وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

الاستكمال الداخلي وتقريب كثيرات الحدود

بحث تقدم به الطالب

زين العابدين هاشم

كأحد متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة – جامعة بابل

إشراف

م.م. فاطمة علي عبد الحسين

1444 هـ

2023م

بسم الله الرحمن الرحيم

" قالوا سُبحانَك لا عِلمَ لنَا

إلا ما عَلمتَنا إنَكَ أنتَ العَليمُ الحكيمُ "

صدق الله العظيم

(سورة البقرة : آية 32)

الإهــداء

إلى ...معلم البشرية ومنبع العلم .. إلى سيد خلق الله ، رسول الله مُحَمَّد بن عبدالله (صلى الله عليه وعلى آله الطيبين الطاهرين.)

إلى ...من شقى لأنعم   بالراحة وعلمني النجاح والصبر في مواجهة الصعاب ...والدي حفظه الله.

إلى ... من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها فتكسوني بحنانها لتخفف من آلامي ... إلى رمز الحب وبلسم الشفاء ...إلى حبيبتي الاولى والدتي امد الله في عمرها.

إلى...الشموع التي أضاءت درب مسيرتي أحبائي في الحياة... اخوتي وأخواتي.

أهدي جهدي المتواضع.

الباحث

جدول المحتويات

ملخص البحث

تطرقنا في هذا البحث حول الاخطاء من حيث مصادرها وطرق تمثيلها والى مفهوم الاستكمال الداخلي وعرضنا الاستكمال الداخلي وكثيرة حدود لاكرانج وكذلك الفروق المنقسمة سواء فروق نيوتن الامامية وفروق نيوتن التراجعية وكذلك استكمال هرمايت واستكمال الشريحة التكعيبية .

مقدمة

إكتشف طريقة الاستكمال العالم الهندي القديم *آرياباتا* حينما كان يقيس أطوال الأقواس المناظرة للزوايا في الدائرة حيث وصل الي الاستكمال من الدرجة الثانية.

ويعتبر **الاستكمال** الرياضي الموضوع الأبرز في التحليل العددي ، إذ يشكل قلب ونواة التحليل العددي الكلاسيكي. وذلك لسببين رئيسيين، السبب الأول يعود لحاجتنا المستمرة في البحث عن قيمة لدالة من بيانات مجدولة أثناء معظم المسائل الحسابية، أما في تلك المسائل والنقاشات الغير مجدولة فلكي نجد قيمة للدالة عند واحدة أو أكثر من النقاط الغير مدرجة في جدول البيانات، فلابد لنا من أن نستكمل تلك الدالة ونستخدم طرق **الاستكمال** .والأكثر من ذلك أن الحاجة **للاستكمال** تكمن في كون أن البيانات المجدولة التي تُعطى إلينا في معظم المسائل تكون لها من الدقة العالية الشيء الكثير، حتى وإن كانت بيانات محدودة. لذلك قدم التحليل العددي الكلاسيكي مجموعة متطورة جدا من الطرق المختلفة للاستكمال الرياضي. أما بالنسبة للسبب الثاني لأهمية **الاستكمال** الرياضي فيعود لكون أن معظم الطرق العددية الكلاسيكية في شتى القطاعات قد تم استنتاجها واشتقاقها من طرق **الاستكمال** (Interpolation Formulas[الإنجليزية])، فتلك الطرق العددية المستخدمة في الاشتقاقات، تكاملات المعادلات التفاضلية العادية، المعادلات التربيعية، وغيرها من قطاعات التحليل العددي الكلاسيكي قد طُورت واشتُقّت مباشرةً انطلاقًا من طرق **الاستكمال** الرياضي. بالرغم من أن الطرق المستخدمة في التحليل العددي الحديث لا تعتمد ذاك الاعتماد الكبير على طرق **الاستكمال**؛ لوجود طرق أخرى اشتُقت منها إلا أن هذا لا يتعارض مع الدور الكبير والفائدة الجمة **للاستكمال** وطرق **الاستكمال**.

الاستكمال العددي هو أسلوب رياضي يستخدم لتقدير أو تقريب قيمة دالة في نقطة داخل نطاق معين بناءً على نقاط البيانات المعروفة. إنه مفيد بشكل خاص عندما يكون لدينا مجموعة من نقاط البيانات المنفصلة ونريد تقدير قيم الدالة في نقاط وسيطة أو مواقع لا نملك فيها قياسات مباشرة. يستخدم الاستكمال بشكل شائع في مجالات مختلفة مثل الهندسة ورسومات الكمبيوتر وتحليل البيانات والنمذجة العلمية.

يعتمد اختيار طريقة الاستكمال على طبيعة البيانات والدقة المطلوبة و عوامل مثل خصائص البيانات ومتطلبات السلاسة والكفاءة الحسابية ووجود أي افتراضات أساسية. من المهم مراعاة القيود والافتراضات الخاصة بكل طريقة لضمان نتائج استكمال دقيقة وموثوقة

يعد الاستكمال أداة قوية لتقدير القيم ضمن نطاق معين بناءً على البيانات الموجودة. يسمح لنا بملء الفجوات والتنبؤ بالقيم المفقودة وإنشاء تمثيل مستمر للبيانات.

الفصل الاول
التمهيد

1- حساب الأخطاء :

إن التحليل العددي يهتم بتحليل صفات الطرق العددية والأخطاء المحتملة، ويتم حساب الخطأ المحتمل وقوعه في حل أي طريقة من الطرق المختلفة التي توصل إلى الحل المطلوب ، وفي ضوء المقارنة يتم اختيار الطريقة التي تحقق الدقة المطلوبة في أقل خطوات ، ولذلك كان من الضروري فهم مصادر الاخطاء وطرق تحديدها.

ومن مصادر الأخطاء هي:

1) خطأ المعطيات: ينتج عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية الغير دقيقة بشكل كافي أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل مستخدمين

2) خطأ الطريقة: ينتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلا بعلاقة أخرى أبسط منها . ومثال ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف مثلا في حساب قيمة التكامل المحدود

3) خطأ القطع ينتج عن اعتبار أن المجموع السلسلة غير المنتهية مثلا هو عدد حدودها.

(4) أخطأ التقريب: تنتج عن الحاسب نفسه فمثلا لنفرض أن لدينا حاسب بحيث أن كل عدد فيه يحتوي على خمسة أرقام فقط وإننا نريد جمع العددين 9.2654 و 7.1625 ، إن المجموع هو 16.4279 وهو يحتوي على ستة أرقام عندئذ الحاسب لا يستطيع تخزين هذه الأرقام وبالتالي يقوم بتدوير الأرقام الستة إلى 16.428

أخيراً هناك أخطاء مهملة ، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما، مقارنة بشخص أخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

يمكن أن تعبر عن الأخطاء عادة بالطرق التالية:

الخطأ المطلق:

يعرف بأنه الفرق بين القيمة المحسوبة و القيمة المضبوطة وقد نعبر عنه بالقيمة المطلقة أي أن:

الخطأ المطلق = القيمة المحسوبة − القيمة المضبوطة

والقيمة المطلقة للخطا = | القيمة المحسوبة − القيمة المضبوطة |

الخطأ النسبي:

يعرف بأنه خارج قسمة الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة أو القيمة المحسوبة باعتبارها قريبة منها وعادة ما يعبر عنه بالقيم المطلقة أيضا ، أي أن:

$$\text{الخطأ النسبي} = \frac{\text{القيمة المحسوبة} - \text{القيمة المضبوطة}}{\text{القيمة المضبوطة}}$$

$$\text{والقيمة المطلقة للخطأ النسبي} = \left| \frac{\text{القيمة المحسوبة} - \text{القيمة المضبوطة}}{\text{القيمة المضبوطة}} \right|$$

الخطأ المئوي:

يعرف بأنه الخطأ النسبي مضروبا في 100 . وأحيانا يسمى النسبة المئوية للخطأ ، أي ان : النسبة المئوية للخطأ = الخطأ النسبي × 100

مثال (1 – 1)

أحسب قيمة الخطأ باعتبارها خمسة ثم تسعة حدود المتتالية التالية التي تمثل الثابت e

$$y = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

المضبوطة حيث ان قيمة : e=2.7183

الحل/

n	y_n	آ	y_n
0	1.000	5	2.7167
1	2.000	6	2.7181
2	2.5000	7	2.7183
3	2.6667	8	2.7183
4	2.7084	9	2.7183

فإذا استعملت n=5 حدود فإن خطأ القطع

$$y - y_s = 2.7183 - 2.7167 = 0.0016$$

فإذا استعملت $n = 9$ حدودها فإن خطا القطع

$$y - y_9 = 2.7183 - 2.7183 = 0.0000$$

أما خطا التدوير فإنه يحصل بأستعمال عدد معين من المراتب الكسرية في الحساب

2- تمثيل الدوال ومتسلسلات القوى:

تعتبر متسلسلات القوى وسيلة مناسبة لتعبير عن العديد من الدوال ,

تعريف (1-1): (حدود نيوتن – للفروق الأمامية)

نفرض أن لدينا مجموعة بيانات للمتغير بصورة زوج مرتب $(\mathrm{x_i}\, , f x_i)$

وان $i = 0,1, \ldots., n$

$x_i - x_{i-1}$ =h , i=`,….,n

نعرف مؤثر الفرق الامامي Δ على الدالة ب كما يلي:

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

ولنرمز للمقدار (x_i) بالرمز يصبح الفرق:

$$\Delta f_i = f_i + f_i \qquad (*)$$

أما الفرق الثاني فهو

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i)$$
$$= \Delta(f_{i+1})$$
$$= 1f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

وبنفس الطريقة نتحصل على الفرق الثالث.

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

وبصورة عامة

$$\Delta^n n f_i = f_{i+n} - n f_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{i+n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{i+n-3} + \ldots + (1)$$

لنعد الى الصيغة (*) وعند x_0

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

أو

$$\boldsymbol{f_i = (1 + \Delta) f_0}$$

وهذا ينطبق على Δ^2 ايضا حيث

$$\boldsymbol{f_2 = (1 + \Delta)^2 f_0}$$

وهكذا فأن

$$\boldsymbol{f_n = (1 + \Delta)^n f_0} \qquad (**)$$

وبقك القوس في (**) نحصل على

$$f_n = f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \ldots + \Delta^n f_0 (***)$$

الصيغة (***) تبين اننا يمكن ان نجد قيمة الدالة f عند النقطة x_n باستخدام معلومات عن الدالة عند x_0 فقط.

وان تعميم هذه الصيغة لتشمل جميع النقاط بما فيها الكسور السالبة والموجبة فنقوم بتبديل ... $n = 1,2$ بـ s فتصبح الصيغة (***) بدلالة s

$$= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \cdots (2)$$

$$s = \frac{x_n - x_0}{h}, h = \Delta x$$

نسمي الصيغة (2) بحدودية نيوتن للفروق الامامية ونرمز لها بـ$\mathrm{P_n}(x)$

تعريف 2: متعددة حدود لاكرانج

اذا كانت $x_0, x_1, \dots . x_n$ أعداد مختلفة عددها (n+1) و f دالة قيمتها معطاة عند هذه الأعداد فإن

كثيرة حدود لانكرانج تعطى كمايلي

$$P(x) = f(x_0)L_o(x) + f(x_1)L_1(x) \dots . f\ f(x_n)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) \quad (3)$$

عندما تكون

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots \left(x - x_{k_{-1}}\right)(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \quad . K = 0{,}1 \dots . nk$$

لتكن $\boldsymbol{k = 0, 1, \dots n}$

الفصل الثاني

الاستكمال الداخلي

1- الاستكمال الداخلي وكثيرة حدود لاجرانج Interpolation and the lagrange Polynomial

لمن لم تكن كثيرات حدود تايلور مناسبة للاستكمال الداخلي، فهناك حاجة إلى طرائق بديلة. ونحصل في هذا الفصل على كثيرات حدود للتقريب تحدد بسهولة من خلال توصيف نقاط معينة على السطح .

إن مشكلة تحديد كثرة حدود من الرتبة واحد تمرّ عبر نقاط مختلفة (x_1, y_1) و (x_0, y_0) هي نفسها عند تقريب الدالة f , حيث $f(x_0) = y_0$ و $f(x_1) = y_1$ من خلال الاستكمال الداخلي بداية نعرف الدوال

بكثيرة حدود من الرتبة 1

بداية نعرف الدوال

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \text{ و } L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

ومن ثم نعرف

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

وحيث إن $L_1(x_1) = 1$ و $L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0$

يكون لدينا $P(x_0) = 1 . f(x_0) + 0 . f(x_1) = f(x_0) = y_0$

و $P(x_1) = 0 . f(x_0) + 1 . f(x_1) + f(x_1) = y_1$

وبذلك فان P هي الدالة. الخطية الوحيدة التي تمر عبرها (x_0, y_0) و (x_1, y_1) لتعميم مفهوم الاستكمال الداخلي الخطي ندرس انشاء كثيرة حدود رتبتها لاتزيد عن n وتمر بعدد n+1 من النقاط $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \dots, (x_n, f(x_n))$ نحتاج في هذه الحالة الى انشاء دالة $L_{n,k}(x)$ ، $k = 0,1, \dots, n$ مع خاصية كون $L_{n,k}(x_i) = 0$ عندما $i \neq k$ و $L_{n,k}(x_k) = 1$

ولتحقيق $L_{n,k}(x_i) = 0$ لكل $i \neq k$ ، يتطلب الامر تضمين بسط $L_{n,k}(x)$ للمقدار

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

ولتحقيق $L_{n,k}(x_k) = 1$ ، فإن بسط $L_{n,k}(x)$ يجب أن يساوي هذا المقدار عند $x = x_k$ وعندئذ

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

من السهولة توضيح كثيرة حدود الاستكمال الداخلي إذا ماعرفت صيغة $L_{n,k}$. وتدعى كثيرة الحدود هذه "كثيرة حدود لاجرانج النوني الاستكمال الداخلي nth Lagrange interpolating polynomial " وتعريفها ضمن المبرهنة الآتية.

مبرهنة 1/ اذا كانت $x_0, x_1, \ldots., x_n$ اعدادا مختلفة عددها $n+1$ و كانت f دالة قيمها معطاة عند هذه الاعداد، فإنه يوجد كثيرة حدود وحيدة P(x) لا تزيد رتبتها عن n، وتحقق

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ لكل } k = 0,1, \ldots., n$$

كثرة الحدود هذه هي

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,K}(x) \qquad (1)$$

حيث ان لكل $k = 0,1, \ldots \ldots \ldots n$ لدينا

$$L_{n,K}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{k_{-1}})(x-x_{k+1}) \ldots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \ldots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_n) \ldots (x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

سنكتب$L_{n,k}(x)$ بصيغة $L_k(x)$ للسهولة حينما لا يوجد اي مشكلة بشأن درجته .

مثال1/ باستخدام الأعداد (أو النقاط) $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4$ فان ايجاد كثيرة حدود الاستكمال الداخلي الثاني لـ $f(x) = 1/x$ يتطلب منا تحديد معاملات كثيرات الحدود $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ وهي وفق الصيغة المتداخلة

$$L_0(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-4.25)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

وحيث إن

$$f(x_0) = f(2) = 0.5 \text{ ، } f(x_1) = f(2.5) = 0.4 \text{ و } f(x_2) = f(4) = 0.25$$

وحيث ان $f(x_0) = f(2) = 0.5$, $f(x_1) = f(2.5) = 0.4$ و $f(x_2) = f(4) = 0.25$

يكون لدينا

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) L_k(x)$$

$$= 0.5\big((x-6.5)x+10\big) + 0.4\frac{(-4x+24)x-32}{3} + 0.25\frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

$$= (0.05x - 0.425)x + 1.15$$

والتقريب الى $f(3)=\frac{1}{3}$ سيكون $f(3) \cong p(3) = 0.325$.

الخطوة الآتية هي حساب الحد المتبقي أو حد الخطأ الداخل في تقريب دالة من خلال كثيرة حدود استكمال داخل. لقد أجري ذلك في المبرهنة الآتية.

مبرهنه 2/ افترض أن $x_0, x_1, \dots \dots, x_n$ أعداد مختلفة في الفترة [a,b] $f \in C_{n+1}$. عندئذ لكل x ينتمي للفترة [a,b] يوجد عدد $\xi(x)$ (عادة ما يكون غير معلوم) في الفترة (a,b) يحقق

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \qquad (2)$$

مثال 2/ يتضمن جدول (1) قيم الدالة عند نقاط مختلفة. وستقارن التقريبات لـ f (1.5) الناتجة من كثيرات حدود لاجرانج المختلفة . وحيث إن 1.5 تقع ما بين 1.3 و 1.6 فإن أنسب كثيرة حدود خطية تستخدم $x_0 = 1.3$ و $x_1 = 1.6$ وقيمة كثيرة حدود الاستكمال الداخلي عند 1.5هي

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)} f(1.3) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)} f(1.6)$$

$$= \frac{(1.5-1.6)}{(1.3-1.6)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)}{(1.6-1.3)}(0.4554022) = 0.5102968$$

ويمكن قبول استخدام اثنتين من كثيرات الحدود من الرتبة 2إحداهما باستخدام $x_0 = 1.3$, $x_1 = 16$, $x_2 = 1.9$ التي تعطي

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)}(0.6200860) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)}(0.4554022) + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)}(0.2818186) = 0.5112857$$

والاخرى باستخدام $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$ ،تعطي $P_2(1.5) = 0.5124715$ ويوجد خياران مقبولان لكثيرة الحدود حالة الرتبة الثالثة ايضا أحداهما باستخدام $x_0 = 13$, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.9$, $x_3 = 2.2$ ونحصل على الاخر من خلال استخدام $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$ ، وتعطي $P_3(1.5) = 0.5124715$

وتستخدم كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة الرابعة مداخلات الجدول جميعها . ومع $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$, $x_3 = 1.9$, $x_4 = 2.2$

فإن التقريب هو $P_4(1.5) = 0.5118200$ وحيث ان $P_3(1.5)$, $P_3(1.5)$, $P_4(1.5)$ تتفق جميعها ضمن 2×10^{-5} من الوحدات فإننا نتوقع هذه الرتبة من دقة هذه التقريبات . ونتوقع أن يكون P أكثر التقريبات دقة أيضا لكونه يستخدم أغلب البيانات الموجودة .

والدالة التي نحن يصدد تقريبها هي دالة بيسيل من النوع الاول من الرتبة صفر وقيمتها عند 1.5 معلومة وهي 0.5228277 لذا فإن الصورة الدقيقة للتقريبات هي

وعلى الرغم من أن $P_3(1.5)$ هو التقريب الأ أنه لم تكن لدينا معلومات عن القيمة الحقيقية لـ $f(1.5)$أمما يجعلنا نقبل $P_4(1.5)$ على أنه أحسن تقريب لكونه يتضمن اغلب البيانات حول الدالة أن حد خطأ لاجرانج المشتق ضمن المبرهنة (2) لايمكن تطبيقه هنا لعدم توفر معلومات عن المشتقة الرابعة لـ f ولسوء الحظ هذه هي الحالة عموما .

ملاحظة/ تكمن صعوبة استكمال لاجرانج الداخلي في صعوبة تطبيق حد الخطأ وأخيرا فإن رتبة كثيرة الحدود المطلوبة لدقة محددة لاتكون معروفة عموما حتى تحدد الحسابات . والاجراء المتبع هو أن نحسب النتائج المستخلصة من مختلف كثيرات الحدود حتى ظهور توافق مقبول وقد أجري في المثال السابق أيضا. وعلى أي حال فإن العمل المنجز في حساب التقريب من خلال كثيرة الحدود الثانية لا يقلل العمل المطلوب لحساب التقريب الثالث وان ايجاد التقريب الرابع ليس أسهل عندما يكون الثالث معلوما وهكذا والآن سنشتق كثيرات حدود التقريب بأسلوب يستخدم الحسابات السابقة لمزايا أكبر.

تعريف 2/ ليكن f دالة معرفة على $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ وافترض أن $m_1, m_2, \dots m_k$ عبارة عن k من الاعداد الصحيحة المختلفة حيث $0 \le m_i \le n$ لكل i. سنرمز لكثيرة حدود لاجرانج التي تساوي f(x) عند k من القيم $x_{m1}\ , x_{m2}\ , \dots\ x_{mk}$ بالرمز $p_{m_1,m_2}\ , \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. m_k(x)$

مثال 3/ إذا كان $x_0 = 1\ , x_1 = 2\ , x_2 = 3\ , x_3 = 4\ , x_4 = 6$ و $f(x) = e^x$ فإن $P1,2,4(x)$كثيرة الحدود التي تتوافق مع $f(x)$ عند $x_1 = 2, x_2 = 3\ , x_4 = 6$ أي أن

توضح النتيجة الاتية طريقة لتوليد تقريبات كثيرة حدود لاجرانج توليدا متكررا

مبرهنة 3/ لتكن الدالة f معرفة عند $x_0\ , x_1, \dots\ x_k$ وx_i, x_j عددين مختلفين في هذه المحجموعة عندئذ

$$p(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,..,j-1.f+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\dots,1-i,i+1,\dots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

2- الفروقات المنقسمة Divided Differences

استخدم الاستكمال الداخلي المكرر لتوليد تقريبات كثيرة حدود بنجاح ومن الرتبة العالية عند نقطة محددة. وتستخدم طرائق الفرق المنقسم المطروحة ضمن هذا الفصل وبنجاح لكثيرات توليد الحدود نفسها. وستكون معالجتنا لطرائق الفرق المنقسم مختصرة؛

افترض أن $Pn(x)$ كثيرة حدود لاجرانج النونية والمتوافقة مع الدّالة f عند الاعداد المميزة $x_0 x_1, \dots, x_n$ان تمثيلات جبرية بديلة تكون مفيدة في حالات معينة. على الرغم من وحدانية كثيرة الحدود هذه، تستخدم فروقات f المنقسمة بالنسبة إلى $x_0 x_1, \dots, x_n$ للتعبير عن $P_n(x)$ بالصيغة

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_{1)+} \dots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \qquad (1)$$

لثواب مناسبة $a_0, a_1, \dots \dots, a_n$

ولتحديد اول هذه الثوابت a_n لاحظ أنه إذا كتب $P_n(x)$ بصيغة (1) فإن حساب $P_n(x)$ عند a_n يترك فقط الحد الثابت a_n؛ أي أن

$$a_n = P_n(x_0) = f(x_0)$$

وبالمثل، عند حساب $P_n(x)$ عند x_1 ، فالحدود اللاصفرية في حساب $P_n(x_1)$ هي حدود الثوابت والحدود الخطية

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$$

وبذلك
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(2)

ونقدم الآن تعبير الفرق المنقسم الذي يشبه تعبير أيتكن Δ^2 ويرمز إلى الفرق المنقسم الصفري *zeroth divded difference* للدالة f بالنسبة إلى x_i بالرمز $f(x_i)$، وهو عبارة عن قيمة f عند x_i.

$$f[x_i] = f(x_i)$$

(3)

وبقية الفروقات المنقسمة تعرف استقرائياً، فالفرق المنقسم الأول لـ f بالنسبة إلى x_i و x_{i+1} ويرمز إليه بـ $f(x_i, x_{i+1})$ ويعرف بالصيغة :

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[(x_i)]}{x_{i+1} - x_i}$$

(4)

والفرق المنقسم الثاني $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ يعرف بالصيغة:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] - f[(f(x_i, x_{i+1})]}{x_{i+2} - x_i}$$

وبنفس الطريقة، بعد أن تحدد أول $(k-1)$ من الفروقات المنقسمة

$$f\left[(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+i,} x_{i+i})\right] \text{و} (f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+i} - i]$$

فإن الفروق المنقسم من الرتبة k نسبة الى $x_{i,} x_{i+1}, x_{i+2} \dots, x_{i+k}$ يعطي بالصيغة

$$f[x_i, x_{i+1} \dots., x_i + i - x_i + k] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots x_{i+k}] - f[(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})]}{x_{i+k} - x_i}$$

(5)

وتنتهي العملية مع الفرق منقسم واحد من الرتبة n وهو

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots\ x_n - 1]}{x_n - x_0}$$

مع هذه الصيغة، يمكن تكرار صياغة (2) على الصورة $= f(x_0, x_1)$ a_1، وتوجد كثيرة حدود استكمال داخلي في الصيغة (1)

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-}1)$$

ووفق المتوقع من حساب a_0 و a_1، فإن الثوابت المطلوبة هي :

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

جدول 1

x	$f[x]$	الفروق المنقسمة الاولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	$f[x_0]$ $f[x_1]$ $f[x_2]$ $f[x_3]$ $f[x_4]$ $f[x_5]$	$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ $f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$ $f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$ $f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$ $f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$	$f[x_0,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ $f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ $f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$ $f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$ $f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$ $f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_0}$

لكل $k=0,1 \dots ,n$ وبذلك يمكن اعادة كتابة $P_n(x)$بالصيغة

$$P_n(x)=f\ [x_0]+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\dots,x_k][x-x_0]\dots[x-x_{k-1}] \quad (6)$$

وقيمة $f[x_0,x_1,\dots.,x_k]$ مستقلة عن ترتيب الأعداد $x_0,x_1,\dots.,x_k$، إن توليد الفروقات المنقسمة مبين في جدول (1) ويمكن تحديد اثنين من الفروقات المنقسمة الرابعة ، وفرق منقسم خامس من هذه البيانات أيضا.

مثال1

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_{i}]$	$f[x_{i-3},\dots,x_i]$	$f[x_{i-4},\dots,x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680865	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

إن معامل كثيرة حدود استكمال داخلي ضمن القطر في الجدول. وكثيرة الحدود هي

$$P_4(x)=0.7651977-0.4837057(x-1.0)-0.1087339(x-10)(x-1.3)$$

$$+0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)$$
$$+0.001825(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$

لاحظ ان القيمة $P_4(1.5)=0.5118200$ تتفق والنتيجة في الفصل (1.3) من المثال (1.3)، ويجب أن يكون لهما كثيرة الحدود نفسها أيضاً.

إن مبرهنة القيمة الوسطى تطبق في الصيغة (8.3) عندما i=0

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

لتشير إلى أنه عند وجود $f`$، فإن $f[x_0,x_1]=f`(\xi)$ لعددٍ ما ξ مابين x_1,x_0 تعمل المبرهنة الآتية على تعميم هذه النتيجة.

مبرهنة 1/ لتكن $f\in c^n[a,b]$ ولتكن $x_0,x_1,\dots,x_n$ أعداداً مختلفة تنتمي للفترة $[a,b]$. عندئذ يوجد عدد ξ حيث $\xi\in(a,b)$ (عادة غير معلوم) بحيث يكون

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^n(\xi)}{n!}$$

يمكن وضع صيغة نيوتن للفرق المنقسم بصيغة مبسطة عندما $x_0,x_1,\dots,x_n$ مرتبة على التوالي بمسافات متساوية. في هذه الحالة نقدم الصيغة $h=x_{i+1}-x_i$ لكل $i=0,1,\dots,n-1$ وندع $x=x_0+sh$. لذا يمكن كتابة الفرق $x-x_i$ بصيغة $x-x_i=(s-i)h$. وأخيراً فالصيغة (10.3) تصبح

$$P_n(x)=P_n(X_0+sh)=f[x_0]+shf[x_0,x_1]+s(s-1)h^2f[x_0,x_1,x_2]+\cdots$$
$$+s(s-1)\dots(s-n+1)h^"f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$
$$=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n}s(s-1)\dots(s-k+1)h^kf[x_0,x_1,\dots,x_k]$$

وبأستخدام صيغة ذات الحدين

$$\binom{s}{k}=\frac{s(s-1)\dots s-k+1}{k!}$$

نستطيع كتابة الصيغة عن $P_n(x)$ على نحو مدمج وعلى الصورة الآتية:

$$P_n(x)=P_n(x_0+sh)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}k!\,h^kf[x_0,x_i,\dots,x_k] \quad (7)$$

إن صيغة نيوتن للفرق الأمامي $Newton\ forward-difference\ formula$ تُنشأ باعتماد تعبير الفرق الأمامي Δ الذي تناولناه في طريقة أيتكن Δ^2 . ومع هذه الصيغة

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f(x_0)$$
$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)}{h}\right]=\frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

وعموماً

$$f[x_0, x_1, \dots x_k] = \frac{1}{k!\, h^k} \Delta^k f(x_0)$$

وحيث إن $f[x_0] = f[x_0]$. فالصيغة (7) لها الصيغة الآتية :

صيغة نيوتن للفرق الامامي $Newton\ Forward - difference\ Formula$

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \qquad (12.3)$$

تعريف 1 / إذا كان لدينا المتتالية $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ فنرمز للفرق المتراجع بالرمز $\nabla \mathrm{P_n}$ (يقرأ $nabla\ P_n$)،

حيث $\nabla \mathrm{P_n} = P_n - P_{n-1}$ لكل $n \geq 1$

وتعرف القوى العليا إرجاعياً كلآتي:

$\nabla^k P_n = \nabla(\nabla^{k-1} P_n)$ لكل $k \geq 2$

يؤدي تعريف 1 إلى

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

وعموماً

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!\, h^k} \nabla^k f(x_n)$$

وأخيراً

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2} \nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!}\ \nabla^n f(xn)$$

واذا وسعنا صيغة ذات الحدين لتشمل قيم s جميعها يجعل

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!}$$

فإن

$$P_n(x) = f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

تعطي النتيجة الآتية:

صيغة نيوتن للفرق المتراجع $Newton\ Backward - Difference\ formula$

$$P_n(x) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \qquad (8)$$

جدول 3

		الفروق المنقسمة الاولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

جدول 4

		الفروق المنقسمة الاولى	الفروق المنقسمة الثانية	الفروق المنقسمة الثالثة	الفروق المنقسمة الرابعة
1.0	0.7651977				
		−0.4837057			
1.3	0.6200860		−0.1087339		
		−0.5489460		0.0658784	
1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
		−0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		−0.5715210			
2.2	0.1103623				

والصيغة باستخدام $h = 0.3, x_0 = 1.6, s = -\frac{1}{3}$ تصبح

$$f(1.5) = P_4\left(1.6 + \left(-\frac{1}{3}\right)(0.3)\right)$$

$$= 0.4554022 + (-\frac{1}{3})(\frac{0.3}{2})((-0.5489460) + (-0.5786120)$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^2 (0.3)^2(-0.0494433)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3(0.0658784 + 0.0680685)$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}-1\right)(0.3)^{4}(0.0018251)=0.5118200$$

3- استكمال هرمايت الداخلي Hermite Interpolation

كثيرات حدود التذبذب Osculating Polynomials تعمم كثيرات حدود تايلور وكثيرات لاجرانج كلها. لنفترض أن لدينا $n+1$ من الأعداد المختلفة $x_0 , x_1 , \dots , x_n$ في $[a,b]$ مع أعداد صحيحة غير سالبة $m_0 , m_1 , \dots , m_n$ و $m = \max\{m_0 , m_1 , \dots , m_n\}$. كثيرة حدود التذبذب التي تقرب الدالة $f \in c^m[a,b]$ عند x_i ولكل $i = 0, \dots , n$ هي كثيرة حدود بأقل رتبة مع خاصية كونها تتفق مع الدالة f واشتقاقاتها كلها من الرتبة تساوي أو أقل من m عند x_i. ورتبة كثيرة حدود التذبذب هذه تكون على الأكثر

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

وإن عدد الشروط المطلوب تحققها هو $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1)$ وكثيرة حدود من الرتبة M لها $M+1$ من المعاملات التي يمكن استخدامها لنحقق هذه الشروط

تعريف 1/ لتكن $x_0 , x_1, \dots , x_n$ أعداداً مختلفة عددها $n+1$ تنتمي الى الفترة $[a,b]$ ، وأن m_i عدد صحيح غير سالب يقابل x_i، و $i = 0,1, \dots , n$ أفترض أن $f \in c^m[a,b]$ ، بحيث $m = \max\_{0\le i\le n}$ إن كثيرة حدود التذبذب التي تقرب f هي كثيرة حدود $P(x)$ بأقل رتبة مع تكون $\frac{d^kP(x_i)}{dx^k} = \frac{d^kf(x_i)}{dx^k}$ ولكل $i = 0,1, \dots . n$ و $k = 0,1, \dots , m_i$

لاحظ أنه عندما $n = 0$، فإن كثيرة حدود التذبذب التي تقرب f هي كثيرة حدود تايلور من الرتبة m_0 لـ f عند x_0 وحينما $m_i = 1$ لكل i ، فإن كثيرة حدود التذبذب هي كثيرة حدود لاجرانج من الرتبة n التي تستكمل f داخليًّا على $x_0, x_1, \dots , x_n$.

وتعطي الحالة عندما $\mathrm{m_i} = 1$ لكل $i = 0,1, \dots , n$ كثيرات حدود هرمايت. وتتفق كثيرات الحدود هذه مع الدالة f عند $x_0, x_1, \dots , x_n$ ولدالة محددة f بالاضافة إلى ذلك، بما أن مشتقاتها الأولى تتفق ومثيلاتها في الدالة f، فإن لهما شكل الدالة نفسه $((x_i , f(x))$ في واقع توافق خطوط التماس لكثيرة الحدود وللدالة. ستقتصر دراستنا لكثيرات حدود التماس على هذه الحالة، ونفترض أولاً أن مبرهنة ما توضح صيغة كثيرات حدود هرمايت بالتحديد .

مبرهنة 1 / إذا كانت $f \in c^1[a,b]$ و$x_0, \dots , x_n \in [a,b]$ فإن كثيرة الحدود الوحيدة وبأقل رتبة المتفقة مع f و $f^\backprime$ عند $x_0, \dots , x_n$ هي كثيرة حدود هرمايت من الرتبة $2n+1$ على الاكثر

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f^\backprime(x_j)\widehat{H}_{n,j}(x)$$

حيث إن $H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L_{n,j}(x_j)]L_{n,j}^2(x)$ و $\widehat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L_{n,j}^2(x)$

وتمثل $L_{n,j}(x)$ كثيرة حدود من الرتبة n لمعامل لاجرانج من الرتبة j والمعرفة في الصيغة (1) بالإضافة إلى ذلك ، إذا كان $f \in c^{2n+2}[a,b]$ فإن

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi(x))$$

لبعض $\xi(x)$ (مجهولة عموماً) في الفترة (a,b).

مثال 1/ استخدمت كثيرة حدود هرمايت المتوافقة مع البيانات الموجودة في جدول (1) لإيجاد تقريب الى $f(1.5)$.

جدول 1/

$f`(x_K)$	$F(xk)$	xk	k
−0.5220232	0.6200860	1.3	0
−0.5698959	0.4554022	1.6	1
−0.5811571	0.2818186	1.9	2

نحسب أولاً كثيرات حدود لاجرانج ومشتقاتها. وهذا يعطي

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\ , L`_{2,0}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{175}{9}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\ , L`_{2,0}(x) = \frac{-200}{9}x + \frac{320}{9}$$

$$L_{2,2} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\ , L`_{2,2}(x) = \frac{100}{9}x - \frac{145}{9}$$

إن كثيرات حدود $H_{2,j}(x)$ و $\widehat{H}_{2,j}(x)$ هي

$$H_{2,0}(x) = [1-2(x-1.3)(-5)]\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$= (10x-12)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$H_{2,1}(x) = 1.\left(-\frac{100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$

$$H_{2,2}(x) = 10(2-x)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

$$\widehat{H}_{2,0}(x) = (x-1.3)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{175}{9}x + \frac{152}{9}\right)^2$$

$$\hat{H}_{2,1}(x) = (x - 1.6)\left(\frac{-100}{9}x^2 + \frac{320}{9}x - \frac{247}{9}\right)^2$$
$$\hat{H}_{2,2}(x) = (x - 1.9)\left(\frac{50}{9}x^2 - \frac{145}{9}x + \frac{104}{9}\right)^2$$

وأخيراً

$$H_5(x) = 0.6200860H_{2,0}(x) + 0.4554022H_{2,1}(x) + 0.2818186H_{2,2}(x) - 0.5220232\hat{H}_{2,0}(x) - 0.5698959\hat{H}_{2,1}(x) - 0.5811571\hat{H}_{2,2}(x)$$

$$H_5(1.5) = 0.6200860\left(\frac{4}{27}\right) + 0.4554022\left(\frac{64}{81}\right) + 0.2818186\left(\frac{5}{81}\right) - 0.5220232\left(\frac{4}{405}\right) - 0.5698959\left(-\frac{32}{405}\right) - 0.5811571\left(\frac{-2}{405}\right) = 0.5118277$$

نتيجة دقيقة لكل مدى

4- استكمال الشريحة التكعيبية ***cubic spline interpolation***

ركزت المواضيع السابقة على تقريب دوال عشوائية ضمن فترات مغلقة مستخدمة كثيرات الحدود. ولأن طبيعة كثيرات الحدود ذات الرتبة العليا متذبذبة، ولأن هذا التذبذب ضمن جزء من الفترة يمكنه تحفيز تذبذبات كبيرة ضمن كامل المدى، ويعمل المنهج البديل على تقسيم الفترة الى فترات جزئية، وإنشاء كثيرة حدود مختلفة عند كلفترة جزئية (عموماً). ويسمى التقريب بدوال من هذا النوع (التقريب بكثيرة حدود متقطعة)

تعريف 1/ لتكن الدالة f معرفة على $[a,b]$، عند النقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$ عندئذ يكون الاستكمال الداخلي للشريحة التكعيبية S للدالة f هو دالة تحقق الشروط الآتية:

أ- $s(x)$ كثيرة حدود تكعيبية، ويكتب $s_j(x)$ على الفترة $[x_j, x_{j+1}$ لكل $j = 0,1,\dots,n-1$

ب- $S_j(x_j) = f(x_j)$ و $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ لكل $j = 0,1,\dots,n-1$

ج- $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0,1,\dots,n-2$

د- $S`_{j+1}(x_{j+1}) = S`_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0,1,\dots,n-2$

هـ- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ لكل $j = 0,1,\dots,n-2$

و- تحقق إحدى المجموعات الآتية من شروط الحدود:

1. $s"(x_0) = s"(x_n) = 0.1$ (حدود طبيعية أو حرة).
2. $s'(x_0) = f'(x_0)$ و $S'(x_n) = f'(x_n)$ (حدود متشابكة).

مبرهنة 1/ اذا كانت f معرفة عند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ فإن لها استكمالاً داخلياً لشريحة طبيعية وحيدة s عند النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ بمعنى ان الاستكمالات للشريحة يحقق الشروط الحدودية $S''(a) = 0$ و $s''(b) = 0$.

المراجع

1) د. نشاط ابراهيم العبيدي, التحليل العددي، دار المسيرة ، الطبعة الاولى (1432هـ- 2011 ف)
2) د. سعد محمد فضيلة، د. النفاتي معمر الرويعي، التحليل العددي للمهندسين، منشورات جامعة الفاتح، دار الكتاب الجديدة المتحدة، الطبعة الأول – ف 2004 ، ف 2005)
3) J.douglas Faires , Rechard L Burden ، التحليل العددي ، ترجمة أ.د محمد صبحي ابو صالح (2014) م.
4) إيان جاكس ، كولن جد ، التحليل العددي ، ترجمة د. علي محمد إبراهيم ، د. محمد ماهر علي النجار ، منشورات جامعة الفاتح ، الطبعة الأولى (1992 م)