



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

مقدمة في خواص الزمر والمبرهنات المتعلقة بالتشاكل

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية للعلوم الصرفة/جامعة بابل

كجزء من متطلبات التخرج لنيل شهادة البكالوريوس

إعداد الطالبة

حنان علي خليف

بإشراف

م. م. عدي حاتم صاحب

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ
وَالْمُؤْمِنُونَ﴾

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيِّ الْعَظِيمِ

الإهداء

الى أصحاب الفضل الأول ... الشهداء جميعاً لولاكم لما كنا هنا
الى معلم الانسانية ونور العالمين، الى من كلفه الله بالهبة والوقار
نبينا محمد (صل الله عليه وآله وسلم)
الى من احمل اسمه بكل افتخار الى من علمني العطاء دون انتظار
والذي العزيز

الى منبع الحنان، الى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم
لجرحي الى أغلى الاحباب أمي

اخوتي واخواتيالى القلوب البريئة، الى رياحين حياتي

معلماتي ومدرساتي واستاذاتي واساتذتيالى من مهد طريق العلم

شُكر وتقدير

اود ان اعبر عن خالص امتناني لمشرفي الدكتور (م. م. عدي حاتم صاحب) ولتوجيهاته والتعليقات البناءة لهذا العمل والذي يعد جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس الجامعية لا يسعني سوى ان أقدم الشكر والعرفان للدكتور الفاضل.

كما اتقدم الى عمادة كلية التربية ورئاسة قسم الرياضيات بالشكر والعرفان لكل جهودهم التي بذلوها طوال سنوات دراستي واتقدم بالشكر الجزيل لجميع اساتذتي الافاضل الذين بذلوا كل ما في وسعهم ليسلكوا بي طريق العلم والمعرفة.

جدول المحتويات

الموضوع	الصفحة
الخلاصة	I
الفصل الأول مقدمة في خواص الزمر	
المقدمة	1
المفاهيم الأساسية في نظرية الزمر	1
الزمرة	4
خواص الزمرة	5
زمرة الجداء	7
الزمر الجزئية	12
الفصل الثاني التشاكل والتماثل في الزمر	
تعريف التشاكل بين الزمر	17
نواة التشاكل وصورته	17
خواص التشاكل	20
أنواع التشاكل	22
تطبيقات التشاكل والتماثل	26
تصنيف الزمر	28
الاستنتاج	30
المصادر	31

الخلاصة

يقدم الفصل الأول مفاهيم نظرية الزمر، مبتدئاً بتعريف العمليات الثنائية وصولاً إلى تعريف الزمرة وشروطها الأساسية كالتجميع ووجود المحايد والنظير. كما يستعرض الخواص الجبرية للزمر مثل قاعدة الانعكاس وقوانين الاختصار التي تمنع وجود قواسم للصفر وتضمن حل المعادلات الجبرية بشكل وحيد.

في الفصل الثاني مفهوم التشاكل والتماثل كأدوات جبرية تحافظ على البنية الهيكلية للعمليات الثنائية عند انتقال العناصر بين الزمر. ويستعرض الخواص الجوهرية للتشاكل وصورته، مع التركيز العميق على إيجاد النواة وإثبات كونها زمرة جزئية للتمهيد لبرهان مبرهنة التماثل الأولى.

الفصل الأول

مقدمة في خواص الزمر

1.1 المقدمة

العديد من الأبحاث والاكتشافات العلمية لم تكن لتتم لولا الزمرة، ويسمح لنا مبدأ الزمر القائم على تصنيف العناصر وعملياتها الثنائية على أساس طبيعتها، بالتعامل بمرونة مع الكيانات ذات الأصول الرياضية المتنوعة في الجبر المجرد وغيره مع الحفاظ على جوانبها البنوية الأساسية في هذا البحث سوف نتعرف على أهم المفاهيم المرتبطة بالزمر. [1]

1.2 المفاهيم الأساسية في نظرية الزمر

1.3 العمليات الثنائية: (Binary operation)

لتكن A مجموعة غير خالية، نقول إن $(*)$ عملية ثنائية (Binary operation) على A إذا كانت $(*)$ تطبيقاً من $A \times A$ إلى A ، أي إن $(x, y) \in A$ لكل $(x, y) \in A$ ، وسنكتب $x * y$ بدلاً من $(x, y)(*)$ ونقول إن A مجموعة مغلقة بالنسبة للعملية $(*)$. [6]

مثال (1.4):

نلاحظ أن $(+)$ عملية ثنائية على N ولكن $(-)$ ليست عملية ثنائية على N وذلك لأن $3, 8 \in N$ ولكن $3 - 8 = -5 \notin N$ ، أي إن N ليست مغلقة بالنسبة للعملية $(-)$.

إذا كانت $(*)$ عملية ثنائية على مجموعة A فإننا نسمي المرتب $(A, *)$ "نظاماً جبرياً" (algebraic system).

تعريف (1.5):

ليكن $(A, *)$ "نظاماً جبرياً":

1. نقول إن $(*)$ تجميعية (Associative) إذا كانت $x * (y * z) = (x * y) * z$ لكل $x, y, z \in A$

2. نقول إن $(*)$ إبدالية (Commutative) إذا كانت $x * y = y * x$ لكل $x, y \in A$

مثال (1.6):

كل من عمليتي الجمع والضرب على R أو $(R^+$ أو Q أو Z) إبدالية وتجميعية.

مثال (1.7):

لنكن $F(R)$ هي مجموعة التطبيقات من $R \rightarrow R$ ولتكن (\circ) هي عملية تحصيل التطبيقات. ونلاحظ أن (\circ) عملية تجميعية لكل من $x \in R$ ولكل $f, g, h \in F(R)$ لدينا:

$$\begin{aligned}[h \circ (g \circ f)](x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) \\ &= [(h \circ g) \circ f](x) \\ h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f\end{aligned}$$

ولكن (\circ) ليست عملية إبدالية على سبيل المثال إذا كانت $g(x) = x - 2$ $f(x) = x^2$ فإن:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 2) = (x - 2)^2 \neq x^2 - 2\end{aligned}$$

ولذا فإن $f \circ g \neq g \circ f$

مثال (1.8):

في النظام الجبري $(M_{mn}(R), (+))$ ، حيث $M_{mn}(R)$ هي مجموعة مصفوفات من الدرجة $m \times n$ على R وحيث $(+)$ عملية تجميعية وإبدالية لأن:

$$\begin{aligned}A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + B &= B + A\end{aligned}$$

لكل من $A, B, C \in M_{mn}(R)$

مثال (1.9):

في النظام $(Q^+, *)$ حيث $a * b = \frac{ab}{2}$ لكل $a, b \in Q^+$ العملية $(*)$ تجميعية وإبدالية لأنه لكل $a, b, c \in Q^+$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4} \\ (a * b) * c &= \frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4}\end{aligned}$$

وبالتالي العملية $(*)$ تجميعية.

$$a * b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b * a$$

ومنه العملية $(*)$ إبدالية.

مثال (1.10):

في النظام $(R^* \times R, *)$ حيث $(a, b) * (c, d)$ تكون * تجميعية لأن:

$$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + d) * (e, f) = (ace, b + d + f)$$

$$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + f) = (ace, b + d + f)$$

كذلك:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b + d) = (ca, d + b) = (c, d) * (a, b)$$

ملاحظات (1.11):

إذا كانت A مجموعة منتهية وتحتوي على عدد قليل من العناصر فإن إحدى الطرق المناسبة لتعريف عملية ثنائية عليها باستخدام جدول يسمى جدول كيلبي (Cayley's table).

على سبيل المثال:

إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$ فإن الجدول التالي يعرّف لنا عملية ثنائية (*) على A :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

ولإيجاد العنصر $y * x$ نبحث عن تقاطع الصف x مع العمود y .

ملاحظات (1.12):

إذا كانت (*) عملية ثنائية معرفة على مجموعة بواسطة جدول كيلبي فإنها تكون إبدالية إذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي.

1.13 الزمرة

تعريف (1.14):

لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن $(*)$ عملية ثنائية عليها، نسمي النظام الجبري $(S, *)$ زمرة إذا تحققت الشروط الآتية:

i. الخاصية التجميعية:

$$\forall a, b, c \in G: a * (b * c) = (a * b) * c$$

ii. وجود العنصر المحايد:

$$\exists e \in G: \forall a \in G: a * e = e * a = a$$

iii. وجود نظير للعناصر:

$$\forall a \in G \exists b \in G (a * b = b * a = e)$$

إذا كانت $(G, *)$ زمرة نقول إنها إبدالية أو أبيلية إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\forall a, b \in G; a * b = b * a$$

العنصر e في الفقرة (ii) من التعريف (1) وحيد ويسمى بالعنصر المحايد.

العنصر b في الفقرة (iii) من التعريف (1) وحيد ويسمى نظير العنصر a ويرمز له بالرمز a^{-1} . [6]

مثال (1.15):

إذا كانت Z مجموعة الأعداد الصحيحة فإن $(Z, +)$ تكون زمرة وهي أيضاً إبدالية.

مثال (1.16):

إذا كانت مجموعة R الأعداد الحقيقية فإن $(R, +)$ تكون زمرة.

مثال (1.17):

إذا كانت S مجموعة المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والعناصر مأخوذة من مجموعة الأعداد الصحيحة Z فإن S تكون زمرة تحت عملية جمع المصفوفات.

مثال (1.18):

إن مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة 3×3 وذات العناصر المأخوذة من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي يكون محدد كل منها لا يساوي الصفر تكون زمرة غير إبدالية تحت عملية ضرب المصفوفات.

مثال (1.19):

كل من $(Q, +)$ ، $(C, +)$ هي زمرة إبدالية بحيث 0 هو العنصر المحايد و $-a$ هو نظير العنصر a ، وكذلك كل من (C^*, \cdot) ، (R^*, \cdot) ، (Q^*, \cdot) تعد زمرة إبدالية حيث إن 1 هو العنصر المحايد و $\frac{1}{a}$ هو نظير العنصر a .

1.20 خواص الزمرة

إذا كانت G زمرة فإن لكل $a, b \in G$ لدينا:

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad .$$

البرهان:

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{وحيد فإننا نجد } aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

من الخاصية أعلاه: تثبت هذه الخاصية التناظر في إيجاد المعكوس، مما يبسط الحسابات الجبرية ويؤكد رياضياً أن عملية أخذ المعكوس هي عملية ارتدادية (Involution) تعيد العنصر إلى حالته الأصلية. [6]

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \quad .$$

البرهان:

نلاحظ أن

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = a(e)a^{-1} = aa^{-1} = e$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}(e)b = b^{-1}b = e$$

كما أنه: باستخدام وحدانية النظير نحصل على $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

من الخاصية أعلاه: تُعرف هذه القاعدة في الجبر بـ "قاعدة الانعكاس"، وهي أداة محورية لتبسيط التعابير الجبرية المعقدة وفك الأقواس وحل المعادلات داخل الزمر غير الإبدالية، حيث تضمن أن معكوس حاصل الضرب يعادل حاصل ضرب المعكوسات بترتيب عكسي. [7]

$$G \text{ إبدالية إذا وفقط إذا كان } (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad .$$

البرهان: إذا كان $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ لكل $a, b \in G$ عندئذ:

$$b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$$

$$ab = [(ab)^{-1}]^{-1} = [(ba)^{-1}]^{-1} = ba$$

من الخاصية أعلاه: تقدم هذه الخاصية معياراً رياضياً بديلاً ومباشراً لاختبار ما إذا كانت الزمرة إبدالية (أبيلية) دون الحاجة للجوء إلى التعريف الأساسي، مما يختصر خطوات الحل في البراهين المتقدمة.

• يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ في الزمرة G :

البرهان:

لدينا أن $x = a^{-1}b$ حل المعادلة $ax = b$ وكذلك $y = ba^{-1}$ حل المعادلة $ya = b$ وعلينا أن نبرهن وحدانية هذا الحل، لذلك نفرض حلاً آخر c في المعادلة عندئذ يكون:

$$c = ec = (a^{-1}a)c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b$$

ومنه نجد أن $x = a^{-1}b$ حل المعادلة $ax = b$

وبالمثل نثبت أن $y = ba^{-1}$ حل وحيد للمعادلة $ya = b$ من خلال أيضاً فرض حل c فيكون:

$$ce = c(a^{-1}a) = (ca)a^{-1} = ba^{-1}$$

من الخاصية أعلاه: تضمن هذه الخاصية إمكانية حل المعادلات الجبرية الخطية من الدرجة الأولى داخل الزمرة بشكل وحيد لا لبس فيه، مما يعكس البنية الجبرية المنتظمة والمغلقة للزمر [8].

• لتكن زمرة $(G,*)$ إن قانون الاختزال من اليمين إلى اليسار متحققين أي إن:

$$xa = ya \Rightarrow x = y \quad , \quad ax = ay \Rightarrow x = y$$

$$\forall (a, x, y) \in G$$

البرهان:

$$ax = ay$$

$$\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$$

بما أن $(*)$ تجميعي فإن:

$$\Rightarrow (a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y$$

$$\Rightarrow e \cdot x = e \cdot y$$

$$\Rightarrow x = y$$

من الخاصية أعلاه: تسمح قواعد الاختصار أو الحذف (Cancellation Laws) بشطب العناصر المشتركة من طرفي المعادلة بأمان تام. وهي تضمن عدم وجود ما يُعرف بـ "قواسم الصفر" داخل الزمرة، مما يجعل الحسابات الجبرية فيها شبيهة ومرنة كالتعامل مع الأعداد الحقيقية.

• زمرة الجداء :

إذا كانت لدينا زمرتان (G, \cdot) ، (H, \cdot) عندئذٍ يمكننا أن نزود مجموعة الجداء الديكارتي $G \times H$ بقانون تشكيل داخلي على النحو التالي $(x, y) \top (x_1, y_1) \in G \times H$; $\forall (x, y)$ و (x_1, y_1)

$$= (xx_1, yy_1)$$

عندئذٍ $(G \times H, \top)$ هي زمرة تسمى بزمرة الجداء الديكارتي أو اختصاراً زمرة الجداء.

من الخاصية أعلاه: توفر عملية الجداء الديكارتي أداة قياسية قوية لبناء زمر جديدة ذات بنية أكثر تعقيداً انطلاقاً من زمر أبسط ومعلومة مسبقاً، مما يسهم بشكل كبير في دراسة نظريات التصنيف الزمري وتوسيع نطاق الأمثلة.

مبرهنة (1.21)

إذا كانت G زمرة فإن كل من عناصرها يظهر مرة واحدة فقط في كل صف ومرة واحدة فقط في كل عمود في جدول كيلبي. [6]

البرهان:

ليكن $b \in G$ ولنفرض أن b يظهر مرتين في صف يحوي العنصر a .

وعندئذٍ يوجد $x, y \in G$ ، بحيث $x \neq y$ ويكون $ax = b$ و $ay = b$ ولذا فإن $ax = ay$ باستخدام قانون الاختصار نجد أن $x = y$ وهذا تناقض وبالمثل إذا ظهر b مرتين في عمود يحوي العنصر a .

من المبرهنة أعلاه: تُشكل هذه المبرهنة الأساس الرياضي لتصميم "المربعات اللاتينية" (Latin Squares). وتُعد أداة بصرية سريعة وموثوقة لاختبار ما إذا كان الجدول يمثل زمرة فعلية؛ حيث تمنع التكرار تماماً وتضمن وجود المعكوسات وتكافؤ العمليات لكل عنصر.

مبرهنة (1.22):

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ وكان $m, n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^{-1} = a^{-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

وإذا كانت الزمرة G إبدالية فإن:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

من المبرهنة أعلاه: تعمم هذه المبرهنة قوانين الأسس المألوفة في حساب الأعداد لتمتد لتشمل أي زمرة جبرية مجردة، مهما كانت طبيعة عملياتها الثنائية. هذا يوفر منهجية رياضية متينة لحساب قوى العناصر وتحديد رتبها بسلاسة عالية.[7]

مبرهنة (1.23):

إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً يحقق:

- يوجد عنصر $e \in G$ (يسمى محايد أيسر) بحيث يكون $ea = a$ لكل $a \in G$
- لكل $a \in G$ يوجد $b \in G$ (يسمى نظير أيسر) بحيث $ba = e$ فإن G زمرة.[8]

البرهان:

نلاحظ أولاً أن قانون الاختصار الأيسر محقق تحت شروط المبرهنة.

لنفرض أولاً أن $a \in G$ ويوجد $b \in G$ ولذا فإن $ba = e$

$$ba = e = ee = (ba)e = b(ae)$$

وباستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $a = ae$ إذن e محايد يمين كذلك:

$$be = b = eb = (ba)b = b(ab)$$

ولذا فإنه باستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $e = ab$ ولذا فإن b نظير أيمن للعنصر a ، وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G زمرة.

من المبرهنة أعلاه: تعمل هذه المبرهنة على "اقتصاد الشروط" (Minimization of Axioms) اللازمة لإثبات الزمرة. بدلاً من إثبات وجود المحايد والنظير من الجهتين (اليمين واليسار)، يكفي إثباتهما من جهة واحدة فقط لتُستنتج الجهة الأخرى تلقائياً، مما يختصر الجهد الرياضي في البراهين المعقدة.

مبرهنة (1.24):

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً، إذا كان لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ حل في G لكل $a, b \in G$ فإن G زمرة.[5]

البرهان:

لنفرض $a \in G$ ، بما أن للمعادلة $ya = a$ حل في G فإنه يوجد $e \in G$ يحقق $ea = a$ سنبرهن أن e محايد أيسر ولذا نفرض أن $b \in G$ ، بما أن للمعادلة $ax = b$ حل في G فإنه يوجد $c \in G$ يحقق $ac = b$ ، ولذا فإن:

$$eb = e(ac) = (ea)c = ac = b$$

ولأن للمعادلة $ya = e$ حل في G إذن يوجد $d \in G$ يحقق $da = e$ ومنه فإن d نظير أيسر للعنصر a وبالتالي فإن G زمرة استناداً إلى المبرهنة السابقة.

من المبرهنة أعلاه: تقدم تعريفاً بديلاً ومكافئاً كلياً لمفهوم الزمرة يعتمد بشكل تام على قابلية حل المعادلات. تبرز أهمية هذا النهج في دراسة الأنظمة الجبرية التي يصعب فيها استنتاج أو تخمين العنصر المحايد أو المعكوس بشكل مباشر.

تعريف (1.25):

إذا كان G زمرة حيث G مجموعة منتهية فإننا نقول إن G زمرة منتهية (Finite group) وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فإننا نقول إن G زمرة غير منتهية (Infinite group). [7]

سنرمز لعدد عناصر الزمرة G بالرمز $|G|$ ونسميه رتبة الزمرة G (Order of G).

أما المبرهنة الآتية فتبين لنا إمكانية استبدال مسلمتي العنصر المحايد والنظير بقانوني الاختصار للزمرة المنتهية ...

مبرهنة (1.26):

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً منتهياً، إذا حققت G قانون الاختصار فإن G زمرة.

البرهان:

لنفرض أن $a \in G$ وأن $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ عندئذ:

$$H = \{aa_1, aa_2, \dots, aa_n\} \subseteq G$$

إذا كانت $aa_i = aa_j$ فإن $a_i = a_j$ لذا جميع عناصر H مختلفة، وبما أن $|G| = |H|$ فإن $G = H$ ، وبما أن $a \in G$ فإن $a \in H$ ولذا فإن $aa_i = a$ ومنه فإن $aa_i a = a(a_i a) = aa$ وباستخدام قانوني الاختصار نجد أن $a_i a = a$ وندعو a_i محايد أيسر. [8]

وذلك لأنه لو كان $b \in G$ فإن $aa_j = b$ ولذا:

$$a_i b = a_i(aa_j) = (a_i a)a_j = aa_j = b$$

إذن a_i محايد أيسر.

نبرهن الآن على وجود نظير أيسر لكل عنصر من عناصر G . لنفرض أن $c \in G$ عندئذٍ بطريقة مماثلة لما سبق نجد أن $G = \{a_1 c, a_2 c, \dots, a_n c\}$ وبما أن $a_i \in G$ فإنه يوجد j بحيث إن $a_j c = a_i c$ إذن a_j نظير أيسر للعنصر c ، وبالتالي فإن G زمرة.

من المبرهنة أعلاه: إذ يكفي التحقق من قانون الاختصار دون الحاجة لفح العنصر المحايد او المعكوسات.

تعريف (1.27):

لنكن G زمرة وليكن $a \in G$ ، إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n = e$ فإن أصغر عدد موجب يحقق ذلك يسمى رتبة العنصر a (Order of a) وإذا استحال وجود مثل هذا العدد n فإننا نقول إن a ذو رتبة غير منتهية (Infinite order). نرسم لرتبة العنصر a بالرمز $o(a)$. [7].

مثال (1.28):

($Z_n, +_n$) زمرة ابدالية حيث العنصر المحايد هو $[0]$

ونظير $[a]$ هو $[-a]$

مثال (1.29):

إذا كانت $GL(n, R) = \{A \in M_n(R) : \det A \neq 0\}$ فإن $(GL(n, R), \cdot)$ زمرة غير ابدالية حيث العنصر المحايد هو I_n ونظير A هو A^{-1} تعرف هذه الزمرة بأسم الزمرة الخطية العامة من الدرجة n

مثال (1.30):

إذا كانت X مجموعة غير خالية فإن النظام $(P(X), \Delta)$ يمثل زمرة ابدالية، نلاحظ انه لكل $A \in P(X)$ لدينا

$$A\Delta\phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A$$

$$A\Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$$

ولذا فإن ϕ هو العنصر المحايد و A هو نظير A وبالتالي $(P(X), \Delta)$ زمرة ابدالية.

مبرهنة (1.31):

إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ فإن $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$ لكل $n \in Z^+$

البرهان:

وباستخدام الاستقراء الرياضي على n ، نوضح ان العبارة صحيحة عندما $n = 1$ نفرض ان العبارة صحيحة عندما $n = k$ عندئذ [4]

$$\begin{aligned} (a^{-1}ba)^{k+1} &= (a^{-1}ba)^k (a^{-1}ba) = (a^{-1}b^k a)(a^{-1}ba) \\ &= a^{-1}b^k eba = a^{-1}b^k ba = a^{-1}b^{k+1}a \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العبارة صحيحة عند $n=k+1$

مثال (1.32):

إذا كانت $M_{mn}(R)$ هي مجموعة مصفوفات من الدرجة $m \times n$ التي عناصرها اعداد حقيقية فإن زمرة إبدالیه حيث العنصر المحايد هو المصفوفة الصفرية ونظير المصفوفة A هو $-A$

مثال (1.33):

إذا كانت $U_n = \{[a] \in Z_n : \gcd(a, n) = 1\}$ فإن زمرة ابدالیه من الواضح ان العملية \cdot_n تجميعية وان $[1]$ هو العنصر المحايد وإذا كان $[a] \in U_n$ فإن $\gcd(a, n) = 1$ ولذا فإنه يوجد $x, y \in Z$ حيث $ax + ny = 1$ ويتضمن $ax \equiv 1 \pmod{n}$ ، اي ان $[a] \cdot_n [x] = [1]$ وبالتالي فإن $[x]$ هو نظير $[a]$.

أما الآن فسوف نقوم بحل التمارين.

تمارين (1.34):

1. بين إذا كانت كل من الأنظمة الجبرية الآتية زمرة مع البرهان:

• حيث $x * y = x + y + xy$

• $(Z, *)$ حيث $x - y$

• $(N, *)$ حيث $x * y = x + y$

الحل:

○ إن النظام الجبري $(Z, *)$ لا يعد زمرة بالرغم من أنه يحقق العلاقة التجميعية:

$$\forall x, y, z \in Z$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= x + y + xy + z + zx + zy + zyx \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\ &\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z) \end{aligned}$$

وجود المحايد ألا وهو العنصر 0 :

$$\forall x \in Z \Rightarrow x * 0 = x + 0 + (x \cdot 0) = x$$

$$\forall x \in Z \Rightarrow 0 * x = 0 + x + (0 \cdot x) = x$$

ولكن بالنسبة للنظير فإن:

$$\forall x \in Z \Rightarrow x * \left(\frac{-x}{x+1}\right) = \left(\frac{-x}{x+1}\right) * x = 0$$

ولكن $\frac{-x}{x+1} \notin Z$ ومنه شرط النظير غير محقق ومنه نجد أن النظام الجبري $(Z,*)$ ليس زمرة.

• إن النظام الجبري $(Z,*)$ ليس زمرة لأن الشرط التجميعي غير محقق بحيث:

$$\forall x, y, z \in Z$$

$$(x * y) * z = x - y - z$$

$$x * (y * z) = x - y + z$$

$$\Rightarrow x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

• إن النظام الجبري $(N,*)$ ليس زمرة لأن شرط النظير غير محقق حيث:

$$\forall x \in N \Rightarrow x * (-x) = e$$

ولكن $-x \notin N$.

1.35 الزمر الجزئية

تعريف (1.36):

لتكن (G, \cdot) زمرة ولتكن $\emptyset \neq H \subseteq G$ ، إذا كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية بحيث تكون زمرة فإننا نقول ان H زمرة جزئية من G .

ملاحظات (1.37):

1. ان الزمرتين (G, \cdot) و $(\{e\}, \cdot)$ تشكلان زمريتين جزئيتين من G وتسمى الاخيرة منها بالزمرة الجزئية التافهة.

2. إذا كان e هو محايد من G وكان e_H هو محايد من H فإن $e_H e_H = e_H = e_H e$ باستخدام قانون الاختصار نخلص الى ان $e_H = e$ اي ان المحايدان متساويان.

3. إذا كان $h_1 \in H$ هو نظير h في H وكان h^{-1} هو نظير h في G فإن:

$$h_1 = h_1 e = h_1 (hh^{-1}) = (h_1 h) h^{-1} = e h^{-1} = h^{-1}$$

ولذا فإن نظير h في H ونظير h في G متساويان.

ملاحظات (1.38):

1. لكي نثبت ان مجموعة ما H هي زمرة بالنسبة لقانون التشكيل ما يكفي ان نثبت انها زمرة جزئية من زمرة معروفة.

2. إذا كانت X مجموعة جزئية من G فيمكننا ان نرمز لها بالتشكيل $X \subseteq G$.

مبرهنة (1.39):

لتكن (G, \cdot) زمرة و H مجموعة جزئية من G ان H زمرة

جزئية إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$e \in H$$

$$\forall (x, y) \in H^2, \quad xy^{-1} \in H$$

البرهان:

سوف نثبت انه إذا كان الشرطان محققان فان H زمرة جزئية من G .

بما ان (\cdot) تجميعي على G عندئذ:

$$\forall (x, y) \in H \subset G \Rightarrow x^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow x^{-1}(xy^{-1}) = (x^{-1}x)y^{-1} = ey^{-1} = y^{-1}$$

ولكن e و y عندئذ حسب الشرط الثاني $ey^{-1} \in H$ وبالتالي إذا نستنتج ان $\forall y \in H, y^{-1} \in H$:

وحسب العلاقة السابقة:

$$\forall (x, y) \in H^2; y^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow (x, y) \in H^2; y^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow x(y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow xy \in H$$

حيث $y = (y^{-1})^{-1}$

ومنه (H, \cdot) زمرة جزئية لأنها مغلقة بالنسبة لقانون (\cdot) ولان $e \in H$ وكذلك (\cdot) تجميعية بالفرض حيث (G, \cdot) هي زمرة [7].

مبرهنة (1.40):

إذا كانت G زمرة وكانت $\emptyset \neq H \subseteq G$ فإن:

$H \leq G$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$

البرهان:

لنفرض أولاً أن $H \leq G$ وأن $a, b \in H$. بما أن H زمرة فإن $b^{-1} \in H$ ، ومن ثم فإن $ab^{-1} \in H$ ولبرهان العكس، نفرض أن $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$. بما أن $H \neq \emptyset$ ، فإنه يوجد $a \in H$ ، ولذا فإن $e = aa^{-1} \in H$. إذن، H تحتوي على العنصر المحايد. الآن، لكل $b \in H$ لدينا $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. إذن، لكل $a, b \in H$ يكون $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. وأخيراً فإن الخاصية التجميعية كونها محققة في G فلا بد وأن تكون محققة في H . وبالتالي فإن H زمرة [4].

من المبرهنة أعلاه: تبين المبرهنة شرطاً مكافئاً للتحقيق من ان مجموعة جزئية غير خالية هي زمرة جزئية وذلك إذا كانت مغلقة تحت اي عملية واخذ المعكوس أي $(ab^{-1} \in H)$.

مبرهنة (1.41):

إذا كانت G زمرة وكانت H مجموعة جزئية غير خالية منتهية، فإن:

$$H \leq G \text{ إذا وفقط إذا كان } ab \in H \text{ لكل } a, b \in H.$$

البرهان:

إذا كانت $H \leq G$ فإنه من الواضح أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ولبرهان العكس، نفرض أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ليكن $h \in H$. عندئذ $\{h, h^2, h^3, \dots, h^n, \dots\} \subseteq H$. وبما أن H مجموعة منتهية فإنه يوجد $0 \leq r < s$ حيث $h^r = h^s$ ولذا فإن $hh^{s-r-1} = h^{s-r} = e \in H$. وعليه فإن $h^{-1} = h^{s-r-1}$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أنه إذا كان $a, b \in H$ فإن $a, b^{-1} \in H$. ولذا فإن $ab^{-1} \in H$ ، إذن $H \leq G$. [7]

من المبرهنة أعلاه: تعطي شرطاً أسهل لأثبات ان مجموعة جزئية من زمرة منتهية هي زمرة جزئية، بالاكتفاء بالانغلاق تحت العملية فقط دون فحص المعكوس والعنصر المحايد.

مبرهنة (1.42):

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية فإن G إبدالية. [6]

البرهان:

لنفرض ان $x, y \in G$ عندئذ $x = a^m, y = a^n$ حيث $n, m \in Z$ ، ولذا فإن:

$$xy = a^m a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m = yx$$

مبرهنة (1.43):

كل زمرة جزئية من زمرة دورية يجب ان تكون دورية.

البرهان:

لنفرض ان $G = \langle a \rangle$ وان $H \leq G$. إذا كانت $H = \{e\}$ ، فإن $H = \langle e \rangle$ ، ولذا فإنها دورية، نفرض ان $H \neq \{e\}$ وباستخدام مبدأ الترتيب الحسن نستطيع ايجاد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n \in H$ ، سنبرهن ان $H = \langle a^n \rangle$. لنفرض ان $x \in H$ عندئذ $x \in G$ ولذا فإن $x = a^k$ حيث $k \in Z$ وباستخدام خوارزمية القسمة نستطيع ايجاد $q, r \in Z$ حيث $k = qn + r, 0 \leq r < n$ ، ولان $a^n, a^k \in H$ فإنه:

$$H = \langle a^n \rangle \text{ وبالتالي } r = 0 \text{ ولذا فإننا نجد ان } a^r = a^{k-nq} = a^k (a^n)^{-q} \in H$$

من المبرهنة أعلاه: ان اي زمرة جزئية من زمرة دورية تكون دورية "ايضاً" اي تترث خاصية الدورية من الزمرة الاصلية. [7]

مثال (1.44):

الزمرة $(R, +)$ ليست دورية، وذلك لأنه لو كانت $(R, +)$ دورية فإن الزمرة الجزئية $(Q, +)$ يجب ان تكون دورية ايضاً وهذا تناقض.

مثال (1.45):

الزمرة $(Z, +)$ دورية وذلك لان $Z = \langle 1 \rangle$ ، وكذلك $(Z_n, +_n)$ دورية ولان $Z_n = \langle [1] \rangle$.

تعريف (1.46):

لنكن G زمرة وليكن $a \in G$ ، تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a الزمرة الجزئية الدورية ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$ اي ان $\langle a \rangle = \{a^n : n \in Z\}$ ، وتكون الزمرة G زمرة دورية إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $G = \langle a \rangle$. [2]

تعريف (1.47):

لنكن (G, \cdot) زمرة ولتكن X مجموعة جزئية من G ، ان تقاطع جميع الزمر الجزئية من G والتي تحوي X هو زمرة جزئية من G وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي مجموعة X ونرمز لها بالرمز $\langle X \rangle$ وتسمى المجموعة الجزئية المولدة بالمجموعة X . [2]

ملاحظات (1.48):

1. إذا كانت $\langle X \rangle = G$ فإننا نقول ان المجموعة X تولد G .
2. إذا كانت $X = \emptyset$ أو $X = \{e\}$ كانت $\langle X \rangle = \{e\}$.
3. إذا كانت G زمرة فإن $\langle G \rangle = G$.
4. إذا كانت $\langle X \rangle = G$ وكانت X منتهية فإننا نقول ان G منتهية التوليد.

الفصل الثاني

التشاكل والتماثل في الزمر

2.1 تعريف التشاكل بين الزمر (Definition of Group Homomorphism)

في الجبر المجرد، لا نهتم بأي تطبيق عشوائي بين مجموعتين، بل ينصب اهتمامنا على التطبيقات التي "تحافظ على البنية الجبرية". (Structure-Preserving Maps) "هذا يعني أن التطبيق يجب أن يحترم العمليات الثنائية المعرفة على كلتا الزمرتين. [6]

تعريف (2,2) :

لتكن $(G,*)$ و (H, \circ) زمريتين، نقول إن التطبيق $f: G \rightarrow H$ هو تشاكل زمري (Homomorphism) من الزمرة G إلى الزمرة H ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي: [2]

لكل عنصرين $a, b \in G$ ، يكون:

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

2.3 نواة التشاكل وصورته (Kernel and Image of a Homomorphism)

تعريف (2.4) :

ليكن $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً من الزمرة $(G,*)$ إلى الزمرة (H, \circ) . تُعرف نواة التشاكل f ، ويُرمز لها بالرمز $\ker(f)$ ، بأنها مجموعة كل العناصر في المنطلق G التي ترتبط صورتها حصراً بالعنصر المحايد e_H في المستقر H .

رياضياً، تُكتب النواة بالشكل الآتي:

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$$

تعريف (2.5) :

تُعرف صورة التشاكل f ، ويُرمز لها بالرمز $\text{Im}(f)$ أو $f(G)$ ، بأنها مجموعة كل الصور الفعلية في المستقر H التي نتجت عن تطبيق f على عناصر المنطلق G .

رياضياً، تُكتب الصورة بالشكل الآتي:

$$\text{Im}(f) = \{y \in H \mid \exists x \in G, f(x) = y\}$$

مبرهنة (2.6):

إذا كان $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً زمرياً، فإن نواة التشاكل $\ker(f)$ تمثل دائماً زمرة جزئية ناظرية

(Normal Subgroup) من الزمرة G ، ونكتب $\ker(f) \triangleleft G$.

البرهان:

لإثبات هذه المبرهنة، يجب أن نمر بخطوتين أساسيتين: إثبات أن النواة هي "زمرة جزئية" أولاً، ثم إثبات أنها "ناظرية".

• الخطوة الأولى: إثبات أن $\ker(f)$ زمرة جزئية من G

1. نعلم من المبرهنة (1,2) أن $f(e_G) = e_H$. هذا يعني أن $e_G \in \ker(f)$ ، وبالتالي النواة ليست مجموعة خالية. ($\ker(f) \neq \emptyset$)

2. نستخدم اختبار الزمرة الجزئية: نفرض أن $a, b \in \ker(f)$. هذا يعني أن $f(a) = e_H$ و $f(b) = e_H$.

نختبر العنصر $a * b^{-1}$:

$$f(a * b^{-1}) = f(a) \circ f(b^{-1})$$

وباستخدام خاصية حفظ النظير:

$$f(a * b^{-1}) = f(a) \circ (f(b))^{-1}$$

نعوض بالصور:

$$f(a * b^{-1}) = e_H \circ e_H^{-1} = e_H \circ e_H = e_H$$

بما أن صورة العنصر $a * b^{-1}$ هي e_H ، فإن $a * b^{-1} \in \ker(f)$. إذن $\ker(f)$ هي زمرة جزئية من G . ($\ker(f) \leq G$)

• الخطوة الثانية: إثبات أن $\ker(f)$ ناظرية في G

لتكون الزمرة الجزئية ناظرية، يجب أن يتحقق الشرط الآتي: لكل $x \in G$ ولكل $k \in \ker(f)$ ، يجب أن يكون $x * k * x^{-1} \in \ker(f)$.

نأخذ صورة هذا العنصر بالتطبيق f :

$$f(x * k * x^{-1}) = f(x) \circ f(k) \circ f(x^{-1})$$

بما أن $k \in \ker(f)$ ، فإن $f(k) = e_H$. ونعلم أن $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

$$f(x * k * x^{-1}) = f(x) \circ e_H \circ (f(x))^{-1}$$

$$f(x * k * x^{-1}) = f(x) \circ (f(x))^{-1}$$

أي عنصر مضروب في نظيره يعطي المحايد:

$$f(x * k * x^{-1}) = e_H$$

بما أن الصورة النهائية هي e_H ، فإن العنصر $x * k * x^{-1}$ ينتمي حتماً إلى النواة.

إذن، $\ker(f)$ هي زمرة جزئية ناظمية من G . [8]

من المبرهنة اعلاه هذه المبرهنة تشكل حجر الزاوية في نظرية الزمر؛ فإثبات أن النواة ناظمية هو الشرط المسبق والأساسي الذي يسمح لنا لاحقاً ببناء ما يُعرف بـ "زمرة القسمة (Quotient Group)" المرموز لها بـ $G/\ker(f)$ ، والتي تعتمد عليها مبرهنات التماثل الأساسية.

مبرهنة (2.7):

إذا كان $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً زمرياً، فإن صورة التشاكل $\text{Im}(f)$ تمثل زمرة جزئية من الزمرة $\text{Im}(f) \leq H$.

البرهان:

1. بما أن $e_G \in G$ ، فإن $f(e_G) = e_H \in \text{Im}(f)$ ، لذا فإن الصورة ليست مجموعة خالية.

2. نفرض أن $y_1, y_2 \in \text{Im}(f)$. حسب تعريف الصورة، يوجد عنصران $x_1, x_2 \in G$ بحيث أن $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$.

نختبر العنصر $y_1 \circ y_2^{-1}$:

$$y_1 \circ y_2^{-1} = f(x_1) \circ (f(x_2))^{-1}$$

باستخدام خواص التشاكل:

$$y_1 \circ y_2^{-1} = f(x_1) \circ f(x_2^{-1}) = f(x_1 * x_2^{-1})$$

بما أن G زمرة، فإن $x_1 * x_2^{-1} \in G$. وهذا يعني أن العنصر $y_1 \circ y_2^{-1}$ هو صورة لعنصر موجود في G .

وبالتالي $y_1 \circ y_2^{-1} \in \text{Im}(f)$ ، مما يثبت أن الصورة هي زمرة جزئية من H .

من المبرهنة اعلاه تؤكد هذه المبرهنة أن التشاكل لا يبعثر عناصر G بشكل عشوائي داخل H ، بل يجمعها لتكوّن هيكلًا رياضياً متماسكاً (زمرة جزئية) داخل المستقر، مما يعكس قوة التشاكل في حفظ الأنظمة. [7]

2.9 خواص التشاكل (Properties of Homomorphisms)

مبرهنة (2.10):

لتكن $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً من الزمرة $(G, *)$ إلى الزمرة (H, \circ) . ولنفرض أن e_G هو العنصر المحايد في G ، و e_H هو العنصر المحايد في H . فإنه يتحقق الآتي:

$$1. f(e_G) = e_H \text{ صورة المحايد هي المحايد.}$$

$$2. \text{ لكل } a \in G, \text{ فإن } f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \text{ صورة النظير هي نظير الصورة.}$$

البرهان:

• لإثبات النقطة: (1)

بما أن e_G هو العنصر المحايد في G ، فإن $e_G * e_G = e_G$.

بأخذ صورة الطرفين وفقاً للتطبيق f :

$$f(e_G * e_G) = f(e_G)$$

وبما أن f تشاكل، فإنه يحافظ على العملية:

$$f(e_G) \circ f(e_G) = f(e_G)$$

بضرب طرفي المعادلة من جهة اليمين بنظير العنصر $f(e_G)$ في الزمرة H ، وهو $(f(e_G))^{-1}$ ، نحصل على:

$$(f(e_G) \circ f(e_G)) \circ (f(e_G))^{-1} = f(e_G) \circ (f(e_G))^{-1}$$

باستخدام الخاصية التجميعية وتعريف المحايد في H ، نستنتج أن:

$$f(e_G) \circ e_H = e_H \Rightarrow f(e_G) = e_H$$

• لإثبات النقطة: (2)

لكل عنصر $a \in G$ ، نعلم أن $a * a^{-1} = e_G$.

بأخذ صورة الطرفين بالتطبيق f :

$$f(a * a^{-1}) = f(e_G)$$

باستخدام تعريف التشاكل ونتيجة النقطة: (1)

$$f(a) \circ f(a^{-1}) = e_H$$

وبالمثل، يمكن إثبات أن $f(a^{-1}) \circ f(a) = e_H$.

وبما أن النظير في الزمرة وحيد، فهذا يثبت أن نظير العنصر $f(a)$ في الزمرة H هو $f(a^{-1})$ ، أي أن:

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

[4].

مبرهنة (2.11):

لتكن $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً زمرياً. إذا كانت K زمرة جزئية من G ($K \leq G$)، فإن صورتها $f(K)$ تمثل زمرة جزئية من H . ($f(K) \leq H$)

البرهان:

تُعرف صورة المجموعة K بالصيغة: $f(K) = \{f(k): k \in K\}$.

لإثبات أن $f(K) \leq H$ ، نستخدم اختبار الزمرة الجزئية (الذي تم إثباته في الفصل الأول):

أولاً، بما أن $K \leq G$ ، فإن المحايد $e_G \in K$. وعليه، فإن $f(e_G) = e_H \in f(K)$ ، مما يعني أن $f(K)$ ليست مجموعة خالية.

ثانياً، لتكن $x, y \in f(K)$. هذا يعني وجود عناصر $a, b \in K$ بحيث أن $x = f(a)$ و $y = f(b)$.

نختبر الشرط $x \circ y^{-1}$:

$$x \circ y^{-1} = f(a) \circ (f(b))^{-1}$$

باستخدام مبرهنة (2.1)، نعلم أن $(f(b))^{-1} = f(b^{-1})$ ، فتصبح المعادلة:

$$x \circ y^{-1} = f(a) \circ f(b^{-1})$$

وبما أن f تشاكل، فإن:

$$x \circ y^{-1} = f(a * b^{-1})$$

بما أن K زمرة جزئية و $a, b \in K$ ، فإن $a * b^{-1} \in K$ خاصية الانغلاق للزمرة الجزئية.

وبالتالي، $f(a * b^{-1}) \in f(K)$ ، وهذا يثبت أن $x \circ y^{-1} \in f(K)$.

إذن، $f(K)$ هي زمرة جزئية من H . [5]

2.12 أنواع التشاكل (Types of Homomorphisms)

2.13 التشاكل المتباين (Monomorphism)

نقول إن التشاكل f هو تشاكل متباين إذا كان التطبيق متبايناً (1-1) أو (Injective) بمعنى أنه لا يوجد عنصران مختلفان في المنطق G يمتلكان نفس الصورة في المستقر H . رياضياً: إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن ذلك يقتضي حتماً أن $a = b$.

2.14 التشاكل الغامر (Epimorphism)

نقول إن التشاكل f هو تشاكل غامر إذا كان التطبيق شاملاً (Onto) أو (Surjective) أي إن مدى التطبيق يغطي المجال المقابل بالكامل.

رياضياً $\text{Im}(f) = H$: لكل $y \in H$ يوجد على الأقل $x \in G$ بحيث $f(x) = y$.

2.15 التماثل (Isomorphism)

هو التشاكل الذي يجمع بين الصفتين السابقتين؛ أي إنه تشاكل تقابلي (Bijjective) متباين وغامر في آنٍ واحد.

الأهمية: إذا وُجد تماثل بين زميرتين G و H ، فإننا نكتب $G \cong H$ ونقول إنهما "متماثلتان". الزمر المتماثلة تُعد جبرياً "نسخة طبق الأصل" من بعضها البعض، تختلف فقط في التسميات الخارجية لعناصرها ولكنها تتطابق تماماً في هيكل العمليات وخواصها.

2.16 التشاكل الداخلي (Endomorphism)

هو تشاكل ينطلق من الزمرة إلى نفسها. أي إن $f : G \rightarrow G$. يدرس هذا النوع التحولات الهيكلية داخل النظام الجبري الواحد.

2.17 التماثل الذاتي (Automorphism)

هو تماثل (تشاكل تقابلي) من الزمرة إلى نفسها. مجموعة كل التماثلات الذاتية لزمرة ما تُشكل بدورها زمرة جديدة تحت عملية تحصيل الدوال (Composition)، ويُرمز لها بالرمز $\text{Aut}(G)$. [3]

مبرهنة (2.18):

ليكن $f : G \rightarrow H$ تشاكلاً زمرياً. يكون التشاكل f متبايناً (Monomorphism) إذا وفقط إذا كانت نواته تقتصر على العنصر المحايد فقط. أي إن:

$$\ker(f) = \{e_G\}$$

البرهان:

بما أن المبرهنة بصيغة "إذا فقط إذا (If and only if)"، يجب إثبات الاتجاهين:

• **الاتجاه الأول:** (\Rightarrow) نفرض أن f تشاكل متباين، ونريد إثبات أن $\ker(f) = \{e_G\}$.

ليكن $x \in \ker(f)$. حسب تعريف النواة، هذا يعني أن $f(x) = e_H$.

ونعلم من المبرهنة (5.2) أن $f(e_G) = e_H$.

وبمساواة المعادلتين نحصل على $f(x) = f(e_G)$.

بما أننا فرضنا أن f تطبيق متباين (لا توجد صورتان متطابقتان لعنصرين مختلفين)، فإن هذا يقتضي مباشرة أن:

$$x = e_G$$

إذن، العنصر الوحيد الذي ينتمي للنواة هو e_G . أي $\ker(f) = \{e_G\}$.

• **الاتجاه الثاني:** (\Leftarrow) نفرض أن $\ker(f) = \{e_G\}$ ، ونريد إثبات أن f متباين.

نفرض أن هناك عنصرين $a, b \in G$ بحيث أن $f(a) = f(b)$.

نضرب طرفي المعادلة بالنظير $(f(b))^{-1}$ من جهة اليمين في الزمرة H :

$$f(a) \circ (f(b))^{-1} = f(b) \circ (f(b))^{-1}$$

باستخدام خاصية حفظ النظير في الطرف الأيسر، وتعريف النظير في الطرف الأيمن:

$$f(a) \circ f(b^{-1}) = e_H$$

باستخدام تعريف التشاكل في الطرف الأيسر:

$$f(a * b^{-1}) = e_H$$

بما أن صورة العنصر $a * b^{-1}$ هي e_H ، فهذا يعني أن هذا العنصر ينتمي إلى النواة $\ker(f)$.

ولكننا فرضنا أن النواة تحتوي فقط على e_G ، إذن:

$$a * b^{-1} = e_G$$

بضرب الطرفين بالعنصر b من اليمين، نستنتج أن:

$$a = b$$

بما أن $f(a) = f(b)$ أدت حتماً إلى $a = b$ ، فإن التشاكل f متباين. وهو المطلوب.

من المبرهنة اعلاه تُعد هذه المبرهنة من أقوى أدوات الجبر المجرد. بدلاً من محاولة إثبات تباين دالة من خلال اختبار كل أزواج العناصر الممكنة (وهو أمر مستحيل في الزمر غير المنتهية)، يكفي فقط إيجاد النواة وحل المعادلة $f(x) = e_H$. إذا كان الحل الوحيد هو المحايد، فإن التطبيق متباين فوراً. [2]

مثال (2.20):

لتكن G و H أي زمريتين اختيارييتين، وليكن e_H هو العنصر المحايد في الزمرة H .

نُعرف التطبيق $f : G \rightarrow H$ بالشكل الآتي:

$$f(x) = e_H \quad \forall x \in G$$

البرهان: لكل $x, y \in G$ لدينا:

الطرف الأيسر) $f(x * y) = e_H$: لأن التطبيق ينقل أي عنصر للمحايد.

الطرف الأيمن) $f(x) \circ f(y) = e_H \circ e_H = e_H$.

بما أن $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ ، فإن التطبيق f يمثل تشاكلاً، ويُعرف بالتشاكل التافه.

مثال (2.21):

لتكن (R^*, \cdot) زمرة الأعداد الحقيقية غير الصفريّة تحت عملية الضرب، ولتكن (R^+, \cdot) زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت عملية الضرب. [10]

نُعرف التطبيق $f : R^* \rightarrow R^+$ بالشكل $f(x) = |x|$.

البرهان:

لكل $x, y \in R^*$ ، من خواص القيمة المطلقة في التحليل الرياضي نعلم أن:

$$f(x \cdot y) = |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = f(x) \cdot f(y)$$

إذن، دالة القيمة المطلقة تمثل تشاكلاً زمرياً.

مثال (2.22):

لتكن $(GL(n, R), \cdot)$ "الزمرة الخطية العامة" وهي مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة $n \times n$ القابلة للانعكاس (محددها لا يساوي صفراً) تحت عملية ضرب المصفوفات. ولتكن (R^*, \cdot) زمرة الأعداد الحقيقية غير الصفريّة تحت الضرب. [3]

نُعرف التطبيق $\det : GL(n, R) \rightarrow R^*$ والذي يربط كل مصفوفة A بمحددها $|A|$.

البرهان:

لكل مصفوفتين $A, B \in GL(n, R)$ ، استناداً إلى مبرهنات الجبر الخطي، نعلم أن محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب محدديهما:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

إذن، دالة المحدد هي تشاكل زمري ينقل خواص المصفوفات إلى خواص الأعداد الحقيقية.

مثال (2.23):

لتكن $(R, +)$ زمرة الأعداد الحقيقية مع عملية الجمع، ولتكن (R^+, \cdot) زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة مع عملية الضرب. [6]

نعرف التطبيق $f: R \rightarrow R^+$ بالشكل الآتي:

$$f(x) = e^x$$

• إثبات التشاكل: لكل $x, y \in R$ لدينا:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

إذن f تشاكل زمري.

• إيجاد النواة $\ker(f)$:

$$\ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = e_{R^+}\}$$

العنصر المحايد في زمرة الضرب (R^+, \cdot) هو العدد 1.

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

بما أن النواة تحتوي على العنصر المحايد الجمعي فقط $\ker(f) = \{0\}$ ، فإن التشاكل متباين (Monomorphism).

• إيجاد الصورة $\text{Im}(f)$:

بما أن مدى الدالة الأسية e^x يغطي كل الأعداد الحقيقية الموجبة، فإن $\text{Im}(f) = R^+$. إذن التشاكل غامر (Epimorphism).

• الخلاصة: بما أن التطبيق متباين وغامر، فإنه يمثل تماثلاً (Isomorphism)، ونكتب $R \cong R^+$.

مثال (2.24):

لتكن $(Z, +)$ زمرة الأعداد الصحيحة مع الجمع العادي، ولتكن $(Z_n, +_n)$ زمرة الأعداد الصحيحة بمعيار n حيث $n > 1$ (مع عملية الجمع القياسي). [7]

نعرف التطبيق $f: Z \rightarrow Z_n$ بالشكل الآتي:

$$f(x) = x \pmod{n}$$

• إثبات التشاكل: من خواص الحساب القياسي (Modular Arithmetic) نعلم أن:

$$f(x + y) = (x + y) \pmod{n} = (x \pmod{n} +_n y \pmod{n}) = f(x) +_n f(y)$$

• إيجاد النواة $\ker(f)$:

المحايد في Z_n هو $\bar{0}$.

$$\ker(f) = \{x \in Z \mid x \pmod{n} = \bar{0}\}$$

هذا يعني أن x يقبل القسمة على n بدون باقٍ، أي إن x من مضاعفات n .

$$\ker(f) = nZ = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$$

• الخلاصة: بما أن النواة تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر، فالتشاكل ليس متبايناً، ولكنه غامر لأن صور الأعداد تغطي تماماً المجموعة $\{0, 1, \dots, n-1\}$. إذن هو تشاكل غامر (Epimorphism).

2.25 تطبيقات للتشاكل والتماثل (Applications of Homomorphisms and Isomorphisms)

مبرهنة (2.26):

إذا كان التطبيق $f: G \rightarrow H$ تشاكلاً زمرياً من الزمرة G إلى الزمرة H ، فإن زمرة القسمة $G/\ker(f)$ تماثل صورة التشاكل $\text{Im}(f)$ في H . أي أن:

$$G/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

البرهان:

لإثبات التماثل، يجب أن نُعرّف تطبيقاً جديداً ϕ ينطلق من زمرة القسمة إلى صورة التشاكل، ثم نُثبت أن هذا التطبيق يحقق أربعة شروط أساسية.

ليكن التطبيق $\phi: G/\ker(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ مُعرّفاً بالقاعدة الآتية لكل $x \in G$:

$$\phi(x \ker(f)) = f(x)$$

الخطوة الأولى: إثبات أن التطبيق ϕ مُعرف بشكل جيد (Well-defined)

بما أن عناصر زمرة القسمة هي فئات تكافؤ (Cosets)، فقد يُمثل الفئة الواحدة أكثر من عنصر. لذلك، يجب إثبات أنه إذا أخذنا ممثلين مختلفين لنفس الفئة، فإن التطبيق يعطي نفس الصورة.

نفرض أن $x \ker(f) = y \ker(f)$ لعنصرين $x, y \in G$.

من خواص فئات التكافؤ، هذا يعني أن:

$$y^{-1}x \in \ker(f)$$

وحسب تعريف النواة، فإن صورة هذا العنصر بالتطبيق f تساوي العنصر المحايد e_H في H :

$$f(y^{-1}x) = e_H$$

بما أن f تشاكل زمري، فإنه يحافظ على العملية والنظير:

$$f(y^{-1}) \circ f(x) = e_H$$

$$(f(y))^{-1} \circ f(x) = e_H$$

بضرب طرفي المعادلة من جهة اليسار بالعنصر $f(y)$ ، نحصل على:

$$f(x) = f(y)$$

وبالتعويض في تعريف التطبيق ϕ ينتج أن:

$$\phi(x \ker(f)) = \phi(y \ker(f))$$

إذن، التطبيق ϕ لا يعتمد على اختيار الممثل، وهو مُعرف بشكل جيد.

الخطوة الثانية: إثبات أن التطبيق ϕ يمثل تشاكلاً (Homomorphism)

لكل فئتين $x \ker(f)$ و $y \ker(f)$ في زمرة القسمة، نطبق العملية الثنائية لزمرة القسمة:

$$\phi((x \ker(f)) \cdot (y \ker(f))) = \phi((x * y) \ker(f))$$

حسب تعريف التطبيق ϕ :

$$\phi((x * y) \ker(f)) = f(x * y)$$

وبما أن f هو في الأصل تشاكل، فإنه يوزع العملية:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

وبالتعويض العكسي لتعريف ϕ :

$$f(x) \circ f(y) = \phi(x \ker(f)) \circ \phi(y \ker(f))$$

إذن، ϕ يمثل تشاكلاً زمرياً.

الخطوة الثالثة: إثبات أن التطبيق ϕ متباين (Injective/Monomorphism)

لإثبات التباين، نستخدم معيار النواة (المبرهنة السابقة)؛ أي يجب إثبات أن نواة التطبيق ϕ تحتوي فقط على العنصر المحايد لزمرة القسمة (وهو الفئة $\ker(f)$ نفسها).

نفرض أن فئة ما $x \in \ker(f)$ تنتمي إلى $\ker(\phi)$. هذا يعني أن صورتها تساوي المحايد في H :

$$\phi(x \ker(f)) = e_H$$

حسب تعريف ϕ :

$$f(x) = e_H$$

وهذا هو بالضبط تعريف نواة التشاكل f ، مما يعني حتماً أن:

$$x \in \ker(f)$$

ومن خواص الفئات، إذا كان العنصر ينتمي للمجموعة، فإن فئته تساوي المجموعة نفسها:

$$x \ker(f) = \ker(f)$$

بما أن العنصر الوحيد الذي يُعطي المحايد هو المحايد نفسه، فإن التطبيق ϕ متباين.

الخطوة الرابعة: إثبات أن التطبيق ϕ شامل (Surjective/Epimorphism)

ليكن y أي عنصر ينتمي إلى $\text{Im}(f)$ في المستقر.

حسب تعريف الصورة $\text{Im}(f)$ ، يوجد حتماً عنصر $x \in G$ بحيث أن:

$$f(x) = y$$

بناءً على تعريف التطبيق ϕ الذي وضعناه، يمكننا كتابة:

$$\phi(x \ker(f)) = f(x) = y$$

إذن، لكل عنصر في المستقر يوجد أصل في المنطلق (زمرة القسمة). وبالتالي، التطبيق ϕ شامل. [2, 9]

2.27 تصنيف الزمر: (Classification of Groups)

بفضل مفهوم "التماثل (Isomorphism)"، لم يعد علماء الرياضيات بحاجة لدراسة كل زمرة تظهر في الطبيعة بشكل مستقل. التماثل يعمل كمعيار "للتطابق الجبري"؛ فبمجرد إثبات تماثل زمريتين، تُعمم النظريات والنتائج المُبرهنة على إحداها لتشمل الأخرى مباشرة. [7]

- **تطبيق مباشر:** تُثبت نظريات التشاكل أن كل زمرة دَوّارة غير منتهية (Infinite Cyclic Group) تتماثل حتماً مع زمرة الأعداد الصحيحة $(Z, +)$. وبالمثل، كل زمرة دَوّارة منتهية من الرتبة n تتماثل مع زمرة الأعداد الصحيحة بمعيار الانقسام $(Z_n, +_n)$. هذا التطبيق يوفر جهداً بحثياً هائلاً بوضع الزمر المكتشفة حديثاً في "قوالب قياسية" معروفة ومدروسة مسبقاً.

2.28 تبسيط العمليات الحسابية المعقدة: (Simplifying Complex Calculations)

تاريخياً، استُخدم التشاكل لتبسيط الحسابات البشرية قبل ظهور الحواسيب. دالة اللوغاريتم هي في جوهرها تطبيق يمثل "تشاكلاً وتماثلاً" بين زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت عملية الضرب (R^+, \cdot) و زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع $(R, +)$.

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

- **الأهمية:** هذا التشاكل حوّل عمليات الضرب للعمليات الفلكية والهندسية شديدة التعقيد إلى عمليات جمع بسيطة. وهو المبدأ الرياضي الذي بُنيت عليه أداة "المسطرة الحاسبة" (Slide Rule)، مما يثبت أن التجريد الجبري له انعكاسات ملموسة على تسهيل الحساب.

2.29 التشفير المتشاكل وأمن المعلومات: (Homomorphic Encryption)

في علوم الحاسوب الحديثة، برز تطبيق متقدم يُعرف بـ "التشفير المتشاكل". يعتمد هذا النظام المتطور على دوال تشفير تمثل تشاكلات جبرية تحافظ على بنية البيانات. [10]

- **الأهمية:** يسمح هذا التطبيق بإجراء عمليات حسابية (مثل الجمع والضرب) على البيانات المشفرة (Ciphertext) وهي في الخوادم السحابية. وعند فك تشفير النتيجة، تكون مطابقة تماماً لما لو أُجريت العمليات على البيانات الأصلية (Plaintext). هذا يضمن معالجة البيانات دون المساس بسريتها المطلقة، وهو ابتكار قائم كلياً على فكرة "حفظ البنية" التي يمثلها التشاكل الزمري.

2.30 الاستنتاج:

يؤكد هذا البحث أن نظرية الزمر ومفاهيم التشاكل والتماثل تُعد ركيزة أساسية لفهم الهياكل الجبرية وحفظ خصائصها عند انتقالها بين الأنظمة. وإنّ قوة هذه الأدوات الرياضية في قدرتها الفائقة على تبسيط العمليات المعقدة وتصنيف الزمر بشكل دقيق ومنهجي .

(Reference) المصادر

1. الذكير، فوزي والسحيباني، علي. مواضيع في الجبر (مترجم). الرياض، منشورات جامعة الملك سعود، 1994م.
2. Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
3. Artin, M. (2011). *Algebra* (2nd ed.). Pearson.
4. Rotman, J. J. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups* (4th ed.). Springer.
5. Hungerford, T. W. (2014). *Abstract Algebra: An Introduction* (3rd ed.). Cengage Learning.
6. Fraleigh, J. B. (2013). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). Pearson.
7. Gallian, J. A. (2016). *Contemporary Abstract Algebra* (9th ed.). Cengage Learning.
8. Herstein, I. N. (1996). *Abstract Algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
9. Herstein, I. N. (1996). *Topics in Algebra* (2nd ed.). Wiley.
10. Judson, T. W. (2020). *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Orthogonal Publishing.