وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة بابل كلية التربية
للعلوم الصرفة

سلاسل فوريه وبعض تطبيقاتها

بحث قدم من قبل الطالبة
(رسل كاظم جاسم)
الى مجلس جامعة بابل/ كلية التربية للعلوم الصرفة، وهو جزء من متطلبات نيل
شهادة البكالوريوس في التربية

إشراف
ا.د رحاب عامر كامل

١٤٤٥هـ ٢٠٢٤م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ءَامِنُواْ بِٱللَّهِ وَرَسُولِهِۦ وَأَنفِقُواْ مِمَّا جَعَلَكُم مُّسۡتَخۡلَفِينَ

فِيهِۖ فَٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَأَنفَقُواْ لَهُمۡ أَجۡرٞ كَبِيرٞ ﴾

صدق الله العظيم ﴿ الحديد/٧ ﴾

الاهداء

نهدي ثمرة هذا البحث الى من بلغ الرسالة وادى الامانة ونصح الامة الى النبي الهاشمي نبي الرحمة

محمد (صلى الله عليه وسلم)

والى من كلله الله بالهيبة والوقار والى من علمني العطاء دون انتظار الى من احمل اسمه بكل افتخار

الى قدوتي في الحياة الى من ستبقى نصائحه وكلماته كالنجوم اهتدي بها اليوم وفي الغد والى الابد

(والدي الحبيب)

الى من ضحت وربت وسهرت الليالي الى من افضلها على نفسي والى بسمتي في الحياة الى من لم

اجد كلاماً يعبر عنها ويفي بوصفها الى من كان دعائها ولا زال يرافقني هو سر في نجاحي

(والدتي الحبيبة)

الى من هم السند والعضد والقلوب الطاهرة والنقية الرقيقة الى النفوس البريئة الى رياحين حياتي

(اخوتي واخواتي الاعزاء)

الى من كل وقف على منابر العلم واعطى حصيلة فكر لينير طريقنا الاساتذة الكرام اهداء الى

مشرفتي الدكتورة (أ . د رحاب عامر كامل)

الشكر والتقدير

نشكر الله العلي القدير الذي انعم بنعمة العقل والدين ونثني ثناء حسن ووفاء وتقدير واعترافاً منا بالجميل نتقدم بجزيل الشكر لأولئك المخلصين الذيم لم يذخروا جهداً في مجال البحث اساتذتنا الكرام كل التبجيل والتوقير لكم يا من صنعتم المجد وبفضلكم فهمنا معنى الحياة حيث استقينا منكم العلوم والمعارف والتجارب وفضلكم عرفنا البحث على الجوهر والمضمون وبفضلكم وجدنَ لما مكانة في الحياة فأنتم لم تعلمونا حرفاً واحداً بل بمجهودكم تعلمنا الحياة ولابد لنا ونحن نخطو خطوتنا الاخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود فيها الى اعوام قضيناها في رحاب الجامعية مع اساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك مجهوداً كبيراً في بناء جيل الغد وقبل ان نمضي لا يسعنا سوى ان نتقدم بأسمي الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى اللذين حملوا اقدس رسالة في الحياة الى اللذين مهدوا طريق العلم والمعرفة.

ونخص بالشكر والتقدير مشرفة البحث الدكتورة (رحاب عامر كامل) لجهودها المبذولة معنا وكذلك نخص بالشكر رئاسة جامعة بابل والسيد عميد كلة التربية للعلوم الصرفة ورئاسة قسم الرياضيات وأساتذة قسم الرياضيات.

جدول المحتويات

جدول الرموز العامة

الرمز	عنوانه
N	مجموعة الاعداد الطبيعية
N*	مجموعة الاعداد الطبيعية ما عدا الصفر
Z	مجموعة الاعداد الصحيحة
R	مجموعة الاعداد الحقيقية
C	مجموعة الاعداد المركبة
C(R,C)	مجموعة الدوال المستمرة من R الى C
$\boldsymbol{C_{2\pi}(R,C), C_{2\pi}}$	مجموعة الدوال المستمرة والدورية من R الى C
$\boldsymbol{D_{2\pi}(R,C), D_{2\pi}}$	مجموعة الدوال $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ والتي تحقق شرط ديريكله
$\boldsymbol{C^k}$	صنف الدوال المستمرة ومشتقاتها متصلة
$\boldsymbol{P_N}$	مجموعة كثيرات الحدود المثلثية ذات درجة اقل او تساوي N

$\boldsymbol{<./.>}$	الجداء السلمي
$\boldsymbol{f^1}$	مشتق f من الرتبة الاولى
$\boldsymbol{f^{(k)}}$	مشتق f من الرتبة k
$\boldsymbol{Df}$	شبه مشتقة الدالة f
$\boldsymbol{f(x_i^+)}$	نهاية الدالة f من اليمين عند النقطة x_i
$\boldsymbol{f(x_i^-)}$	نهاية الدالة f من اليسار عند النقطة x_i
$\boldsymbol{\bar{f}}$	مرافق الدالة f
$\boldsymbol{\lvert f\rvert}$	طويلة الدالة f
$\boldsymbol{\bar{f}}$	تمديد الدالة f
$\boldsymbol{f_{\lvert . \rvert}}$	إقتصار f على المجال $[a,b]$
$\boldsymbol{f \perp \mathbf{g}}$	f تعامد g
$\boldsymbol{\hat{f}}$	معامل فوريه الأسي للدالة f

الملخص

إن الهدف من هذا البحث هو دراسة سلاسل فورييه للدوال الدورية المتقطعة الإتصال وبعض تطبيقاتها. يتكون البحث من ثلاث فصول الفصل الاول يقدم بعض المفاهيم الأساسية الضرورية في هذا البحث. الفصل الثاني مخصص لدراسة سلاسل فورييه وخواصها ومختلف أنماط تقاربها. أما الفصل الثالث فيعرض بعض التطبيقات.

المقدمة

طوال القرن الثامن عشر ، أدرك علماء الرياضيات البارزون أن سلاسل القوى كانت غيركافية لتمثيل الدوال، وأن هناك حاجة إلى نوع مختلف من السلاسل .ولقد قادت مشاكل الفيز ياء الرياضية كل من برنولي (Bernoulli) ، لاجرانج(Euler) ، أولر (Lagrange) و دالمبير (D'Alembert) إلى التساؤل بشدة حول إمكانية تمثيل الدوال بواسطة سلاسل مثلثية(حدودها ، دوال مثلثية).
أثار هذا النقاش أحد الأزمات التي شكلت عائق في تطوير التحليل.

في جلسة لا تنسى للأكاديمية الفرنسية يوم 21 من ديسمبر 1807 ، أعلن عالم الرياضيات والفيزياء جوزيف فورييه عن أطروحة بدأت فصلا جًديدًا في تاريخ الرياضيات .حيث إدعى فورييه أن كل دالة معرفة بأي رسم بياني'' يحد منطقة محددة .''يمكن تفكيكها الى مجموع مكون من دوال الجيب، جيب التمام الدورية، عارضت لجنة التقييم والتحكيم أنذاك هذه النظرية.

أظهرت الدراسات لاحقا أن إدعاء فورييه كان له ما يبرره تمامًا، على الرغم من أنه هو نفسه لم يكن قادرًا على تقديم التفاصيل الدقيقة للبرهان عليه، لإنه لم يكن يمتلك الأدوات الدقيقة المطلوبة للتعامل مع سلسلة لانهائية.
في الحقيقة هدف فورييه من النظرية السابقة كان دراسة مسألة إنتشار الحرارة، إلا أنها أصبحت حجر الزاو ية للعديد من الإكتشافات في عالم الرياضيات البحتة، حيث كان لهذا تأثير عميق على المائة عام التي تلتها من البحث الرياضي، فقد تم تحرير تعريف الدالة من أصفاده الجبرية، والتعريف الحديث للدالة ظهر من خلال عمل دير يكله(Dirichlet) وريمان (Riemann) الذي حدد مفهوم دالة'' قابلة للتكامل ''والذي تم تعميمه لاحقا بعد كثير من العمل الجاد، والتحسينات طوال القرن التاسع عشر حيث توج القرن بنظرية لوبيغ للتكامل(Lebesgue) .

حاول العديد من علماء الرياضيات، بدءاً من فورييه نفسه، إيجاد الشروط الكافية على الدوال لتساوي سلسلة فورييه الخاصة بها عند كل نقطة .بعض الشروط الضرورية واضحة .بدءاً من دورية الدوال، وهذا راجع لإن حدود سلسة فورييه دور ية .ولقد نجح دير يكله في إيجاد شروط كافية تضمن هذه المساواة، غطت هذه الشروط مجموعة كبيرة من الدوال.

الهدف من البحث، هو دارسة سلاسل فورييه للدوال الدورية المستمرة قطعيا وبعض تطبيقاتها .يتكون البحث من ثلاثة فصول:

الفصل الأول :يقدم مفهوم لكل من الدوال الدو ية، الدوال المستمرة قطعيا، والدوال القابلة للإشتقاق قطعيا وغيرها من التعاريف الأساسية، بالإضافة إلى ذلك تم التطرق إلى كثيرات الحدود المثلثية وخصائصها .

الفصل الثاني :نوضح مفهوم للسلاسل المثلثية عموما، ثم نتطرق إلي تعريف لمعاملات فورييه وبعض خواصها، تعريف لسلاسل فورييه ودراسة مسألة تقارب هذه السلاسل، و علاقتها بالدالة الأصلية .ولقد تم التطرق في هذا الإطار إلى عدة نظريات (بيسال، برسفال، ديركليه، فيجر،...).

الفصل الثالث :يوضح إستخدام سلاسل فورييه في بعض التطبيقات منها إيجاد بعض القيم لدالة ريمان.

الفصل الاول
مفاهيم اساسية

سنعرض في هذا الفصل مجموعة من التعاريف والمفاهيم التي لابد من الالمام بها قبل المرور الى سلاسل فورييه، كما سنقدم بعض النتائج التي ستفيدنا في إثبات العديد من النظريات في الفصل الثاني.

1.1 الدوال الدورية

في هذا السكشن، سنهتم بالدوال من مجموعة الاعداد الحقيقية R الى مجموعة الاعداد المركبة C.

تعريف 1.1.1. [1] لتكن f دالة من مجموعة الاعداد الحقيقية R الى مجموعة الاعداد المركبة C. ليكن T عددا حقيقياً موجباً. نقول بأن العدد الحقيقي T يمثل دورة للدالة f إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x \in R \quad , \quad f(x+T) = f(x)$$

من الواضح بأنه، إذا كان T يمثل دورة للدالة f، فإنه لكل عدد صحيح $n \in Z$ ، العدد الحقيقي nT يمثل كذلك دورة للدالة f. من الواضح كذلك بأنه، اذا كان كل من T_1 و T_2 يمثل دورة للدالة f، فإن $T_1 + T_2$ يمثل كذلك دورة للدالة f.

تعريف 1.1.2. نقول بأن الدالة fدورية، إذا وجد عدد حقيقي موجب $0 < T$، بحيث :

$$\forall x \in R \quad , \quad f(x+T) = f(x)$$

إذا كانت الدالة f دورية، و T يمثل دورة للدالة f، فإنه لدراسة الدالة f، يكفينا دراسة الدالة fعلى مجال طوله T.

أمثلة:

١) الدوال المثلثية $\cos(x)$ و $\sin(x)$ دوال دورية، لإن العدد الحقيقي 2π يمثل دورة لكل منهما.

٢) الدالة $e^{i.x} = \cos(x) + i\sin(x)$ دورية، لإن العدد الحقيقي 2π يمثل دورة لها.

٣) لكل عدد حقيقي $n \neq 0$، الدوال المثلثية $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ دوال دورية، لإن العدد الحقيقي $\frac{2\pi}{n}$ يمثل دورة لكل منهما.

٤) لكل عدد حقيقي $n \neq 0$، الدالة $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ دورية، لإن العدد الحقيقي $\frac{2\pi}{n}$ يمثل دورة لها.

٥) لتكن الدالة التالية:

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}$$

هذه الدالة دورية، لأن العدد الحقيقي 2π يمثل دورة لها. الدالة $P_N(x)$ تسمى كثيرة حدود مثلثية.

نظرية 1.1.3. [2] إذا كان العدد $0 < T$ يمثل دورة للدالة $f(x)$، فإنه لكل عدد حقيقي ثابت $a \neq 0$، الدالة التالية:

$$g(x) = f(ax)$$

دالة دورية كذلك، والعدد $\frac{T}{a}$ يمثل دورة للدالة $g(x) = f(ax)$.

نتيجة مباشرة للنظرية السابقة إذا كانت الدالة f دورية، و T يمثل دورة للدالة f، فإن الدالة التالية:

$$g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$$

ستكون حتماً دالة دورية، والعدد الحقيقي 2π يمثل دورة لها. لإثبات ذلك، يكفينا إختيار $a = \frac{T}{2\pi}$ في النظرية السابقة.

ملاحظة 1.1.4. في النظرية السابقة، الدالة الجديدة $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$، قريبة جداً من الدالة الأصلية f ودراستها كافية تماماً لدراسة الدالة الأصلية f.

1.2 [4] الدالة المستمرة قطعياً

لتكن f دالة من المجال $[a , b]$ الى مجموعة الأعداد المركبة C. نقول بأن الدالة f مستمرة قطعياً (Piecewise continuous function) إذا وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots \dots \dots \dots < x_n = b$$

بحيث:

- الدالة f تكون مستمرة على كل مجال: $(x_i \ , x_{i+1})$ وذلك لكل $i \in \{0,1, \dots . n-1\}$
- لكل $i \in \{0,1, \dots . , n-1\}$ ، النهاية التالية:

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x)$$

تكون موجودة، وتكون عدداً مركباً، هذا العدد المركب نرمز له بـــ: $f(x_i^+)$.

- لكل $i \in \{1, \dots , n\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x)$$

تكون موجودة، وتكون عدداً مركباً. هذا العدد المركب نرمز له بـــ: $f(x_i^-)$.

- لكل $i \in \{1, \dots . , n-1\}$

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_i^-} f(x)$$

هذا يعني بإختصار بأنه لكل $i \in \{0,1, \dots . n-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i, x_{i+1})}$ الى دالة مستمرة المجال المغلق $[x_i \, , x_{i+1}]$.

1.3 [6] الدالة القابلة للإشتقاق قطعيا

لتكن f دالة من المجال[a,b] إلى مجموعة الأعداد المركبة C، نقول بأن الدالة f قابلة للإشتقاق قطعيا إذا وجدت مجموعة منتهية من الاعداد الحقيقية:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

بحيث:

- الدالة f تكون قابلة للإشتقاق على كل مجال: (x_i, x_{i+1}) وذلك لكل $i \in \{0,1, \dots, \mathrm{n}-1\}$
- لكل $i \in \{0,1, \dots, \mathrm{n}-1\}$ ، النهاية التالية

$$\lim_{n \to x_i^+} f(x)$$

تكون موجودة، وتكون عددا مركباً، هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^+)$

- لكل $i \in \{0,1, \dots, \mathrm{n}-1\}$، النهاية التالية: $\lim_{x \to x_i^+} \frac{f(x) - f(x_i^+)}{x - x_i}$

تكون موجودة وتكون عددا مركبا، هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f'(x_i^+)$

- لكل $i \in \{1, \dots, \mathrm{n}\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x)$$

تكون موجودة، وتكون عددا مركباً، هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f(x_i^-)$

- لكل $i \in \{0,1, \dots, \mathrm{n}-1\}$، النهاية التالية:

$$\lim_{x \to x_i^-} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$$

تكون موجودة وتكون عددا مركبا، هذا العدد المركب نرمز له بـ: $f'(x_i^-)$

- لكل $i \in \{0,1,\dots,\mathrm{n}-1\}$

$$\lim_{x\to x_i^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_i^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_i^+} \frac{f(x)-f(x_i^+)}{x-x_i} \neq \lim_{x\to x_i^-} \frac{f(x)-f(x_i^-)}{x-x_i}$$

هذا يعني بإختصار بأنه لكل $i \in \{0,1,\dots,\mathrm{n}-1\}$، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i,x_{i+1})}$ الى دالة قابلة لإشتقاق على المجال المغلق $[x_i\,,x_{i+1}]$.

1.4 [6] **الدالة من الصنف C^k – الدالة من الصنف C^k قطعياً**

لتكن f من المجال [a,b] إلى مجموعة الاعداد المركبة C وليكن k عددا طبيعيا.

1) نقول بأن الدالة f من الصنف C^k على المجال [a,b] اذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال [a,b]، والدالة المشتقة رقم $k, f^{(k)}$ مستمرة عند جميع نقاط المجال [a,b].

2) نقول بان الدالة f من الصنف C^k قطعيا، إذا وجدت مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

بحيث:

- الدالة f تكون قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال المفتوح $(x_i\,,x_{i+1})$، و الدالة المشتقة رقم $k, f^{(k)}$ تكون مستمرة عند جميع نقاط المجال المفتوح $(x_i\,,x_{i+1})$، وذلك لكل $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$.
- لكل $i \in \{0,1,\dots,\mathrm{n}-1$ ، يمكننا تمديد الدالة $f_{/(x_i,x_{i+1})}$ الى دالة قابلة للإشتقاق k مرة عند جميع نقاط المجال المغلق $[x_i\,,x_{i+1}]$، ودالتها المشتقة من الرتبة k، تكون مستمرة عند جميع نقاط المجال المغلق $[x_i\,,x_{i+1}]$.

يعني، لكل $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$، توجد دالة g_i من الصنف C^k على المجال المغلق $[x_i\,,x_{i+1}]$ بحيث: $\mathrm{g}_{i\,/(x_i,x_{i+1})} = f_{/(x_i,x_{i+1})}$

ملاحظة 1.4.1.

1) **مجموعة الدوال المستمرة الدورية، والتي يمثل العدد الحقيقي 2π دورة لها، نرمز لها بـ: $C_{2\pi}(R,C)$ او اختصارا بـ: $C_{2\pi}$**

2) مجموعة الدوال مستمرة قطعيا والدورية، والتي يمثل العدد الحقيقي 2π دورة لها، نرمز لها بـ: $PC_{2\pi}(R,C)$ او اختصارا بـ: $PC_{2\pi}$.

3) مجموعة الدوال $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ والتي تحقق الشرط التالي، والذي يسمى بشرط ديريكله (Dirichlet):

$$\forall x \in R \, , f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

نرمز لها بـ: $D_{2\pi}(R\,,C)$ او اختصارا بـ: $D_{2\pi}$.

ملاحظة *1.4.2*. لتكن f دالة معرفة على مجال $[a, a+T]$، طولها $T > 0$، بحيث:

$$f(a+T) = f(a)$$

كما أشرنا سابقا، يمكننا تمديد مجال هذه الدالة الى مجموعة الاعداد الحقيقية R، لتصبح دالة جديدة $\tilde{f}$ دورية والعدد $T > 0$ يمثل دورة لها، وذلك كالآتي:

$$\forall x \in R \ \ , \tilde{f}(x) = f\left(\left\{\frac{x-a}{T}\right\} T + a\right)$$

1) إذا كانت الدالة الأصلية f مستمرة عند جميع نقاط المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون كذلك مستمرة عند جميع نقاط R.

2) إذا كانت الدالة الأصلية f مستمرة قطعيا على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون كذلك مستمرة قطعيا على R.

3) إذا كانت الدالة الاصلية f من الصنف C^k على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون من الصنف C^k قعطياً على R.

4) إذا كانت الدالة الاصلية f من الصنف C^k على المجال $[a, a+T]$ فإن الدالة الجديدة $\tilde{f}$ ستكون من الصنف C^k قعطياً على R، وليست بالضرورة من الصنف C^k على R.

1.5 بعض خصائص المجموعات: $PC_{2\pi}, D_{2\pi}, C_{2\pi}$

1) $C_{2\pi}(R,C) \subseteq D_{2\pi}(R,C) \subseteq PC_{2\pi}(R,C)$

2) كل دالة $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ هي دالة محدودة بالضرورة، يعني يوجد عدد حقيقي موجب $M > 0$ بحيث:

$$\forall x \in R \quad , |f(x)| < M$$

3) لكل دالـة $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ ، فـان $|f| \in PC_{2\pi}(R,C)$، كل من الـدالتين f و $|f|$ قابلة للتكامل على المجال $[0,2\pi]$ بالضرورة.

4) لتكن العمليات التالية $+$, $\times$, $\bullet$ ، والتي تعني على التوالي: جمع الدوال، ضـرب الـدوال، ضرب دالة بعدد مركب، لدينا الحقائق التالية:

- $(C_{2\pi}(R,C),+,\times)$ ، $(D_{2\pi}(R,C),+,\times)$ ، $(PC_{2\pi}(R,C),+,\times)$ تحقـق جميعهـا شـروط الحلقـة الإبدالية.

- $(C_{2\pi}(R,C),+,\bullet)$ ، $(D_{2\pi}(R,C),+,\bullet)$ ، $(PC_{2\pi}(R,C),+,\bullet)$ تحقـق جميعهـا شـروط الفضـاء الإتجاهي على حقل الأعداد المركبة.

5) لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ و $t_0 \in R$، الدالة f_{t_0} المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall t \in R \ , f_{t_0}(t) = f(t+t_0)$$

هي دالة في الفضاء $f \in PC_{2\pi}(R,C)$

6) لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ الدالة $\tilde{f}$ المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in R \ \ , \tilde{f}(t) = f(-t)$$

هي دالة في الفضاء $PC_{2\pi}(R,C)$

7) لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$. لتكن الدالتين u و v المعرفتان بالشكل التالي:

$$\forall t \in R \ , u(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} \ \ , v(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$$

لدينا الخصائص التالية:

- $f = u + v$
- u دالة زوجية وتسمى الجزء الزوجي للدالة f.
- v دالة فردية وتسمى الجزء الفردي للدالة f.
- $v \in PC_{2\pi}(R,C)$, $u \in PC_{2\pi}(R,C)$

نظرية 1.5.1. [7] **كل دالة $f \in PC_{2\pi}(R,C)$، هي حتما مستمرة إستمراراً منتظماً.**

إثبات النظرية : ليكن $\varepsilon > 0$، نحـن نعلم بـأن كل دالـة مستمرة علـى مجـال مغلـق ومحـدودة $[a,b]$ هـي حتمـا مسـتمرة إسـتمراراً منتظمـا (Heine`s Theorem)، وبالتـالي الدالـة

$f \in C_{2\pi}(R, C)$ ستكون مستمرة استمراراً منتظما على المجال $[-\pi, 3\pi]$ مثلاً: يوجد إذا $a > 0$ بحيث:

$$\forall (t\,, s) \in ([-\pi, 3\pi])^2\,, |t - s| \leq \alpha \;\Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

لتكن: $\eta = \min\{\alpha\,, \pi\}$

ليكن $x \in R\,, y \in R$ بحيث: $|x - y| \leq \eta$

يوجد عدد حقيقي $t \in [0,2\pi]$ وعدد صحيح $k \in z$ بحيث: $x = t + 2k\pi$

ليكن: $s = y - 2k\pi$

$$\Longrightarrow |x - y| = |t - s| \leq \eta$$

$$\Longrightarrow s \in |-\pi, 3\pi| \& \, |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$$

بحكم ان: $f(x) = f(t), f(y) = f(s)$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

وهو المطلوب.

نظرية 1.5.2. [5] **لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$، لدينا الحقيقة التالية:**

$$\forall a \in R\,, \int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^{2\pi} f(x)dx$$

إثبات النظرية لدينا:

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^{0} f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx$$

بالنسبة للتكامل الثالث، نختار المتغير الجديد: $t = x - 2\pi$، يصبح لدينا:

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{a} f(t + 2\pi)dt = \int_0^{a} f(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2\pi} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} f(x)dx$$

وهو المطلوب.

1.6 [7] الجداء الداخلي في الفضاءات $\boldsymbol{PC_{2\pi}}$, $\boldsymbol{C_{2\pi}}$, $\boldsymbol{D_{2\pi}}$

لكل دالتين $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ و $g \in PC_{2\pi}(R\,,C)$، *نعرف العدد المركب* $< f \,/\, g >$ بالشكل التالي:

$$< f \,/\, g > = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

الدالة $< g \,/\, f >$ تحقق الخصائص التالية:

1) $\forall f \in PC_{2\pi}(R,C)\,, \forall g \in PC_{2\pi}(R,C)\ < f \,/\, g > = \overline{< g / f >}$

2) $\forall f_1 \in PC_{2\pi}(R,C)\,, \forall f_2 \in PC_{2\pi}(R,C)\,, \forall g \in PC_{2\pi}(R,C), \forall \lambda \in C$

$$\langle \lambda f_1 + f_2 | g \rangle\ \lambda\ \langle f_1 | g \rangle\ +\ \langle f_2\ | g \rangle$$

نقول بأن الدالة $\langle . | . \rangle$ خطية بالنسبة للمتغير الأول.

3) $\forall f \in PC_{2\pi}(R,C)\ ,\ \langle f\ | f \rangle\ \geq 0$

نقول بأن الدالة $\langle . | . \rangle$ موجبة

4) $\forall f \in D_{2\pi}(R,C)\ ,\ \langle f | f \rangle\ =\ 0 \Leftrightarrow f\ = 0$

الدالة $\langle . | . \rangle$ تحقق شروط الجداء الداخلي في الفضاءين $C_{2\pi}(R,C)$, $D_{2\pi}(R,C)$ لكنها لا تحقق شروط الجداء الداخلي في الفضاء $PC_{2\pi}(R,C)$. نقول بأنها تمثل نصف جداء داخلي في الفضاء $PC_{2\pi}(R,C)$.

1.6.1. متراجحة كوشي – شفارتز

$$\forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{PC_{2\pi}(R,C)}, \forall \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{PC_{2\pi}(R,C)}, |\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle . \langle g|g\rangle$$

إثبات متراجحة كوشي- شفارتز ليكن: $\boldsymbol{f \in PC_{2\pi}(R,C)},\ \boldsymbol{g \in PC_{2\pi}(R,C)}$. لكل عدد مركب $\lambda \in C$ ، لدينا:

$$(\langle \lambda \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} | \lambda \boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \rangle) \geq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \forall\, \lambda \in C\,, \langle f|f\rangle |\lambda|^2 + 2Re(\langle f|g\rangle \lambda) + \langle g|g\rangle \geq 0$$

لنختر: $\lambda = \overline{\langle f|g\rangle} t\,,\ t \in R$.

وبالتالي:

$$\Rightarrow \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}\ , \langle f|f\rangle\, |\langle f|g\rangle|^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{t^2} + \mathbf{2}(|\langle f|g\rangle|^{\mathbf{2}})\boldsymbol{t} + \langle g|g\rangle \geq \mathbf{0}$$

إنها كثيرة حدود، في المتغير الحقيقي t ، معاملاتها حقيقية، من الدرجة الثانية، وإشارتها دائماً موجبة، هذا يعني حتماً أن المميز عدد حقيقي سالب، يعني:

$$|\langle f|g\rangle|^{\mathbf{4}} - \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle |\langle f|g\rangle|^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow |\langle f|g\rangle|^{\mathbf{2}} - \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \leq \mathbf{0}$$

وهو المطلوب.

1.7 التعامد في الفضاءات $\boldsymbol{PC_{2\pi}}\,, \boldsymbol{D_{2\pi}}\ , \boldsymbol{C_{2\pi}}$

لكل دالة $\boldsymbol{f \in PC_{2\pi}(R\,,C)}$ ، نعرف العدد الحقيقي $\|f\|_2$ بالشكل التالي:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle}$$

لدينا الخصائص التالية:

1) $\forall f \in PC_{2\pi}(R,C)\ \ ,\ \|f\|_2 \geq 0$

2) $\forall f \in D_{2\pi}(R,C)\ \ ,\ \|f\|_2 = 0 \leftrightarrow f = 0$

3) $\forall \lambda \in C\ \ ,\ \forall f \in PC_{2\pi}(R,C)\ \ ,\ \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

1.8 النظيم $\|.\|_{\mathbf{1}}$ والنظيم $\|.\|_\infty$

١) لقد ذكرنا سابقاً بأنه لكل دالة $\boldsymbol{f \in PC_{2\pi}(R,C)}$ و $\boldsymbol{|f| \in PC_{2\pi}(R,C)}$، وأن الدالة $\boldsymbol{|f|}$ قابلة للتكامل على المجال $[0, \boldsymbol{2\pi}]$ بالضرورة. لكل دالة $\boldsymbol{f \in PC_{2\pi}(R,C)}$، نعرف العدد الحقيقي $\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{2}}$ بالشكل التالي: [2]

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

٢) لقد ذكرنا سابقاً بأن كل دالة $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ ، هي دالة محدودة بالضرورة. لكل دالة $f \in PC_{2\pi}(R,C)$، نعرف العدد الحقيقي $\|f\|_\infty$ بالشكل التالي:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in R}|f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

بعض الخصائص العامة للنظمين $\|.\|_1$ و $\|.\|_\infty$

١)

$$\forall f \in PC_{2\pi}(R,C) \qquad ,\|f\|_1 \geq 0 \ \ ,\|f\|_\infty \geq 0$$
$$\forall f \in D_{2\pi}(R,C) \qquad ,\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$$
$$\forall f \in D_{2\pi}(R,C) \qquad ,\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$$

٢)

$$\forall \lambda \in C \ \ , \forall f \in PC_{2\pi}(R,C) \qquad ,\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1 \ \ ,\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$$

٣)

$$\forall f \in PC_{2\pi}(R,C) \qquad ,\forall g \in PC_{2\pi}(R,C) \quad ,\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$
$$\forall f \in PC_{2\pi}(R,C) \qquad ,\forall g \in PC_{2\pi}(R,C) \quad ,\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

1.9 كثيرة الحدود المثلثية

1.9.1 تعريف كثيرة الحدود المثلثية

كثيرة الحدود المثلثية هو دالة $P(x)$ يمكن صياغتها في الشكل التالي: [3]

$$\forall x \in R \quad , \quad P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx}$$

حيث أن المعاملات $(C_n)_{-N\leq n\leq N}$ هي أعداد مركبة ثابتة. العدد الطبيعي N يسمى درجة كثيرة الحدود المثلثية $P(x)$.

كل كثيرة حدود مثلثية $P(x)$ هو دالة في الفضاء $C_{2\pi}(R,C)$.

1.9.2 بعض خصائص كثيرات الحدود المثلثية

١) كل كثيرة حدود مثلثية $P(x)$ يمكن صياغته كذلك في الشكل التالي:

$$\forall x \in R \ \ ,P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

والعكس صحيح، لإن:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \ \ , \ \ e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$$
$$\Rightarrow \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \ \ ,\sin(nx) \ \ , \ \ \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

٢) لتكن:

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

كثيرة حدود مثلثية. لدينا:

$$C_{-n}e^{-inx} + C_n e^{inx} = (C_{-n} + C_n)\cos(nx) + i(C_n - C_{-n})\sin(nx)$$

$$\Rightarrow a_0 = 2C_0 \quad , \qquad \forall n \geq 1 \ , \qquad a_n = (C_{-n} + C_n) \, , b_n = i\,(C_n - C_{-n})$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad , \forall n \geq 1 \ , \qquad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad , C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

لقد حصلنا على العلاقة بين المعاملات C_n والمعاملات $a_n \, , b_n$ لكثيرة الحدود المثلثية $P(x)$ المعاملات C_n تسمى المعاملات الأسية لكثيرة الحدود المثلثية $P(x)$ المعاملات $a_n \, , b_n$ تسمى المعاملات المثلثية لكثيرة الحدود المثلثية $P(x)$.

نظرية ويرشتراش الامثلثية (Trigonometric weirstrass's theorem)

ليكن $\varepsilon > 0$ لكل $f \in C_{2\pi}(R, C)$ يوجد كثيرة حدود مثلثية P بحيث:

$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$$

نقول بأن مجموعة كثيرات الحدود المثلثية كثيفة في الفضاء $(C_{2\pi}(R, C), \|.\|_\infty)$

نظرية . مجموعة كثيرات الحدود المثلثية كثيفة في الفضاء $(PC_{2\pi}(R, C), \|.\|_2)$ يعني، لكل $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ ولكل $\varepsilon > 0$، يوجد كثيرة حدود مثلثية P بحيث:

$$\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$$

1.9.3 نواة ديريكله (Dirichlet Kernel)

تعريف . ليكن كثيرة الحدود المثلثية التالية: [4]

$$\mathbf{D}_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx}$$

هذه الدالة تسمى بنواة ديريكله رقم n.

بعض خصائص الدالة $\mathbf{D}_n(\mathbf{x})$

١) الدالة $\mathbf{D}_n(\mathbf{x})$ دالة زوجية.

٢) لدينا:

$$\mathbf{D}_n(0) = 2n + 1 \ , \quad \forall x \in R \ , \qquad |\mathbf{D}_n(x)| \leq \sum_{k=-n}^{k=n} |e^{ikx}| = 2n + 1$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{D}_n\|_\infty = \sup_{x \in R} |D_n(x)| = 2n + 1$$

٣) لدينا:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = 1$$

٤) بشكل عام لدينا

$$\forall x \in (0,2\pi)\,, \qquad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1.9.4 نواة فيجر (Fejer Kernel)

تعريف . ليكن كثيرة الحدود المثلثية التالي: [5]

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{D}_k\,(x)$$

هذه الدالة تسمى بنواة فيجر من الرتبة n.

بعض خصائص الدالة $F_n(x)$

١) الدالة $F_n(x)$ دالة زوجية.

٢) لدينا:

$$F_n(0) = \frac{1}{n}\sum_{ن=0}^{n-1}(2\mathrm{k}+1) = \mathrm{n} \quad , \qquad \forall x \in R\,, |F_n(x)| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|D_k(0)\,| = \mathrm{n}$$

$$\Longrightarrow \|F_n\|_\infty = \sup_{x\in R}|F_n(x)| = n$$

٣) لدينا:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(x)dx\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1) = 1$$

٤) لدينا:

$$\forall x \in (0,2\pi)\,, \qquad F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

الفصل ٢

سلاسل فورييه للدوال $f \in PC_{2\pi}$

في هذا الفصل سندرس سلاسل فورييه للدوال الدورية المستمرة قطعياً، حيث نبدأ بتعريف السلاسل المثلثية عموماً ثم نعرف معاملات فورييه، ونتطرق الى بعض خصائصها العامة. نعرف بعد ذلك، سلسلة فورييه. ثم ندرس مسألة تقارب هذه السلسلة، وعلاقتها بالدالة الأصلية، نتطرق في هذا الإطار على عدة نظريات (برسفال، ديريكله، وفيجر...).

2.1 السلاسل المثلثية

2.1.1 [5] تعريف السلاسل المثلثية

لتكن:

$$\sum_{n\geq 0} g_n$$

سلسلة من الدوال، نقول بأن هذه السلسلة مثلثية إذا كان لكل عدد كلي n، الدالة g_n يمكن صياغتها في الشكل التالي: [6]

$$\forall x \in R \ , \qquad g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}$$

حيث أن C_n, C_{-n} أعداد مركبة ثابتة.

2.1.2 تقارب السلاسل المثلثية

نظرية تمهيدية

لتكن الدالة التالية:

$$\forall x \in R \ , \qquad g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-in}$$

لدينا:

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |g_n(x)| = |C_n| + |C_{-n}|$$

إثبات النظرية التمهيدية لدينا:

$$\forall x \in R, |g_n(x)| \leq |C_n| + |C_{-n}|$$

من جهة أخرى، لتكن:

$$C_n = \rho_n e^{i\theta_n} \quad , \qquad C_{-n} = \rho_{-n} e^{i\theta_{-n}}$$

$$\Longrightarrow \forall x \in R \ , g_n(x) = C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx} = \rho_n e^{i(\theta_n + nx)} + \ \rho_{-n} e^{i(\theta_{-n} - nx)}$$

هل يوجد عدد حقيقي x بحيث يكون:

$$\theta_n + nx = \theta_{-n} - nx$$

$$\Leftrightarrow 2nx = \theta_n + \theta_{-n}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\theta_n + \theta_{-n}}{2n}$$

الجواب: نعم، وفي هذه الحالة، لدينا:

$$|g_n(x)| = \left|C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-i} \quad \right| = (\rho_n + \rho_{-n}) \left|e^{i(\theta_n + nx)}\right|$$

$$= \rho_n + \rho_{-n} = |C_n| + |C_{-n}|$$

$$\Longrightarrow \|g_n\|_\infty = sup_{x \in [0,2\pi]} |g_n(x)| = |C_n| + |C_{-n}|$$

نظرية لتكن:

$$\sum_{n \geq 0} \left(C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right)$$

سلسلة مثلثية. نقول بأن السلسلة

$$\sum_{n \geq 0} \left(C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right)$$

تقارب تقارباً طبيعياً، إذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n \geq 0} \left\|C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right\|_\infty$$

تقاربية.

لدينا الحقيقة التالية: السلسلة

$$\sum_{n \geq 0} \left(C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right)$$

تتقارب تقارباً طبيعياً اذا وفقط اذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n \geq 0} (|C_n| + |C_{-n}|)$$

تقاربية.

ملاحظة 1. لتكن:

$$\sum_{n\geq 0}\left(C_n e^{inx}+C_{-n}e^{-inx}\right)=\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

سلسلة مثلثية. هذه السلسلة تتقارب تقارباً طبيعياً اذا وفقط اذا كانت السلسلة التالية:

$$\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$$

تقاربية، لإن

$$a_n=C_n+C_{-n}\quad,\quad b_n=i(C_n-C_{-n})$$

$$\Longrightarrow |C_n|+|C_{-n}|\ \leq |a_n|+|b_n|\ \leq 2(|C_n|+|C_{-n}|)$$

٢. لتكن

$$\sum_{n\geq 0} g_n$$

سلسلة من الدوال المعرفة من المجال $[a,b]$ الى مجموعة الاعداد المركبة.

- اذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0}\|g_n\|_\infty$ تقاربية فان سلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} g_n$ تتقارب تقارباً منتظماً، لكن العكس غير صحيح.
- اذا كانت الدوال g_n متصلة على المجال $[a,b]$ وسلسلة الدوال $\sum_{n\geq 0} g_n$ تتقارب تقارباً منتظماً الى الدالة G ، فان هذه الدالة الأخيرة G ستكون حتماً مستمرة على المجال $[a,b]$.

نظرية2.1.1. [5] **لتكن**

$$\sum_{n\geq 0} a_n\cos(nx)\quad,\qquad \sum_{n\geq 0} b_n\sin(nx)$$

متسلسلتين دائريتين. لتكن $\alpha\in[0,\pi]$

١) اذا كانت (a_n) متتالية من الاعداد الحقيقية الموجبة، تناقصية، وتتقارب الى الصفر، فإن السلسلة المثلثية $\sum_{n\geq 0} a_n\cos(nx)$ تتقارب تقارباً منتظماً، على المجال المغلق $[\alpha,2\pi-\alpha]$.

٢) اذا كانت (b_n) متتالية من الاعداد الحقيقية الموجبة، تناقصية، وتتقارب الى الصفر، فان السلسلة المثلثية $\sum_{n\geq 0} \boldsymbol{b_n \cos(nx)}$ تتقارب تقارباً منتظماً، على المجال المغلق $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.

2.2 معاملات فورييه

2.2.1 [1] معاملات فورييه الأسية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و $n \in Z$ عدد صحيح. العدد المركب التالي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-in}\ dx$$

يسمى معامل فورييه الأسي رقم n للدالة f، ونرمز له بالرمز $\hat{f}(n)$ أو أحياناً بالرمز $C_n(f)$.

ملاحظة: اذا كانت الدالة f دورية، والعدد $T > 0$ يمثل دورة لها. لنفرض بأن الدالة مستمرة قطعياً على المجال $[0, T]$. في هذه الحالة، معامل فورييه الأسي رقم n للدالة f، هو معامل فورييه الأسي رقم n للدالة: $\hat{f}(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$، وهو العدد المركب التالي:

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}x} dx$$

بعض الخصائص العامة لمعاملات فورييه الأسية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$

١) لكل عدد حقيقي $a \in R$، لدينا:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

لإن الدالة $f(x)e^{-inx} \in PC_{2\pi}(R, C)$

$$\Longrightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

٢) لدينا:

$$\overset{\wedge}{\bar{f}}(n) = C_n\overline{(f)} = \overline{f(-n)}$$

لإن:

$$\overset{\wedge}{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f\overline{(x)}e^{-inx}\,dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2} f(x)\,e^{\imath nx}dx}$$

٣) لكل $f \in PC_{2\pi}(R,C)$، لنعرف الدالة $\breve{f}$ بالشكل التالي:

$$\forall x \in R \;\;, \breve{f}(x) = f(-x)$$

لدينا:

$$\forall\in Z \;\;, \overset{\wedge}{\breve{f}}(\mathrm{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\,.\,e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,e^{inu}du$$

$$= \hat{f}(-n)$$

لقد إستعملنا المتغير الجديد: $u = -x$.

٤) لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ و $a \in R$. لنعرف الدالة f_a

$$\forall x \in R \;\;, f_a(x) = f(x+a)$$

لدينا:

$$\forall n \in Z \;\;, \hat{f}_a(n) = e^{ina}\hat{f}(\mathrm{n})$$

٥) ليكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$، $\mathrm{g} \in PC_{2\pi}(R,C)$ و $\lambda \in C$، لدينا:

$$\forall n \in Z \quad , C_n\big(\lambda\mathrm{f} + \mathrm{g}\big) = \lambda C_n(f) + C_n(\mathrm{g})$$

٦) لدينا:

$$\forall n \in Z \ , \left|\hat{f}(\mathrm{n})\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)e^{-inx}\right| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

$$\Longrightarrow \forall n \in Z \ , \left|\hat{f}(\mathrm{n})\right| \leq \|f\|_1 \ \leq \ \|f\|_2 \ \leq \ \|f\|_\infty$$

نظرية 2.2.1. [3] **لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$، لنفترض بأن الدالة f مستمرة ومن الصنف C^1 قطعيا، لتكن $Df \in PC_{2\pi}(R, C)$ شبه مشتقة للدالة f، لدينا الحقيقة التالية:**

$$\forall n \in Z \quad , Df(\hat{n}) = (in)\hat{f}(n)$$

نظرية 2.2.2. لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$**، لدينا:**

١)

$$\hat{f}(n) \xrightarrow[n \rightarrowtail +\infty]{} 0 \quad , \hat{f}(-n) \xrightarrow[n \rightarrowtail +\infty]{} 0$$

٢) إذا كانت f من الصنف C^k قطعيا، لدينا:

$$n^k \hat{f}(n) \xrightarrow[n \rightarrowtail +\infty]{} 0 \ \ , \ \ n^k \hat{f}(-n) \xrightarrow[n \rightarrowtail +\infty]{} 0$$

نظرية 2.2.3. [5] **ليكن: $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و$\mathrm{g} \in PC_{2\pi}(R, C)$**

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{z} \quad , C_n(f * \mathrm{g}) = C_n(f) \times C_n(\mathrm{g})$$

2.2.2 معاملات فورييه المثلثية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و$n \in N$ عدد طبيعي، الأعداد المركبة التالية:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \ \ , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad , b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

تسمى بـ: معاملات فورييه المثلثية للدالة f.

ملاحظة:- إذا كانت الدالة f دورية، والعدد $T > 0$ يمثل دورة لها، لنفرض بأن الدالة المستمرة قطعياً على المجال $[0,T]$، في هذه الحالة، معاملات فوريه المثلثية للدالة f، هي معاملات فوريه المثلثية للدالة: $\tilde{f}(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$، وهي الأعداد المركبة التالية:

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx \quad , a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)dx \quad , b_n(f)$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)dx$$

بعض الخصائص العامة لمعاملات فوريه المثلثية

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$.

١) لكل عدد حقيقي $a \in R$، لدينا:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx \quad , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad , b_n(f)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$\Rightarrow a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad , b_n(f)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

٢) إذا كانت $f \in PC_{2\pi}(R,R)$ دالة حقيقية، فإن معاملات فوريه المثلثية للدالة f تكون جميعها أعداد حقيقية.

٣) لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$.

- إذا كانت الدالة f زوجية، فإن الدالة $f(x)\sin(nx)$ ستكون فردية وبالتالي:

$$\forall n \geq 1 \quad , b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad , b_n(f) = 0$$

- أما دالة $f(x)\cos(nx)$ فستكون زوجية، وبالتالي:

$$\forall n \geq 0 \quad , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

- إذا كانت الدالة f فردية، فإن الدالة $f(x)\,cos(nx)dx$ ستكون فردية، وبالتالي:

$$\forall n \geq 0 \quad , a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$$

أما الدالة $f(x)\sin(nx)$ فستكون زوجية، وبالتالي:

$$\forall n \geq 1 \quad , b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

٤) لدينا:

$$cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-in}}{2} \quad , \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\Longrightarrow a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = 2C_0(f)$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = C_n(f) + C_{-n}(f)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{C_{-n}(f) - C_n(f)}{i} = i(C_n(f) - C_{-n}(f))$$

٥) لدينا:

$$a_n(f) = C_n(f) + C_{-n}(f) \Longrightarrow a_n(f) \xrightarrow[n\rightarrowtail+\infty]{} 0$$

$$b_n(f) = i(C_n(f) - C_{-n}(f)) \Longrightarrow b_n(f) \xrightarrow[n\rightarrowtail+\infty]{} 0$$

2.3 مجموعة فورييه- سلسلة فورييه

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$

١) كثير الحدود المثلثية التالي

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} \hat{f}\,(n)e^{inx}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f)cos)(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

يسمى بمجموعة فوربيه من الرتبة N للدالة f.

٢) سلسلة الدوال التالية

$$\hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1} (\hat{f}(n)e^{inx} = \hat{f}(-n)e^{-inx})$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

تسمى بسلسلة فوربيه للدالة f.

2.4 تقارب سلسلة فوربيه

نظرية 2.4.1. [3] لتكن

$$\mathrm{C}_0 + \sum_{n\geq 1} (\mathrm{C}_n e^{inx} + \mathrm{C}_{-n} e^{-inx})$$

سلسلة مثلثية.

إذا كانت هذه السلسلة المثلثية تتقارب تقاربا منتظما إلى الدالة f، فإن:

١) $f \in PC_{2\pi}(R, C)$

٢) لدينا:

$$\forall \mathrm{n} \in N \quad , \hat{f}(n) = \mathrm{C}_n, \forall \mathrm{n} \in N \quad , \hat{f}(-n) = \mathrm{C}_{-n}$$

إثبات النظرية

١- بحكم أنه لكل عدد طبيعي N، كثيرة الحدود المثلثية:

$$\mathrm{P}_N(x) = \mathrm{C}_0 + \sum_{n=1}^{n=N} \left(\mathrm{C}_n e^{inx} + \mathrm{C}_{-n} e^{-inx}\right)$$

مستمرة ودورية، والعدد 2π يمثل دورة لها، وتتقارب تقاربا منتظما إلى الدالة f فإن الدالة، f ستكون بدورها مستمرة ودورية، والعدد 2π يمثل دورة لها يعني،

$f \in PC_{2\pi}(R, R)$

٢- لكل عدد صحيح n، لدينا:

$$\forall x \in R \ , \left|P_N(x)e^{-inx} - f(x)e^{-inx}\right| = |P_N(x) - f(x)|$$

وبالتالي، متتالية الدوال $\left(P_n(x)e^{-inx}\right)_N$ تتقارب تقارباً منتظما للدالة $\left(f(x)e^{-inx}\right)$، ومن ثم لدينا:

$$\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx \xrightarrow[N\rightarrowtail+\infty]{} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx \xrightarrow[N\rightarrowtail+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \hat{f}(n)$$

لكن لكل عدد طبيعيN يحقق الشرط:

$$|n| \leq N$$

لدينا:

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}dx = C_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in Z \ , \hat{f}(n) = C_n$$

2.4.1 تقارب سلسلة فورييه في الفضاء $\boldsymbol{PC_{2\pi}, \|.\|_2}$

متراجحة بيسال (Bessel`s Inequality)

نظرية تمهيدية لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ ليكن P_N: الفضاء الاتجاهي الجزئي المولد بالمجموعة التالية:

$$\left\{e_k = e^{ikx} / k \in \{-N, \dots, N\}\right\}$$

يعني، P_N هو مجموعة كثيرات الحدود المثلثية التي درجتها تكون أصغر أو تساوي العدد الطبيعي N لدينا:

١) $S_N(f)$ هي كثير الحدود المثلثية الوحيدة في P_N التي تحقق الشرط التالي:-

$$\forall P \in P_N \quad , [f - S_N(f)] \perp P$$

٢) لكل عدد طبيعي N، لدينا

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \left|f^{\wedge}(n)\right|^2 \le \|f\|_2^2$$

نظرية 2.4.2. [1] **المتتالية التالية:**

$$\left(\sum_{n=-N}^{n=2} \left|\hat{f}(n)\right|^2\right)$$

متتالية تزايدية ومحدودة، وبالتالي ستكون حتما تقاربية، لنرمز للعدد الذي تتقارب إليه بالرمز التالي

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{n=2} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 =$$

لدينا الحقيقة التالية:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \le \|f\|_2^2$$

هذه المتراجحة تسمى بمتراجحة بيسال (Bessel`s theorem)

نظرية برسفال (Parseval`s theorem)

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$، لدينا

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \|f\|_2^2$$

ملاحظة 2.4.1. ١) $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ نظرية برسفال بالنسبة للمعاملات المثلثية

كالتالي:

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2}\right) = \|f\|_2^2$$

حيث a_n و b_n المعاملات المثلثية للدالة f.

٢) لقد ذكرنا سابقا انه إذا كانت الدالـة f دوريـة، والعدد $T > 0$ يمثل دورة لها، وإذا كانت هذه الدالة مستمرة قطعياً على المجال $[0, T]$، في هذه الحالـة، معامل فورييـه الأسـي رقم n للدالة f، هو معامل فورييه الأسي رقم n للدالـة. $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$، وهو العدد المركب التالي:

$$C_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$$

بالتالي نظرية برسفال تصبح في الشكل التالي:

$$\|\tilde{f}\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2$$

نظرية 2.4.3. لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$، لدينا:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \xrightarrow[N\mapsto\infty]{} 0$$

2.4.2 التقارب البسيط لسلسلة فورييه

نظرية ديريكله (Dirichlet) [5]

لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و$x_0 \in R$: ليكن

$$l_0 = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

إذا كانت النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2l_0}{x}$$

موجودة وتكون عددا مركبا، فإن:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = l_0$$

نظرية 2.4.5. لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و $x_0 \in R$.

إذا كانت النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)-f(x_0^+)}{x},\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)-f(x_0^-)}{x}$$

موجودتين، وكانتا عددين مركبين، فإن:

$$\lim_{N\longmapsto\infty}S_N(f)(x_0)=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

إثبات النظرية ليكن:

$$l_0=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

لو جمعنا النهايتين السابقتين، لحصلنا على:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-f(x_0^+)+f(x_0^-)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2l_0}{x}$$

موجودة، وتكون عددا مركبا وبالتالي، حسب النظرية السابقة، فإن:

$$\lim_{N\longmapsto\infty}S_N(f)(x_0)=l_0=\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$$

ملاحظة 2.4.3. في نص ديريكله، الشرط:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)-2l_0}{x}$$

ضروري لصحة النظرية وإذا نجح عالم الرياضيات الالماني دوبوا ريمون (Du Bois- Reymond) سنة ١٨٧٦م في إيجاد دالة متصلة $f\in PC_{2\pi}(R,C)$، لكن في سلسلة فورييه لهذه الدالة لا تتقارب عند النقطة 0.

2.4.3. التقارب الطبيعي لسلسلة فورييه

نظرية 2.4.6. لتكن $f\in PC_{2\pi}(R,C)$، لنفرض بأن الدالة f متصلة ومن الصنف C^1 المتقطعة، لدينا سلسلة فورييه للدالة f تتقارب تقاربا طبيعيا للدالة f.

2.4.4 التقارب المنتظم لسلسلة فورييه

إذا كانت سلسلة فورييه للدالة $f\in PC_{2\pi}(R,C)$ تتقارب تقاربا منتظما للدالة f عند نقطة x_0 فحتما، ستكون الدالة f مستمرة عند هذه النقطة x_0، لإن الدوال $\left(S_N(f)\right)_N$ هي دوال مستمرة عند جميع نقاط R وعلى وجه الخصوص، عند النقطة x_0 لكن هل العكس صحيح؟

يعني، إذا كانت $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ وكانت x_0 ضمن نقاط استمرار الدالة ، فهل يوجد مجال مغلق $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ بحيث سلسلة فورييه للدالة f تتقارب تقاربا منتظما للدالة f على هذه المجال؟ لنبدأ بالمثال التالي:

مثال: لتكن الدالة $h \in PC_{2\pi}(R,C)$، الفردية، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in (0,\pi)\,, \qquad h(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

إنها دالة من الصنف C^1، مستمرة عند جميع النقاط $R - 2\pi Z$

$$\forall x \in Z \quad, h(2k\pi) = h(0) = 0$$

$$\forall x \in Z \quad, h[(2k\pi)^+] = h(0^+) = \frac{\pi}{2} \quad, h[(2k\pi)^-] = h(0^-) = -\frac{\pi}{2}$$

معاملات فورييه المثلثية a_n، b_n للدالة $h \in PC_{2\pi}(R,C)$، بحكم أن الدالة h فردية، فأن: $\forall n \in N \;,\; a_n = 0$

$$\forall n \in N, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\frac{\cos(nx)}{n}dx$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n^2}[\sin(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n}$$

الخلاصة

$$\forall n \in N\,, a_n = 0 \;,\; \forall n \in N \;,\; b_n = \frac{1}{n}$$

سلسلة فورييه للدالة $h \in PC_{2\pi}(R,C)$، هي السلسلة التالية:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

لقد أثبتنا سابقا، بان هذه السلسلة المثلثية تتقارب تقاربا منتظما على كل مجال مغلق $[\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha]$، حيث أن $\alpha \in [0,\pi]$ من جهة اخرى حسب نظرية ديريكله، لدينا:

$$\forall x \in [\alpha+2k\pi, 2(k+1)\pi-\alpha]\ , S_n(h)(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sin(kx)}{k} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} \frac{h(x^+)+h(x^-)}{2} = h(x)$$

وبالتالي سلسلة فورييه للدالة h تتقارب تقاربا منتظما للدالة h على كل مجال مغلق $[\alpha+2k\pi, 2(k+1)\pi-\alpha]$ حيث ان $\alpha \in [0,\pi]$.

هذ المثال سيساعدنا على إثبات النظرية التالية:

نظرية 2.4.7. لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ لنفرض بأن الدالة f من الصنف C^1 قطعيا، سلسلة فورييه للدالة f تتقارب منتظما للدالة f على كل مجال مغلق ومحدودة لا تحتوي نقاط عد استمرار للدالة f.

2.4.5. تقارب مجاميع فيجر بالنسبة للدوال $f \in C_{2\pi}$

مجموعة فيجر للدالة

تعريف 2.4.1. لتكن $f \in PC_{2\pi}(R,C)$ كثيرة الحدود المثلثية التالية:

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x)$$

يسمى بمجموع فيجر للدالة f من الرتبة n. الرمز $S_k(f)(x)$ يعني مجموع فوريه للدالة f من الرتبة k.

نظرية 2.4.8. [7] **لتكن** $f \in PC_{2\pi}(R,C)$**. لدينا**

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) = (\boldsymbol{F_n * f})(\boldsymbol{x})$$

حيث أن الرمز F_n يعني نواة فيجر من الرتبة n.

إثبات النظرية لدينا:

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(D_k * f)(x) = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k\right) * f\right](x) = (F_n * f)(x)$$

نظرية فيجر (Fejer`s theorem) [5] **لتكن $f \in C_{2\pi}(R,C)$ لدينا: متتالية كثيرات الحدود المثلثية $T_n(f) = (F_n * f)$ تتقارب منتظما للدالة f.**

التقارب البسيط لمجاميع فيجر بالنسبة للدوال الغير المستمرة، لدينا النظرية التالية:

نظرية 2.4.9. **لتكن $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ و $x_0 \in R$، لدينا:**

$$T_n(f)(x_0) \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

الفصل الثالث

بعض التطبيقات لسلاسل فورييه

في هذا الفصل نقدم بعض من تطبيقات سلاسل فورييه، نوضح بعض القيم لدالة ريمان،

3.1 [6] دالة ريمان

سنحل في البداية المسألتين التاليتين: <u>المسألة الاولى</u>

لتكن الدالة $f \in PC_{2\pi}(R, C)$ فردية، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in (0, \pi), f(x) = 1$$

١) ابحث عن معاملات فورييه المثلثية للدالة f .

٢) استنتج أن:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

٣) استنتج أن:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

<u>حل المسالة الاولى</u>

١) بحكم أن الدالة f فردية لدينا:

$$a_n(f) = 0, \qquad b_n(f) = \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n)$$

$$\Longrightarrow a_n(f) = 0, \qquad b_{2n}(f) = 0, \quad b_{2n+1}(f) = \frac{4}{\pi(2n+1)}$$

٢) بحكم أن الدالة $f \in D_{2\pi}(R, C)$، وتحقق شروط نظرية ديريكله، لأنها من الصنف C^1 قطعيا، فان الدالة f تساوي حتما سلسلة فورييه الخاصة بها، يعني:

$$\forall x \in R, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}(-1)^n$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

٣) نستعمل نظرية برسفال للدالة f

$$\|f\|_2^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|b_n|^2}{2}$$

$$\Longrightarrow 1=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)}(-1)^n\right)^2$$

$$\Longrightarrow 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

لكن، المجموع:

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

$$=\frac{1}{4}S+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\Longrightarrow S = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Longrightarrow S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

المسألة الثانية لتكن الدالة $f \in PC_{2\pi}(R, C)$، المعرفة بالشكل التالي:

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2$$

١) ابحث عن معاملات فورييه المثلثية للدال f.

٢) استنتج ان:

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

٣) استنتج ان:

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

حل المسألة الثانية

١) بحكم ان الدالة f زوجية، لدينا:

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad b_n(f) = 0$$

٢) بحكم ان الدالة $f \in C_{2\pi}(R, C)$، وتحقق شروط نظرية ديريكله، لانها من الصنف C^1 قطعياً، فان الدالة f تساوي حتما سلسلة فورييه الخاصة بها، يعني:

$$\forall x \in R, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

$$\Longrightarrow f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

٣) نستعمل نظرية برسفال للدالة f.

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

References

[1] Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press,New York, 2011.

[2] Antoni Zygmund , Trigonometric Series, Cambrridge University Press, London, 1959.

[3] Cornelius Lanczos, Discourse on Fourier Series, the Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia,USA,2016.

[4] John Srdjan Petrovic, Advanced Calculus Theory and Practice, Taylor, Francis Group, LLC,New York, 2014.

[5] Roald M. Trigub and Eduard S. Belinsky, Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer, Dordrecht, 2004.

[6] Stevenb Damelin, Willard Miller,J R, The Mathematics of Signal Processing, Cambridge University Press,Cambridge,2012.

[7] Valery Serov, Fourier Series Fourier Transform and their Applications to Mathematical Physics, Springer International ,Finland,2017.