}{n} = I, \binom{0}{0} = I, \binom{n}{I} = N, \binom{n}{0} = I$$

مثال ٩

اوجد عدد العينات العينات التي يمكن تكوينها من مجتمع مؤلف مفردات بحيث يكون حجم العينة لمفردتين اثنين فقط ؟[3]

الحل

نطبق التوافيق لان العملية هي عملية اختيارية

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = 6 \times 5 \times \frac{4!}{2!4!} = I5$ نحصل على ١٥ عينة

الفصل الثاني

أنواع التوزيعات الاحتمالية المستمرة

(٢.١)مقدمة

ي علم الاحتمالات والإحصائيات، توزيع الاحتمال هو إعطاء احتمال معين لكل مجموعة جزئية قابلة للقياس من مجموعة نتائج تجربة عشوائية ما. وبتعبير آخر، هو قياس احتمالي مجاله تطبيق جبر بوريل على مجموعة الأعداد الحقيقية . التوزيع الاحتمالي يعتبر حالة خاصة من مصطلح أكثر عمومية هو القياس الاحتمالي، الذي يعتبر دالة تربط قيم احتمالات بمجموعات مقيسة من الفضاء المقاس بحيث تحقق فرضيات كولوموغروف. هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة يمكن عرضها [8]

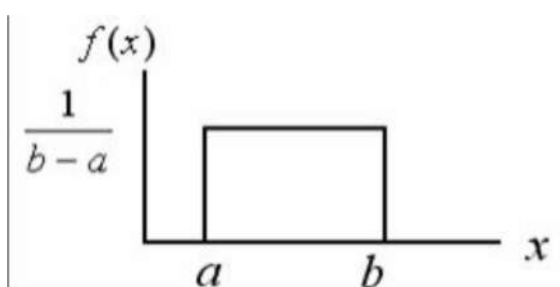
(٢.٢)التوزيع المنتظم

١. شكل دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f

اذا كان المتغير x متغير عشوائي كتوزيع منتظم Uniform مداه $a < xb$ فان دالة الكثافة الاحتمالية هي

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\ , a < x < b$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما ييلي



شكل رقم (١) تمثيل داله بيتا

2 . معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a) ولذا يكتب وصف توزيع المتغير على الصورة

$$X \sim U(a, b)$$

3 . خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي μ التباين σ^2 لهذة المتغير

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \;, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

٤. التجميعي التوزيع دالة C.D.F

ناخذ دالة التوزيع التجميعي $F(X)$ الشكل الاتي [9]

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$$

تطبيق

استورد أحد المراكز التجارية ١٥٠٠ طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

يفرض أنx المتغير يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاس بالشهر ، أي أن ، ١٢ > x <0 x

ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{2}, 0 < x < 12$$

حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أنQ هي كمية البطاطس المستوردة تكون المتبقية في المخزن مع مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي:

$$Q * p(x > 7) = Q * \left(1 - f(7)\right) = 1500\left(1 - \frac{7-0}{12-0}\right) = 62Ton$$

(2.3)التوزيع الأسى السالب Negative Exponential distribution

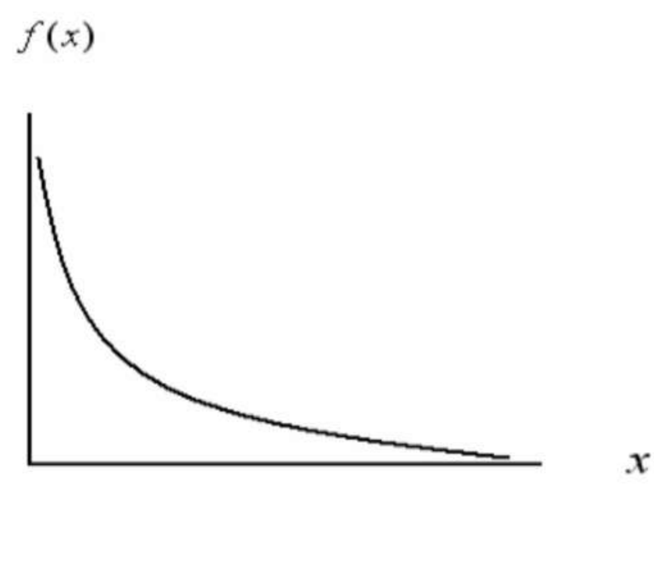
1.شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:

إذا كان المتغير xمتغير عشوائي له توزيع أسي سالب، مداه هو من $0 < x < \infty$ فان دالة كثافة احتماله هي

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, 0 < x < \infty, \theta > 0$$

٢. معالم هذا التوزيع توجد معلمة واحدة هي (θ)



شكل رقم (٢)

3 خصائص التوزيع الأسى السالب الوسط الحسابيμ ، والتباين σ^2لهذا المتغير هما :[11]

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta}, \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

٤. دالة التوزيع التجميعي C.D.F

تأخذ دالة التوزيع التجميعي(F(x الشكل الآتي

$$f(x) = p(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = (1 - e^{-\theta x}$$

تطبيق:

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط ٢ دقيقة ، فاوجد ما يلي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغيرx يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أنه x <0 < x

فإن المعلمة ٢ = $1/\theta$، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي : (θ= ٠.٥) وتكتب دالة كثافة

الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5e^{0.5x}, 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \leq 1) = (1 - e^{-0.5x}) = \left(1 - e^{-0.5(1)}\right) = 0.3935$$

(2.4)التوزيع الطبيعي The Normal distribution

١- شكل دالة كثافة الاحتمال p.d. f

إذا كان المتغير xمتغير عشوائي له توزيع طبيعي مداه $-\infty < x < \infty$ فأن دالة كثافة احتماله هي[12]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}, -\infty < x < \infty, \pi = \frac{22}{7}$$

فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ

٢- معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما

الوسط الحسابي :μ = E(x)والتباين : var(x) =σ^2

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغيرx بالرموز : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ويعني ذلك أن المتغير العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2

٣- خصائص التوزيع الطبيعي

هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

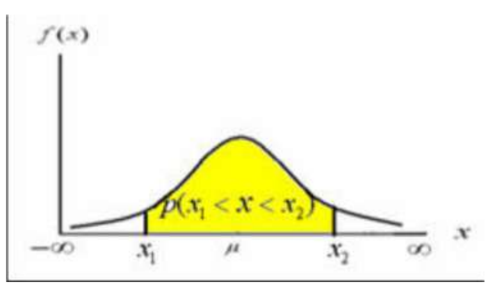
١- الوسط الحسابي μ

٢- والتباين 2

٣- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

٤- كيفية حساب الاحتمالات $P(X_1 < X < X_2)$

يفرض أن هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية أسفل المنحلي:

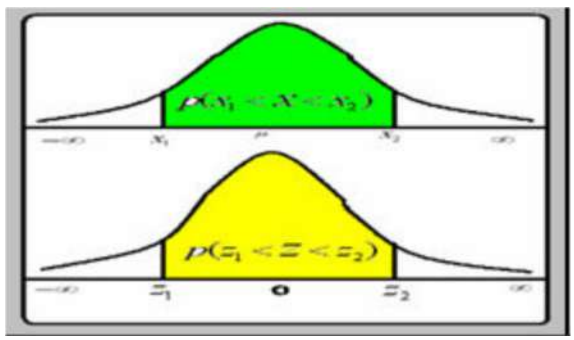


شكل رقم (٣)

وتحسب هذه المساحة(الاحتمال) بإيجاد التكامل التالي:

$$P(X_1 < X < X_2) = \int_{X_1}^{X_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

ومن ثم يكون الاحتمال $p(x_1 < x < x_2) = p(z_1 < z < z_2)$



شكل رقم (٤)

تستخدم جدوال التوزيع الطبيعي القياسي والذي يعطي مساحة الخاصة بالاحتمال [13]

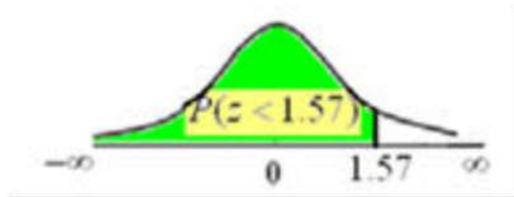
$$f(z) = p(Z < z)$$

5. طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات اوجد الاحتمالات التالية [14]

١. $p(z < 1.57)$
٢. $p(z < -2.33)$
٣. $p(z > 1.96)$
٤. $p(-2.01 < z < 1.28)$

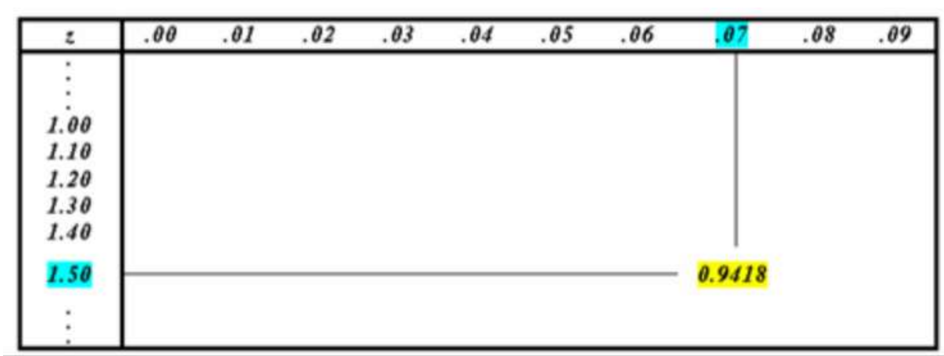
الحل

١.تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $p(z < 1.57) = f(1.57)$ اسفل المنحنى اما يلي



شكل رقم (٥)

ويتم استخدام الجدول كما مبين

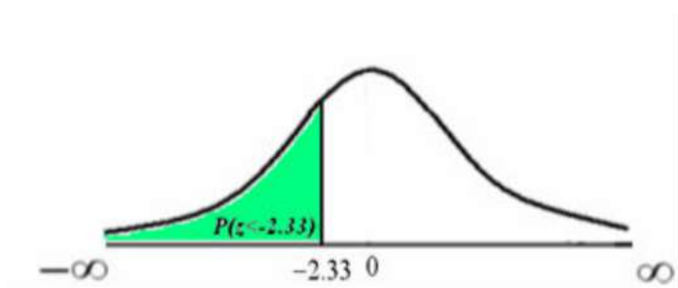


شكل رقم (٦)

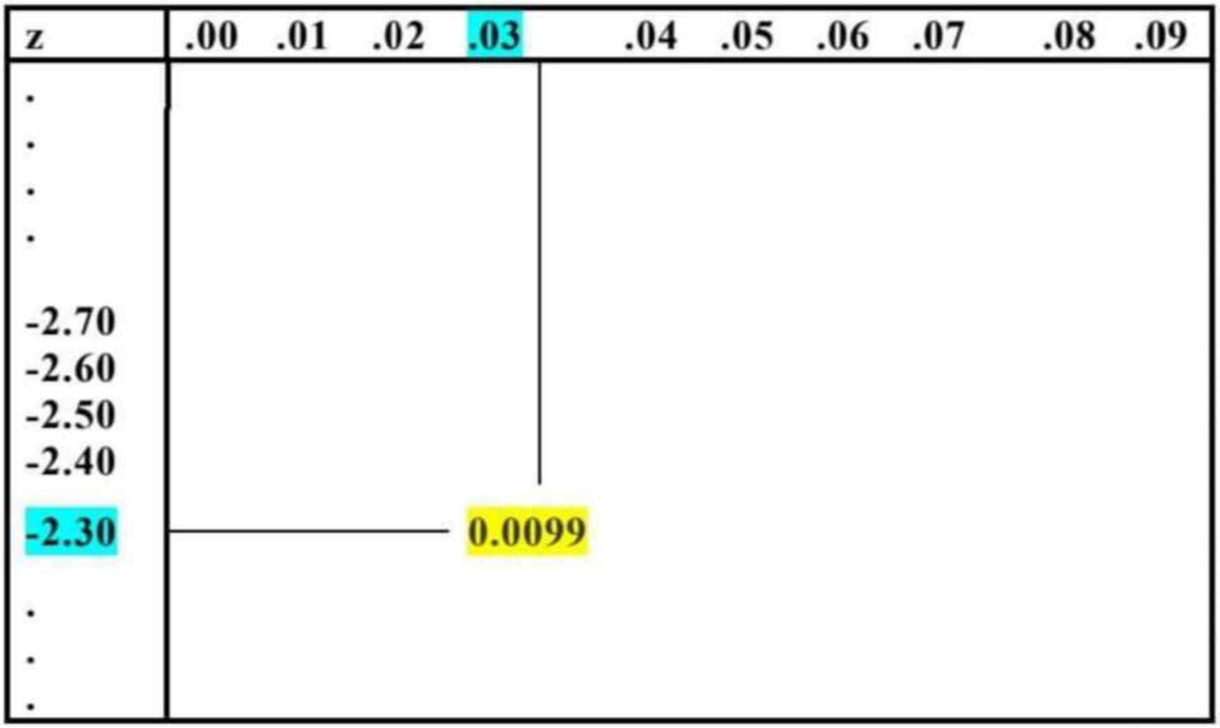
ويكون الاحتمال المطلوب هو $p(z < 1.57) = f(1.57) = 0.9418$

٢. المساحة اسفل المنحنى العبرة عن الاحتمال $p(z < -2.33) = f(-2.33)$ الموضحة كالتالي

$$p(z < -2.33)$$



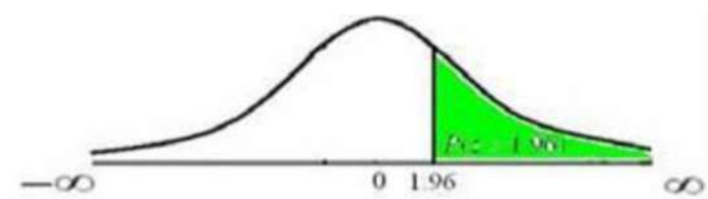
شكل رقم (٧)



شكل رقم (٨)

ومن ثم يكون $p(Z < -2.33) = 0.0099$

3. تحدد الساحة المعبرة عن الاحتمالات $p(Z > 1.96)$ كالتالي



شكل رقم (٩)

وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي حيث ان

$$p(z > 1.96) = 1 - p(z > 1.96) = 1 - f(1.96)$$

وبالكشف في جدول بنفس الطريقة السابقة على 1.96 نجد ان

$p(z > 1.96) = 0.9750$,lk ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو

$$p(z > 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$$

المصادر

[1]-محمد ابن ابراهيم عقيل –نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها –كلية التربية جامعة الملك –النشر العلمي و المطابع جامعة الملك سعود -٢٠٠٠م

[2]-الدكتور عبد الحليم عشماوي ، صلاح جلال ،محمد حسين صادق –الاحصاء الحيوي وتصميم التجارب –مكتبة الاكاديمية

[3]-جبار عبد مضحي – مقدمة في نظرية الاحتمالات –الطبعة الاولى ٢٠١١م –دار المسيرة للنشر والتوزيع

[4]منتهى خضير عباس. "طريقة لايجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الاسي المختلط". *Journal of Economics and Administrative Sciences* 14.51 (2008): 281-28

[5]. منتهى خضير عباس. (٢٠٠٨). طريقة لايجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الاسي المختلط. *Journal of Economics and Administrative Sciences*, *14*(51), 281-281.

[6]. منتهى خضير عباس. طريقة لايجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الاسي المختلط. *Journal of Economics and Administrative Sciences*, 2008, 14.51: 281-281.

[7]. سمان، وسيلة. "مطبوعة في الإحصاء ٢: موجهة لطلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية تجارية و علوم التسيير) ".(٢٠٢١.

[8]. سمان، وسيلة. (٢٠٢١). مطبوعة في الإحصاء ٢: موجهة لطلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية تجارية و علوم التسيير.

[9]. سمان، وسيلة. مطبوعة في الإحصاء ٢: موجهة لطلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية تجارية و علوم التسيير. ٢٠٢١.

[10]. العوض, et al. *إشتقاق بعض الخواص الإحصائية للتوزيعات الإحتمالية البارامترية*. 2016. PhD Thesis. جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا.

[11]. العوض، سناء هجو، عطية، قصي محمد، خلف الله, & هاشم مرسال). ٢٠١٦. (*إشتقاق بعض الخواص الإحصائية للتوزيعات الإحتمالية البارامترية* (Doctoral dissertation, جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

[12]. محمد السيد بدوى، هدى. "نموذج إحصائي مقترح لتسعير أخطار المعدات الساحبة بهيئة السكك الحديدية المصرية A proposed statistical model for pricing the risks of tug equipment at the Egyptian Rail Authority." *المجلة المصرية للدراسات التجارية* 46.3 (2022): 451-500.

[13]. محمد السيد بدوى، ه. (٢٠٢٢). نموذج إحصائي مقترح لتسعير أخطار المعدات الساحبة بهيئة السكك الحديدية المصرية A proposed statistical model for pricing the risks of tug equipment at the Egyptian Rail Authority. *المجلة المصرية للدراسات التجارية*, *46*(3), 451-500.

[14]. محمد السيد بدوى، هدى. نموذج إحصائي مقترح لتسعير أخطار المعدات الساحبة بهيئة السكك الحديدية المصرية A proposed statistical model for pricing the risks of tug equipment at the Egyptian Rail Authority. *المجلة المصرية للدراسات التجارية*, 2022, 46.3: 451-500.