رية العراق
لعالي والبحث العلمي
-كلية التربية للعلوم
الصرفة
ل-قسم رياضيات

مقدمة حول الاعداد المركبة

بحث مقدم لمجلس كلية التربية للعلوم الصرفة كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

من قبل الطالبة

شروق عبد الكريم ياسين عزاوي

اشراف

م.م حيدر فيصل غازي

1445 ه 2024م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وَلَقَدْ آتَيْنَا دَاوُودَ وَسُلَيْمَانَ عِلْمًا ۖ وَقَالَا الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي
فَضَّلَنَا عَلَىٰ كَثِيرٍ مِّنْ عِبَادِهِ الْمُؤْمِنِينَ * وَوَرِثَ سُلَيْمَانُ
دَاوُودَ ۖ وَقَالَ يَا أَيُّهَا النَّاسُ عُلِّمْنَا مَنطِقَ الطَّيْرِ وَأُوتِينَا مِن كُلِّ
شَيْءٍ ۖ إِنَّ هَٰذَا لَهُوَ الْفَضْلُ الْمُبِينُ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ

سورة النمل الآيات (١٥_١٦)

الاهداء

أهدي تخرجي الى منبع الحب والحياة إلى روحك الطيبة إلى معنى

الرجولة الحقيقية الى من علمني معاني كثيره في الحياه الى من

تربيت على يده أبي الحبيب الذي لن يأتي مثله أبداً

. . . .أبي الحبيب

هدي تخرجي الى من وضع الله الجنة تحت اقدامها الى نبع الحب

التي حفر اسمها على جدار قلبي الى من سهرت الليالي من

اجل راحتي الى منبع الطيبة والحنان . . .امي الحبيبة الغالية

الى من حفروا بصورهم الرقيقة على جدران قلبي ذكرى لم يمحوها

غبار زملائي وأصدقائي الطيبون

الشكر

بسم الله والحمد والشكر لله رب العالمين الذي بنعمته تتم الصالحات الحمد لله الذي بتوفيقه وتسهيل منه جل في علاه كملت مسيرتي العلمية وانتهت دراسة البكالوريوس بعد مسيرة دراسية حملت في طياتها الكثير من الصعوبات والمشقة والتعب اليوم نقطف ثمرها والحمد لله الى من علموني الحرف الأول وبصرني بالعلم على من أخذوا بيدي في هذا المجال وجعلوا من العلم احلى آيات المنال أساتذتي الافاضل واختص بالشكر الاستاذ حيدر فيصل غازي

فهرست المحتويات

الخلاصة

تم دراسة هذا البحث الذ يتحدث عن الاعداد العقدية والدوال العقدية الذي يتكون من فصلان الفصل الأول يتحدث عن الاعداد العقدية ومن اهم المواضيع الذي تطرقنا الية وهي تطرق الى

الاعداد العقدية وخواصها وكذلك تطرق على الدوال العقدية المتعددة القيم اما الفصل الثاني يتحدث عن الدوال العقدية فقد تطرق البحث بعتبار الدالة العقدية كتطبيق من ثم درسنا الغايات والاستمرارية للدوال العقدية

المقدمة

كشف نقولو تارتاجليا Niccolo Tartaglia طريقة لحل معادلات الدرجة الثالثة؛ وأسر بطريقته إلى جيروم كاردان Jerome Cardan جيرومينو كاردانو (Geromino Cordano الذي نشرها على أنها طريقته هو (١٥٤٥) وتحداه تارتاجليا أن يدخل معه في مبارزة جبرية، يعرض فيها كلاهما إحدى وثلاثين مسألة يحلها الآخر. وأخفق التلميذ ونجح تارتاجليا، ولكن كاردان كتب سيرة لنفسه عجيبة فاتنة خلدت اسمه على مر الأيام.وتبدأ السيرة بالصراحة العجيبة التي تسري فيها من أولها إلى آخرها:ولدت في الرابع والعشرين من سبتمبر سنة ١٥٠١ مع أن أدوية لإجهاض أمي قد جربت ولم تفلح كما سمعت... ومع أن المشتري كان في الأوج والزهراء كانت تسيطر على طالعي، فإني لم أصب بعاهة تمنعني من العمل الدائم، إلا في أعضائي التناسلية، ولهذا فإني ظللت في سن الحادية والعشرين إلى الحادية والثلاثين عاجزاً عن مضاجعة النساء، وكثيراً ما رثيت لمصيري وحسدت كل من عداي على حسن حظه؟!ولم تكن هذه عاهته الوحيدة؛ فقد كان يتهته في كلامه، وظل طول حياته يشكو بحة الصوت والرشح في الحلق، وكثيراً ما كان يصاب بعسر الهضم، وخفقان القلب، والفتق، والمغص، وزحار البطن، والبواسير، والنقرس، والحكة في الجلد، وسرطان في حلمة الثدي اليسرى، وأصيب بالطاعون، والحمى الثلاثية، وكانت تنتابه "فترة سنوية من الأرق تدوم نحو ثمانين يوماً". "وفي عام ١٥٣٦ أصابني انطلاق البول بدرجة مدهشة كبيرة، ومع أني قد مضى علي نحو أربعين عاماً أقاسي شر هذا الداء، فأفرز من البول ما بين ستين ومائة أوقية في اليوم، فإني أعيش سليماً فيما عدا ذلك"(١٣). وإذ كان قد وهب كل هذه التجارب الطيبة، فقد صار طبيباً ناجحاً، داوى نفسه من كل داء تقريباً إلا داء الغرور، واشتهر بأنه أكثر من يُسعى إليه من الأطباء في إيطاليا، وكان يطلب من بلاد بعيدة مثل اسكتلندة ليداوي رئيس أساقفة عجز عن مداواته نفس الأطباء، فشفاه هو من مرضه. وألقى وهو في الرابعة والثلاثين من عمره محاضرات عامة في العلوم الرياضية بميلان، كما ألقى محاضرات في الطب وهو في سن الخامسة والثلاثين. وفي عام ١٥٤٥ نشر كتاباً يدعى الفنون الكبرى Ars Magna استعار عنوانه من ريمند للي Raymond Lully ، أضاف فيه معلومات قيمة إلى علم الجبر الذي لا يزال يتحدث عن "قاعدة كاردان" لحل المعادلات التكعيبية، ويبدو أنه هو أول من قال إن معادلات الدرجة الثانية قد تكون لها جذور سالبة. وقد بحث هو مع تارتاجليا وقبل ديكارت بزمن طويل في إمكان استخدام الجبر في الهندسة(١٤). وبحث في كتابه De Subtilitate Rerum، (1551)في موضوع التصوير بالألوان، ولخص في De Rerum Varietate ، (1557) المعلومات الطبيعية المعروفة في أيامه، وهو مدين في هذين الكتابين بالشيء الكثير لمخطوطات ليوناردو التي لم تكن قد نشرت وقتئذ(١٥). وقد ألف وسط أمراضه، وأسفاره، ومتاعبه الشديدة

المرهقة ٢٣٠ كتاباً، طبع منها حتى الآن ١٣٨ كتاباً، وقد أوتي من الشجاعة ما يكفي لإحراق بعضها.وعلم الطب في جامعتي بافيا وبولونيا، ولكنه كان يخلط علمه بالمعلومات السحرية الخفية، وبالزهو الصارخ الذي أفقده احترم زملائه. وقد خصص مجلداً كبيراً لبحث العلاقات بين الكواكب ووجه الانسان، وبلغ من الخبرة والسخف في تفسير الأحلام ما بلغه فرويدFreud ، كما بلغ من قوة الأيمان بالملائكة الحافظين ما بلغه الراهب أنجليكو، ولكنه مع ذلك ذكر أسماء عشرة رجال قال إنهم أصحاب أكبر العقول في التاريخ ولم تكن كثرتهم الغالبة من المسيحيين: أرخميدس، وارسطو، وإقليدس، وأبولونيوس البرجاوي، وارشيتاس التارنتومي Archytas of Tarentum والخوارزمي، والكندي، وابن جبير، ودنزاسكوتس، ورتشرد اسوينزهد Richard Swineshead- وكلهم من العلماء ما عدا دنزاسكوتس، وخلق كاردان لنفسه مائة عدو، وجلب على نفسه ألف تهمة مزورة، وكان تعيساً غير موفق في زواجه، وحاول عبثاً أن ينقذ ابنه الأكبر من الإعدام لأنه سم زوجة خائنه، ثم انتقل إلى روما في عام ١٥٧٠، واعتقل فيها إما لأنه مدين، وإما لأنه ملحد، أو لكلتا التهمتين معاً، ولكن جريجوري الثالث عشر أطلق سراحه ورتب له معاشاً سنوياً.كتب وهو في سن الرابعة والسبعين كتاب سر حياتي De vita propria liber- وهو إحدى ثلاث سير ذاتية ألفت في تلك الفترة من الزمن في إيطاليا. وقد حلل نفسه في هذا الكتاب بثرثرة وأمانة قريبتين كل القرب من ثرثرة منتاني وأمانته- حلل جسمه، وعقله وخلقه، وعاداته، وميوله، ما يحب وما يكره، فضائله، ورذائله، وأسباب شرفه وعدم شرفه، واخطاءه ، ونبوءاته، وأمراضه، وتقلباته، وأحلامه؛ وهو يتهم نفسه، بالعناد، والحقد، وعدم الألفة مع بني جنسه، والتسرع في أحكامه، والخصام، والغش في لعب الميسر، والميل إلى الانتقام، ويذكر: "تبدل الحياة الفاجرة التي كنت أحياها في العام التي كنت أحياها في العام الذي كنت فيه مديراً لجامعة بدوا"(١٦). ويذكر قوائم: بالأشياء التي أشعر أنني أخفقت فيها" وخاصة حسن تربية أبنائه، ولكنه أيضاً يورد أسماء ثلاثة وسبعين كتاباً ذكر فيها اسمه، ويحدثنا عما كان له من كثير من ضروب العلاج الناجحة والتنبؤات الصادقة، وعن مقدرته الفائقة في المناقشات. وهو يأسف لما أصابه من ضروب الاضطهاد، وللأخطار "التي أحاطت بي بسبب أرائي التي لا تتفق مع السنين المألوفة"(١٧). ويسأل نفسه، "أي حيوان أراه أشد غدراً، وخسة، وخداعاً من الإنسان؟" ثم لا تجيب عن هذا السؤال، ولكنه يسجل أشياء كثيرة توفر له السعادة، منها التغير، والطعام، والشراب، وركوب البحر، والموسيقى، ومناظر الدمى المتحركة، والقطط، والعفة، والنوم، ويقول: "إذا نظرت إلى جميع الأغراض التي قد يبلغها الإنسان، خيل إلي أن أعظم ما يسبب لي السرور منها هو الاعتراف بالحقيقة"(١٨). وكان مطلبه المحبب إليه هو دراسة الطب، الذي ابتكر فيه كثيراً من أنواع العلاج المدهشة.فادسيو كاردانوFazio Cardano ، والد جيرولامو كاردانو العالم الطبيعي (١٥٠١-١٥٧٦) أخبر ولده أن ليوناردو نفسه قد جرب الطيران.

الفصل الاول

الاعداد العقدي

١.١ المقدمة

يُعرف الرقم المركب بأنه مجموع عدد حقيقي ورقم افتراضي، حيث يتم التعبير عن العدد المركب في الشكل القياسي عند كتابتهa+bi ، حيث a هو الجزء الحقيقي، و bi هو الجزء الافتراضي، ويتم تمييز الأرقام الافتراضية عن الأعداد الحقيقية بواسطة تربيع العدد؛ إذ ينتج عن تربيع الأعداد الحقيقية عدد موجب، بينما ينتج عن تربيع العدد الافتراضي عدد حقيقي سالب، بالإضافة إلى إمكانية استخدام العمليات الحسابية على الأعداد المركبة أو العقدية مثل الجمع، والطرح، والضرب

(2.1)الاعداد العقدية وخواصها

تعريف (1.2.1)

يعرف العدد العقدي (المركب)بأنة الزوج المرتب (x,y) ويرمز له عادة بالرمز z ويكتب بالشكل $z = x + iy$حيث $i = \sqrt{-1}$ وعلية نسمي x بالجزء الحقيقي للعدد z ويرمز لة بالرمز x=Rez اما y فيمثل الجزء الخيالي للعدد z ويرمز لة بالرمز y=Im z وهي اعداد تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية R اما مجموعة الاعداد العقدية (المركبة) فيرمز لة بالرمز ℂ ويعبر عنها

$$\mathbb{C} = \{(x, y): x, y \in R\}$$

مثال(2.2.1)

الاعداد الاتية هي اعداد عقدية $(Z = 3i, Z = 5 + 6i, Z = 5\ , Z = 3 - 3I$

نظرية (3.2.1):(الخواص الجبرية للعدد العقدي)

1-خاصية الجمع :لتكن $Z_2 = X_2 + iy_2, z_1 = x_1 + iy_1$ عددين معقدين فانة حاصل الجمع يعرف بالشكل الاتي

$$z_1 \pm \overline{x_2} = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) = z_2 + z_1$$

مثال (4.2.1): لتكن $z_2 = 1 - i\ , z_1 = 3 + 3i$ فان

$$z_1 + z_2 = (3 + 3i) + (1 - i) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i$$

2-خاصية الضرب : $z_2 = x_2 + iy_2\ , z_1 = x_1 + iy_1$ عددين معقدين فن حاصل الضرب يعرف بالشكل الاتي :

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1) . (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = z_2 . z_1$$

مثال(5.2.1): لتكن $z_2 = 2 - i\ , z_1 = 1 + 2i$ فان

$$z_1 . z_2 = (1 + 2i) . (2 - i)$$

$$= \big(1.2 - 2(-1)\big) + i\big(1(-1) + 2(2)\big)$$

$$= (2 + 2) + i(-1 + 4)$$

$$= 4 + 3i$$

3-خاصية القسمة: لتكن $z_2 = x_2 + iy_2 , z_1 = x_1 + iy_1$ عددين معقدين فان حاصل قسمة يعرف بالشكل الاتي

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \quad \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

ملاحظة(6.2.1): الخاصية الابدالية والتجمعية وتنطبق على الاعداد العقدية كما في الاعداد الحقيقية

مثال(7.2.1) : لتكن

$$z_2 = 2 - 3i\,, z_1 = 4 + i$$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

ملاحظة(8.2.1):

1-العنصر المحايد المحايد لعمية الجميع (0,0) أي ان z=0

2- العنصر المحايد لعملية الضرب (1,0) أي ان z=0

3- النظير الجمعي للعدد العقدي هو (x,y)– أي ان z–

4- النظير الضربي للعدد العقدي هو $z^{-1} = (x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

5-حقل الاعداد $\mathbb{C}$ هو حقل غير مرتب برهان الملاحظة 5 والملاحظة 4 تترك تمرين لطالب

ملاحظة(8.2.1): جد النظير الضربي للعد المعقد

$$z = -7 + 5i$$

ان النظير الظربي للعدد z هو

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-7+5i} = \frac{-7-5i}{(-7+5i)(-7-5i)}$$

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$.z^{-1} = -\frac{7}{74} - \frac{5}{74}i$$

3.1 مرافق العدد العقدي

لتكن $z = x + iy$ فان العدد المرافق للعدد z ويرمز لة بالرمز $\bar{z}$ ويعرف كالاتي

$$\bar{z} = x - iy$$

والقيمة المطلقة (المقياس) للعدد العقدي ويرمز لة بالرمز $|z|$ $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ويسمى طول العدد ويكافئ الصيغة

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

مثال(1.3.1): لتكن z=3-i فان $\bar{z} = 3 + i$ وكذلك $|z|\ \sqrt{(3)^2 + (-1)} = \sqrt{10}$

4.1خواص مرافق ومقياس العدد العقدي:

1- $Rez = \frac{z+\bar{z}}{2}, lm\ z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

2- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$

3- $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$

4- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ بشرط ان $z_2 \neq 0$

5- $z \in R \leftrightarrow z = \bar{z}$

6- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ بشرط ان $z_2 \neq 0$

7- $|\bar{z}| = |z|$

8- $\bar{\bar{z}} = z$

نظرية (1.4.1):لتكن $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فان

$lm\ z_1 \le |z_1|\ , Re\ z_1 \le |z_1|$-1

$$|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|\overline{z_1}z_2\ | + |z_2|^2 \le (|z_1|\ + |z_2|)^2$$

وباخذ الجذر التربيعي للطرفين نستنتج المطلوب

$|z_1 + z_2| \ \le |z_1| + |z_2|$ -2

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$$

$$= (z_1+z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}\ )$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}\ + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}\ \ z_2} + \overline{z_1}\, z_2 + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2Re\ (\overline{z_1}\, z_2) + |z_2|^2$$

$|z_1 - z_2| \ge |z_1|\ + |z_2|$ -3

$$|z_1 - z_2|\ \le |z_1| + |z_2|$$

$$\text{since } |z_1+z_2| \le |z_1+z_2|$$

$$\to |z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |z_2|$$

$$= |z_1| + |z_2|$$

$|\ \ |z_1| - |z_2|\ \le |z_1 + z_2|\ \ \le |z_1| + |z_2|\ \ \ |$ -4

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \le |z_1+z_2| + |z_2|$$

$$\to |z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \dots\dots\dots..(1)$$

$$from(2) \to |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2| \dots\dots.(2)$$

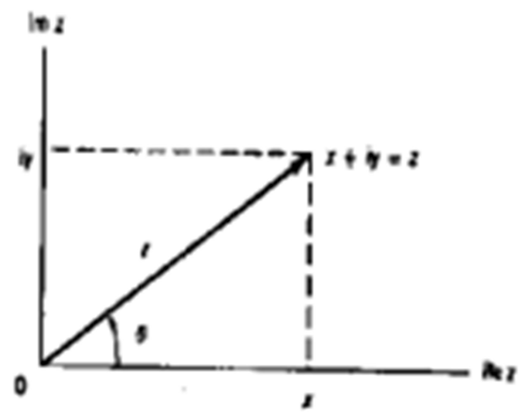
$$from\ (1) and\ (2)$$

$$\rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

5.1 التمثيل الهندسي والصيغة القطبية للعدد العقدي

1.5.1 تعريف

عند رسم $z = x + i$ في المستوى العقدي $\mathbb{C}$ فان $|z|$ يمثل طول المتجه الواصل بين النقطة (x,y) ونقطة الاصل العدد (0,0) كما في الشكل



شكل رقم (1)

الزاوية θ الظاهرة في الشكل تسمى سعة (argument) العدد العقدي z وبالشكل $\theta = \arg z$

وتعرف بانها الزاوية التي يصنعها العدد العقدي مع محور السينات الموجب

نلاحظ ان θ غير وحيدة التحديد لان عوضنا ب $\theta + 2n\pi$ حيث $n \in z$ فاننلا نحصل على نفس النقطة بينما تكون وحيدة حين $-\pi < \theta \leq \pi$ عندئذ نطلق عليها القيمة الاساسية للسعة *arg z* ويرمز لها بالرمز *Arg z*

مثال(2.5.1): جد سعة *Arg z* والقيمة الاساسية للعدد العقدي $z = 1 + i$

الحل : حسب تعريف السعة θ نجد ان $Arg\ z = \frac{\pi}{4}, -\pi < 0 \leq \pi$ اما الان سنوضح الصيغة القطبية للعدد العقدي

$$\arg z = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

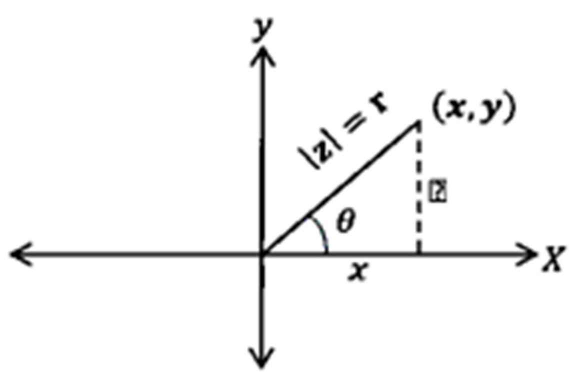
$$n = 0, \pm1, \pm2$$

تعريف (3.5.1):(الصيغة القطبية)

لتكن r و θ الاحداث القطبية للنقطة (x,y) التي تقابل العدد العقدي الغير صفري $z=x+iy$ من المعرف سابقا ان $x = rco\ \ \theta\ ,y = r\ sin\ \theta$ كذلك العدد z نستطع كتابه بالصيغة القطبية وكما يلي

$$z = r(cos\theta + isin\ \ )$$

حيث $\theta, r = |z|$ هي السعة للعدد العقدي z كما نبينة بالشكل



شكل رقم (2)

$$n = 0, \pm1, \pm2\ , \ldots$$

اما القيمة الاساسية لهذا السعة فهي اصغر قيمة موجبة للسعة θ حيث $Arg\ z = \frac{2\pi}{3}, -\pi < \theta \leq \pi$

نظرية(4.5.1): Z_1, Z_2 عددان معقدان فان

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ -1

$$z_1 . z_2 = r_1(cos\theta_1 + is \quad _1) r_1(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[cos\theta_1 co \quad _2 - isin\theta_2 sin\theta_2) + \mathrm{i}[\cos\theta_1 si \quad _2 + cos\theta_2 sin\theta_2]$$

$$= \boldsymbol{r_1 r_2}[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$arg \ \ _1 z_2 = \theta_1 + \theta_2$$

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1 + \theta_2$$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg z_1 - \arg z_2$ -2

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_2 - arg z_2$$

$$arg z_1 + \arg\frac{1}{z_2} = arg z_1 + [-arg z_2]$$

$$= \arg z_1 - \arg z_2$$

$\arg(\overline{z_1}) = -arg z_1$ -3

$$z = r(cos\theta - isin\theta) = r\big(\cos(\theta) + isin(-\theta)\big)$$

$$= -\theta = -\arg z$$

$$\arg \bar{z} = -arg z$$

تعريف (5.5.1)

تعرف صيغة اويلر بالشكل الاتي

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

حيث θ قيمة حقيقية تقاس بالزاوية النصف القطرية لذا يمكن اعادة تعريف العدد العقدي المعرف بالصيغة (1) بالصيغة الاتية

$$z = re^{i\theta}$$

مثال(6.5.1) : اكتب العدد *z=-1-i* بصيغة اويلر

الحل :

$$\theta = \tan^{-1} - \frac{1}{-1} = \tan^{-1} 1$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\ , n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots ..$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

لذا يكون $-1 - i = \sqrt{2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)}}$

مثال(7.5.1) : جد السعة والقيمة الاساسية للسعة واكتب صيغة اويلر للعدد العقدي

$$z = \frac{-2 - 2i}{\sqrt{3} + i}$$

الحل:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-2}{-2} = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

$$arg z = \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$= \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{13\pi}{12} + 2n\pi \, , n = 0, \pm1, \pm2 \, , ...$$

فتكون الصيغة القطبية للعدد

$$z = \frac{|-2-2i|}{|\sqrt{3}+i\,|} \; e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+2n\pi\right)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+2n\pi\right)}$$

ملاحظة(8.5.1): $\boldsymbol{Arg(z_1 z_2) \neq Arg z_1 + Arg z_2}$

مثال(9.5.1): لنأخذ $z_2 = -1 \, , z_2 - 2i$ فان

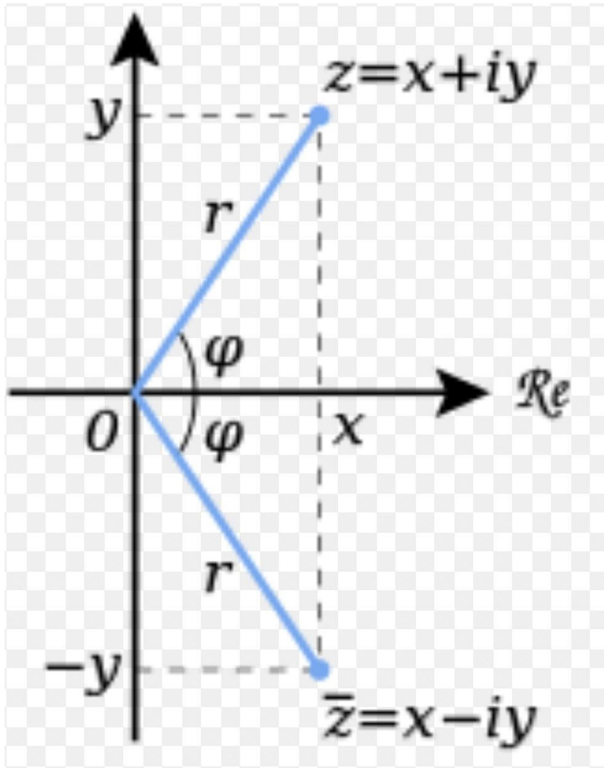
$$Arg\ z_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad Arg\ z_2 = \pi$$

وعلية يكون $Arg(z_1 z_2) = (-2i) = -\frac{\pi}{2}$

بينما $Arg\ z_1 + Arg\ z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

6.1 (التمثيل الهندسي لمجموع الفروق)

ليكن العدد $z_1 = x_1 + iy_1 \, , z_2 = x_2 + iy \, , z_1 + z_2$ يمثل نفس الكمية التي نستخدمها لايجاد المحصلة محصلة قوتين كذلك $z_1 - z_2$ نجمع مع z_2 مع $(-z_2)$ أي $z_1 + (-z_2)$



شكل رقم (3)

ملاحظة(1.6.1):

1- $|z| = \mathrm{r}$ تمثل جميع النقاط الواقعة على محيط الدائرة مركزها نقطة الاصل *(x,y)* ونصف قطرها*r*.

$= |z - z_0|$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة على محيط دائرة مركزها $z_0 = (x_0, y_0)$ ونصف قطرها *r* ب المعادلة *r*

3- $|z_1 - z_2|$ تعني البعد بين النقطتين $z_1 z_2$

4-المتراجحة $|z - z_0| \le \mathrm{r}$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل وعلى محيط دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها *r*

مثال(2.6.1): اثبت ان $|z - 2 + i| = 3$ تمثل دائرة مركزها $z_0 = 2 - i$ ونصف قطرها 3

الحل : بما ان $z = x + i$ فانة سيكون لدينا

$$|x+iy-2+i|=3$$

$$|(x-2)+i(y+1)|=3$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3$$

بمقارنها مع معادلة الدائرة يكون المركز هو (2,-1) وهو العدد العقدي $z_0=2-i$ ونصف القطر هو 3

7.1 (قوة العدد العقدي ونظرية ديموفيرا)

1.7.1 النظرية

ليكن n عدد صحيح موجب فانة طبقا لحاصل الضرب يكون

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

اما اذا كان n عدد صحيح سالب فان $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ حيث $z\neq 0$

العلاقة اعلاه صحيحة لكل

$$(\cos n\theta+i\sin n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n \text{ حيث } n\in z$$

وتسمى هذه الصيغة نظرية ديموافر واذا كان الاس كسر فان

$$\frac{1}{z^n}=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{Arg\,z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{Arg\,z+2k}{n}\right)$$

وهي الصيغة التي تعطينا جميع الجذور النونية لعدد z حيث $k=0,1,2,..,n-1$

مثال (2.7.1) : استخدم علاقة ديموفيرا في حساب $\boldsymbol{z = \left(-1 + \sqrt{3i}\right)^{12}}$

الحل : نفرض ان $z_1 = -1 + \sqrt{3i}$

$$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذن θ تقع في الربع الثاني وعلية

$$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

اذن يكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$

وهذا يؤدي $z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3})$

$$z = z_1^{12} = (2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

وحسب علاقة ديموفيرا فانة

$$z = 2^{12}\left(\cos\frac{24\pi}{3} + isin\frac{24\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{12}(cos8\pi + isin8\pi)$$

$$= 2^{12}(1 + 0i)$$

$$\rightarrow z = 2^{12}$$

8.1 التبولوجيا للاعداد العقدية

في هذا الفصل سنتطرق الى بعض المفاهيم الاساسية التي تتعلق بمجموعات النقط في الفضاء العقدي واول هذه المفاهيم هو المنحني والذي يعرف بانة المدى للدالة المستمرة ذات القيم العقدية z(t) المعرفة على الفترة المغلقة [a,b] بالصيغة

$z(t) = (x(t), y(t))$ حيث $a \leq t \leq b$ وان $x(t), y(t)$ دوال حقيقية مستمرة ويكون المنحني املسا عندما تكون $x(t), y(t)$ دوال قابلة للاشتقاق

وسنحدد المنحني C بالمعادلة الوسطية $z(t) = x(t) + iy(t$ حيث

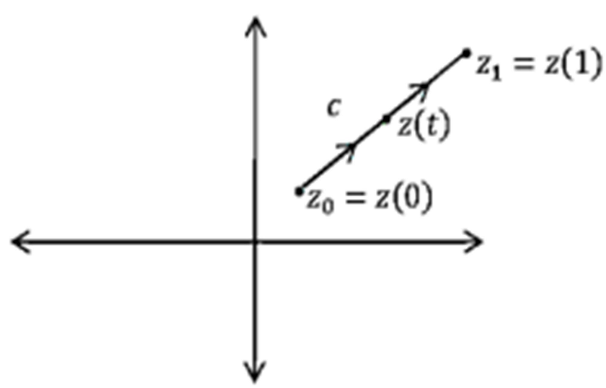
$a \leq t \leq b$ كما موضح في الشكل ويمكن كتابته بالصورة الاتية

$$c: y(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \;, 0 \leq t \leq 1$$

بالنسبة للمنحني c– فان المعادلة تاخذ بالشكل التي

$$-c: y(t) = z_0 + (z_0 - z_1)t \;, 0 \leq t \leq 1$$

ومن هنا نستطيع القول انه كان C منحني معادلة الوسيطية هي z(t) فان المعادلة الوسيطية للمنحني C– تكون $z(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$



شكل رقم (4)

اذا كانت $z(a) = z(b)$ فان المنحني C يسمى منحني مغلق الان دعنا ندرس المنحني الاتي

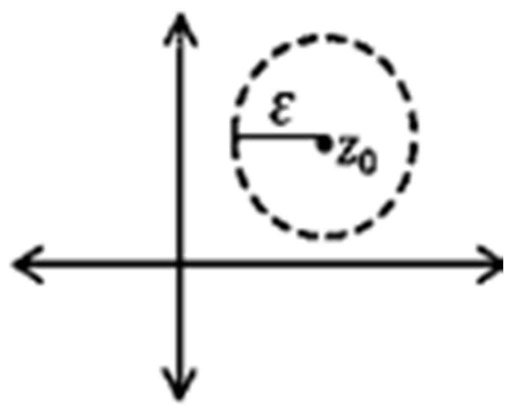
حيث $0 \le t \le 2\pi$ $y(t) = sin2t\ sint\ , x(t) = sin2t\ cost$

لاحظ ان t من صفر الى $\frac{\pi}{2}$ النقاط في الورقة (1) ومن $\frac{\pi}{2}$ الى π في الورقة 2 وبين π و $\frac{3\pi}{2}$ وفي الورق3 واخيرا t بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π في الورقة (4)

وكذلك يمكن ملاحظة ان المنحني يقطع نفسة في نقطة الاصل فقط لذلك نسمي المنحني الذي لايقطع نفسة نفسه بالمنحني البسيط والذي يتطلب $z(t_1) \neq z(t_2)$ عندما يكون $t_1 \neq t_2$ باستثناء احتمالية ان يكون $t_2 = b, t_1 = a$ الان من المواضيع المهمة التي بصدد دراستها في هذا الفصل في الجوار للنقطة z_0 في المستوى العقدي والتي يعرف بانها جميع النقاط التي تحقق المتراجحه الاتية

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

و هذا تمثل مجموعة النقاط داخل القرص المفتوح بنصف القطر $\varepsilon > 0$ حول z_0 كما موضح بالشكل



شكل رقم (5)

ويرمز له بالرمز $D_\varepsilon(z_0)$ الذي يمثل قرص الوحدة المفتوح مركزه z_0 ونصف قطرة $\varepsilon > 0$
وعلية يكون $D_\varepsilon(Z_0) = \{Z: |Z - Z_0| < \varepsilon$

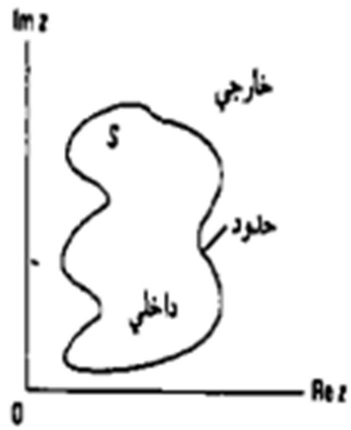
وايضا نستطيع تعريف قرص الوحدة المغلق الذي مركزة Z_0 ونصف قطرة ε بالصيغة

$$\overline{D_\varepsilon}(z_0) = \{z: |z - z_0| \le \varepsilon\}$$

والقرص المثقوب بالصيغة

$$D_{\varepsilon}^{X}(z_0) = \{z: 0 < |z - z_0| \ < \varepsilon\} = \frac{D_{\varepsilon}(z_0)}{\{0\}}$$

النقطة z_0 وتسمى نقطة داخلية للمجموعة S اذا وجد جوار لهذا النقطة يقع باكملة في s وتسمى نقطة خارجية للمجموعة s وجود جوار للنقطة z_0 تقطعه مع المجموعة S يكون المجموعة خالية Z_0 والنقطة التي لاتكون داخلية ولا خارجيه تسمى نقطة حدودية



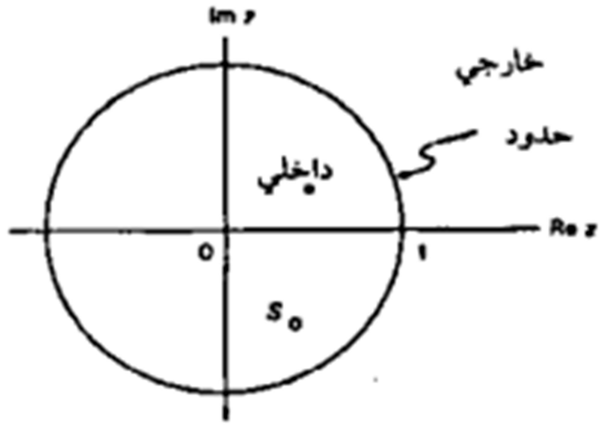
شكل رقم (5)

مثال(1.8.1):

لنفترض ان S_0 مجموعة النقاط z حيث $|z| < 1$ اوجد داخل المجموعة s_0 وخارجها وحدودها ؟

الحل

لنفترض ان z_0 أي نقطة من s_0 لاحظ ان القرص $|z - z_0|$ يقطع بكاملة داخل s_0 عندما $\varepsilon < 1 - |z_0|$ اذن لكل نقطة من S_0 نطة داخلية وبالمثل كل نقطة z_0 تحقق $|z_0| > 1$ هي نقطة خارجية الى s_0 اذا كان $|z_0| = 1$ فان كل الجوار ε الى z_0 سوف يحوي نقطا من s_0 ونقاطا وليس من s_0 اذن حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|Z| \ = 1$ داخل S_0 هي المجموعة $|Z| < 1$ اما خارج s_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق $|Z| \ > 1$ انظر الى الشكل التالي



شكل رقم (6)

المجموعة s تسمى مجموعة مفتوحة اذا كان كل نقطة داخلية وتسمى مغلقة اذا كان كل نقاطها الحدودية تقع داخل S وكذلك S مجموعة متصلة اذا لكل Z_2, Z_1 يوجد منحني يصل بينهما يقع باكمله داخل s مثال على ذلك تكون القرص $D = \{z: |z| < a\}$ مجموعة متصلة وايضا الشكل الحلقي $A = \{z: a < |z| < b\}$ هو ايضا مجموعة متصلة مفتوحة لان أي نقطة لان أي نقطتين في A المفتوح فان المنحني الذي يربطهما يقع باكملة داخلة

وعلية نسمي المجموعة المفتوحة المتصلة باسم المجال والمجال مع جميع نقاط الحدودية يسمى منطقة ومثال ذلك الشريط $\{Z: 1 < \mathrm{IM}\ Z \leq 2\}$ والمجموعة التي تشكل من اتحاد المجال والنقاط الحدودية تسمى منطقة مغلقة ومثال على ذلك نصف المستوي $\{Z: X \leq Y\}$ واذا كانت S^C (متممة المجموعة S) متصلة فان المجموعة s تكون متصلة اتصالا بسيطا اما اذا كان s^c ليس متصلة فان s متصلة اتصالا مضاعفا

مثال(2.8.1):ان المجموعة $\{z: |z| < 1\}$ هي مجموعة متصلة

تمسى نقطة تجمع للمجموعة S اذا كان كل جوار للنقطة Z_0 يحتوي على الاقل نقطة والنقطة Z_0 واحد من S وعلية تكون المجموعة S مغلقة اذا احتوت على كل نقاط تجمعها لاحظ ان نقطة الاصل هي نقطة التجمع الوحيدة للمجموعة $(N = 1,2,, \dots)Z_N = \frac{1}{n}$

مثال(3.8.1): جد نقاط التجمع للمجموعة S حيث

$$S = \left\{(-1)^n . \frac{1}{n} : n = 1,2, \dots\right\}$$

$$s = \left\{-i, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3} i, \frac{5}{4} i, \dots\right\}$$

ايضا يمكن ملاحظة $s = s_1 U s_2$ حيث . $s_1 = \{-i, -\frac{1}{3} i, -\frac{1}{5} i, ..\}$

$$s_2 = \left\{\frac{1}{2} i, \frac{1}{4} i, \frac{1}{6i}, \dots\right\}$$

نلاحظ ان نقاط التجمع للمجموعة s للنقاط الاولى هي i- والثانية من التعريف نجد ان النقاط التجمع للمجموعة s هي $\{i, -i\}$

الفصل الثاني

الدوال العقدية

(1.2) الدوال العقدية

تعريف (1.1.2) :الدوال العقدية

تعرف الدالة f المعرفة على المجموعة $(s\square\mathbb{C})$ هي قاعدة الارتباط الوحيد لكل عدد z من المجموعة S مع العدد العقدي W المجموعة S تسمى المجال للدالة F والعدد العقدي W هو صورة العدد Z بالنسه للدالة F ومجموعة كل الصور $R = \{v = f(z): z \in s\}$ تسمى مدى الدالة f او صورة الداله f

وكما هو معرف بأن العدد $z = x + iy$ لذلك فان $w = u + iv$ حيث u,v هما جزئيين حقيقي والخيالي للعدد w على الترتيب والتي تعبر دوال حقيقية تعتمد على المتغيريين x,y حيث $v =$ $v(x,y)$, $u = u(x,y)$ لذلك نكتب الدالة f(z) بالصورة التالية

$f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$ وهي داله ذات قيم معرفة على s .

من الجدير بالذكر هنا بالنسبة رسم الدالة العقدية فأننا لايمكن ان نتخيل الرسم بسهولة كما هو معتاد عند رسم الدوال الحقيقية بل سيعتمد رسمنا للدالة العقدية على وصف تأثير الدالة على مجالها

مثال (2.1.2):

اذا كانت $f(z) = z^2$ فأن

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$v(x,y) = 2xy$$

وهنا يكون لدينا $u(x,y) = x^2 - y^2$

بينما في حالة القطبية فأن

$$f(re^{i\theta}) = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2e^{i2\theta} = r^2cos2\theta + ir^2 + sin2\theta$$

$$v(r,\theta) = r^2sin2\theta$$

لذا يكون $u(r,\theta) = r^2cos2\theta$

مثال (3.1.2):

عبر عن الدالة $f(z) = 8x^2 + i8y^2$ بدلالة المتغيرين $z, \bar{z}$

الحل : بما ان

$Rez = x = \frac{z+\bar{z}}{2}, lm\, z = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ فان

$$f(z) = 8\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i8\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2$$

$$= 2z^2 + 4z\bar{z} + 2\bar{z}^2 - i(2z - 4z\bar{z} + 2\bar{z}^2)$$

$$= (1-\mathrm{i})2\mathrm{z}^2 + (4+4\mathrm{i})\mathrm{z}\bar{z} + (1-\mathrm{i})2\bar{z}^2$$

2.2 الدوال المركبة متعددة القيم

يقال الدالة w=f(z) المعرفة على المجال s بانها داله معقدة متعددة القيم اذا كان لكل نقطة $z \in s$ يقابلها عدد القيم w=f(z)

مثال _(1.2.2): لتكن الدالة f(z) معرفة كالاتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$$

فأنها دالة خماسية القيم لانه كل عدد $z \in s$ يوجد ثلاث قيم للمتغير w

3.2 التحويل الخطي

لتكن $A = be^{i\theta}$, $B = b_1 + ib_2$ حيث b>0 فأن التحويل $w = f(x) = Az + B$

هو تطبيق تقابلي (شامل ومتبادل) من المستوى z الى المستوى w ويسمى التحويل خطي وهذا التحويل لو امنعا النظر فية لوجدنا انه تركيب من التدوير والتركيب والانتقال وهذا واضح من خلال $\theta = Arg\, A$ كتدوير يتبعها تكبير بواسطة $K = |A|$ اما الانتقال فهو خلال المتجه $B = b_1 +$ ib_2 اما التطبيق العكسي لهذا التطبيق فهو

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{A}w - \frac{B}{A}$$

والتطبيق F تطبيق متباين وشامل من المستوي Z الى المستوي W

4.2 التحويل من نوع $(Z^{\frac{1}{2}}, Z^2)$:

التحويل $W = f(z) = z^2$ نستطيع تمثيلة بالاحداثيات القطبية كالاتي

$w = f(z) = r^2 e^{i2\theta}$ حيث r>0 ,$-\pi < \theta \leq \pi$ فأذا استخدمنا الاحداثيات القطبية

للمستوي $w = \rho e^{i\emptyset}$ فان التحويل $f(z) = z^2$

$$\emptyset = 2\theta, \rho = r^2$$

اما اذا استخدمنا الاحداثيات الكارتيزية فان التطبيق $w = z^2$ سيكون كالاتي

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = u + iv$$

لذلك $u = x^2 - y^2, v = 2xy$

التحويل $w = z^{\frac{1}{2}}$ ممكن ان نعبر عنة بالصيغة القطبية كالاتي

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\ e^{i\frac{\theta}{2}} - \pi < \theta \leq \pi\ , r > 0$$

وكذلك اذا استخدمنا $w = \rho e^{i\theta}$ في المستوي w فان التطبيق $w = z^{\frac{1}{2}}$ يكون $\rho = r^{\frac{1}{2}}$ و,

$\emptyset = \frac{\theta}{2}$واذا استخدمنا الاحداثيات الكارتيزية سيكون $z = w^2 = u^2 - v^2 + i2uv$ فأن التطبيق

$z = w^2$ يعطي بالمعدلات الاتية

$$x = u^2 - v^2\ , y = 2uv$$

مثال (1.4.2) : اثبت ان الدالة $f(z) = iz$ تحويل الخط تحويل الخط $y = x + 2$ الى

$v = -u - 2$

الحل: $u + iv = f(z) = i(x + i\quad)$

لذلك نجد
$$= -y + ix$$

$$u = -y$$

$$v = x$$

مثال (2.4.2): تحت تأثير التحويل $w = iz + i$ بين ان نصف المستوي *x>0* يتحول الى نصف المستوي *v>0* يتحول الى نصف المستوي *v>0*

الحل :

$$u + iv = \quad (z) = i(x + iy) + i$$

$$= ix - y +$$

$$= i(x + 1) - y = -y + i(x + 1)$$

$$u = -y, v = x + 1$$

اذن $0 < x < 1 \leftrightarrow 1 < v < 2$

كما موضح بالشكل

شكل رقم (1)

مثال (3.4.2):

اثبت ان الصورة القرص المفتوح $|z - 1 = i| < 2$ تحت تأثير التحويل

$|w+2-2i|<4$ هو القرص المفتوح $w=(1-i)z+2i$

الحل :

التحويل العكسي يعطي بالصيغة الاتية

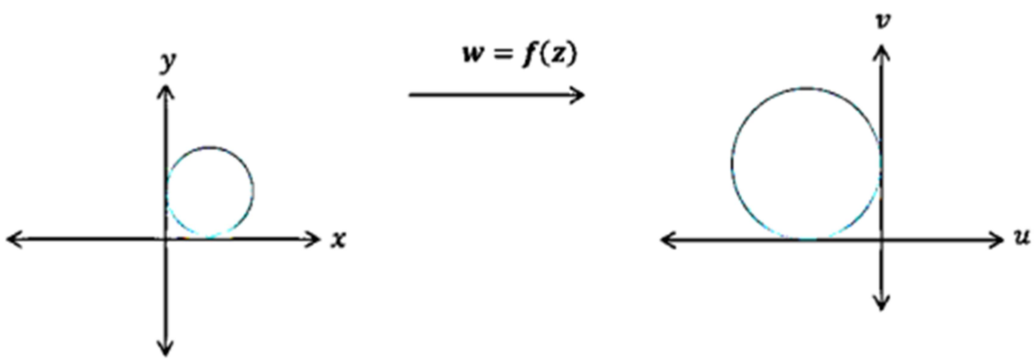
$$z=\frac{w-2i}{1-i}$$

وبالتعويض يصبح لدينا

$$\left|\frac{w-2i}{1-i}-1-i\right|<1$$

وبالتبسيط يكون $|w-2i-(1+i)(1-i)|<2$

$|w+2-2i|<2$



شكل رقم (2)

5.2 (الغايات والاستمرارية)

لتكن الدالة المركبة f معرفة على كل النقاط الجوار للنقطة z_0 ماعدا z_0 ذاتها فان غاية للدالة f(z) عندما z تقترب من z_0 هي العدد w_0 او بعبارة اخرى

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

وتحليليا يكون التعريف مكافئ للتعريف الاتي :

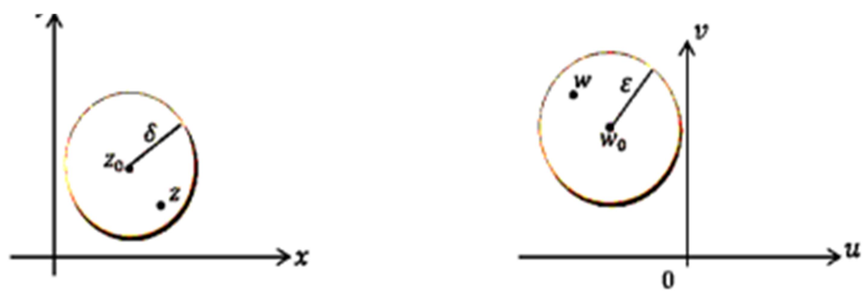
لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث ان

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

متى ما كانت

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

وهندسيا يكون ان لاي جوار $|w - w_0| < \varepsilon, \varepsilon$ للنقطه w_0 يوجد جوار لل δ
$0 < |z - z_0| < \delta$ بحيث ان كل نقطة z التي تكون صورتها w تقع داخل الجوار ε كما في الشكل



شكل رقم (3)

وهنا جدير بالذكر انه عند دراسة الغايات في الدوال المركبة يجب ان يكون لدينا الدقه بالتمييز بينها وبين الدوال الحقيقية ان في الدوال الحقيقية δ يمثل فترة مركزها x_0 ونصف قطرها δ بينما الدوال المركبة فأن الجوار δ حيث يمثل الجوار قرص مركزه z_0 ونصف قطرة δ وهذا ينطبق على الجوار ε في الجملة $|f(x) - w_0| < \varepsilon$ وهذه الملاحظة تفقد فكرتي النهاية من اليمين الى اليسار حيث اقتراب النقطة x_0 يكون اما من اليمين او اليسار فقط اما في الدوال المركبة حيث الجوار من قرص مركزة z_0 ونصف قطرة δ فان الاقتراب يكون عبر مسارات لانهائية

مثال (1.5.2) : جد الغاية للدالة $f(z) = \frac{z^2-4}{z-2}$ عندما $z \to 2$ باستخدام التعريف

الحل : لاحظ ان الدالة غير معرفة عند $z = 2$ لذلك يمكن استخدام فكرة التحليل البسيط كالاتي

$$f(z) = \frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = z + 2$$

اذن يكون باعتبار $\varepsilon > 0$ نختار $\delta = \varepsilon$

يكون $0 < |z-2| < \delta$

يؤدي الى $|f(z) - f(z_0)| = |z+2-4| = |z-2| < \varepsilon$

$$\lim_{z\to 2} f(z) = 4$$

مثال (2.5.2): اثبت ان $\lim_{z\to 2i \to 1}(2z+3) = 4i+1$

الحل : لتكن $\varepsilon > 0$ يجب ان نجد $\delta > 0$ بحيث يكون $0 < |z-(2i-1)| < \delta$ يقابل $|2z+3-(4i+1)| < \varepsilon$ الان نعيد كتابتة

$$|2z+3-(4i+1)| = |2z-4i+2| < \left|2\big(z-(2i-1)\big)\right|$$
$$< |2-(2i-1)| \quad < \frac{\varepsilon}{2}$$

نختار $\delta = \frac{e}{2}$ فان في هذه الحالة يكون

$$0 < |z-(2i-1)| < \delta$$

يؤدي ال $|2z+3-(4i+1)| < \varepsilon$

و هذا يؤدي الى ان

$$\lim_{z\to 2i\to -1}(2z+3) = 4i+1$$

تعريف (3.5.2)

عندما تكون النقطة ∞ (الما نهاية) مع حقل الاعداد العقدية عندئذ يطلق علية حقل الاعداد العقدية الموسعة و هنا ندرس الغاية ومفهومها للدول العقدية عندما يقترب المتغير z من الما لانهاية ∞ ومن تعريف الغاية سابقا سنقوم بتغير بسيط لجوار النقاط w_0, z_0 بجوار ∞ والنظرية الاتية ستبين كيف يتم ذلك

نظرية (4.5.2) :

لتكن z_0 نقطة في المستوي z, w_0 نقطة في المستوي w فان

1- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ اذا وفقط اذا كان $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0$

2- $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ اذا وفقط اذا $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

3- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ اذا وفقط اذا كان $\lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

البرهان :

عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

وهذا يعني *w=f(z)* تقع داخل الجوار $|w| > \frac{1}{\varepsilon}$ النقطة ∞ متى ماكانت *z* تقع داخل الجوار

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

وعلية يكون $\left|\frac{1}{f(z)}\right| < \varepsilon$ عندما $0 < |z - z_0| < \delta$

لذا يكون $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}$

2- لتكن $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ لذلك لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

عندما $|z| > \frac{1}{\delta}$ يكون $|f(z) - w_0|$ ضع $\frac{1}{z}$ محل z لذلك $\left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$ عندما

$0 < |z - 0| < \delta$ هو المطلوب الحالات الاخرى تترك تمرين لطالب

مثال (2.2.6) جد قيمة مايلي :

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1}$$

الحل : بما ان $\lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz-2}$ لذلك يكون حسب النظرية اعلاه

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz - 2}{z + 1} = \infty$$

مثال (5.5.2) : اثبت ان $\lim_{z\to\infty} \frac{2z^5 - 1}{z^4 + 1}$

الحل : بما ان

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{z^4}\right)-1}{\frac{2}{z^5}+1}=\lim_{z\to 0}\frac{z(1-z^4)}{2+z^5}=0$$

لذلك بواسطة النظرية يكون

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2z^5-1}{z^4+1}=\infty$$

نظرية (6.5.2): لتكن $w=f(z)=u+iv$ دالة عقدية حيث w معرفة بجوار النقطة $z_0=x_0+iy_0$ ماعدا z_0 ذاتها لتكن $w_0=u_0+iv_0$ حيث $v_0=v_0(x_0,y_0), \mathrm{u}_0=\mathrm{u}_0(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$ عندئذ يكون

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$$

اذا وفقط اذا كان
$$\begin{cases}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=u_0\\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=v_0\end{cases}$$

البرهان : نفرض (1) صحيحة لذلك لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_2>0,\delta_1>0$ بحيث ان

اذا كان $|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2},0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1$

$$|v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2},0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_2$$

فاذا فرضنا ان δ اصغر من δ_2,δ_1 فما ان

$$|(u+iv)-(u_0-iv_0)|=|(u-u_0)+i(v-v_0)|\le|u-u_0|+|v-v_0|$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}&=|(x-x_0)+i(y-y_0)|\\&=|(x+iy)-(x_0+iy_0)|\end{aligned}$$

فلذلك اذا كان

$$0<|(x+iy)-(x_0+iy_0)|<\delta$$

$$|(u+iv)-(u_0-iv_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وهذا يبرهن ان

$$\lim_{z \to z_0} . f(z) = w_0$$

ولبرهنة الاتجاة المعاكس نفرض ان

$$\lim_{z \to z_0} . f(z) = w_0$$

فمن التعريف يكون لدينا ان لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $0 < \delta$ بحيث ان

$$|z - z_0| < \delta \to |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

من التعريف مقياس العدد العقدي فأنة

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y)^2} < \delta \to |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

$$|u(x, y) - w_0| = |Re(f(z) - w_0)| \le |f(z) - w_0|$$

$$|v(x, y) - w_0| = |lm(f(z) - w_0)| \le |f(z) - w_0|$$

ومن العلاقتين اعلا نستنتج ان كل $0 < \varepsilon$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \to |u(x, y) - u_0| < \varepsilon$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \to |v(x, y) - v_0| < \varepsilon$$

وهذا مكافئ للعلاقة (١)

مثال(٢.٥.٧): اوجد نهاية الدالة العقدية

$$f(z) = \frac{x}{x^4 + y^4} + i\frac{(2x^2 - yx)}{y^4 + 1}$$

عندما $z \to 1 - i$

الحل : من الدالة *f(z)* نستطيع ان نلاحظ ان

$$u(x, y) = \frac{x}{x^4 + y^4}, v(x, y) = \frac{(2x^2 - yx)}{y^4 + 1}$$

لذلك $z_0 = 1 - i \leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

والان يكون $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-yx}{y^4+1} = \frac{1}{2}$$

اذن يكون $u_0 = \frac{1}{2}, v_0 = \frac{1}{2}$ بالتالي حسب النظرية

$$\lim f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$

$$\lim_{z\to 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

٦.٢ (الاستمرارية)

ليكن $f(z)$ دالة عقدية معرفة على لمجال D الذي يحوي z_0 يقال الدالة f مستمرة عند النقطة Z_0 اذا كان

$$\lim_{Z\to Z_0} F(Z) \ = F(Z)$$

وبعبارة اخرى الدالة F مستمرة عند النقطة Z_0 اذا تحقق الشرط الاتي$Z\epsilon D, \varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$|Z - Z_0| < \delta \quad \text{يؤدي الى} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

نظرية (١.٦.٢):

اذا كانت f مستمرة عند النقطة z_0 و الدالة g مستمرة عند النقطة $f(z_0)$ فأن gof ومستمرة عند النقطة z_0

البرهان

ومن تعريف الاستمرارية للدالة g عند النقطة $f(z_0)$ فان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$|w - f(z_0)| < \delta_1 \to \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وكذلك بما ان f مستمرة عند النقطة z_0 $\varepsilon_1 > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|z - z_0| < \delta \to |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1$$

وبفرض $f(z) = \delta_1 = \varepsilon_1, w$ نستنتج ان

$$|z - z_0| < \delta \to |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 \to \left|g(w) - g\big(f(z_0)\big)\right| < \varepsilon$$

وبعد اثبات ان $g \ o \ f$ مستمرة عند النقطة z_0

وهذا من الجدير بالملاحظة اننا نقول للدالة *f(z)* مستمرة عند النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ اذا كان

$u(x,y), v(x,y)$ مستمرة عند النقطة (x_0, y_0)

مثال (٢.٦.٢) :

افحص استمرارية الدالة التالية

$$\begin{cases} z & , if \ z \neq i \\ 0 & , if z \neq i \end{cases}$$

الحل :

$$\mathbf{1 - f(i) = 0 \ (exist)}$$

$$\mathbf{2 - \lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} z^2 = -1}$$

بما ان قيمة الدلة $\neq$ غاية الدالة $-1 \neq 0$

الدالة غير مستمرة

مثال (٣.٦.٢) :

افحص استمرارية الدالة التالية

$$f(z) = \begin{cases} z+1 & , z \leq 1 \\ 2 & , z > 1 \end{cases}$$

$$1 - f(1) = 2$$

$$2 - \lim_{z \to -1} f(z) = \lim_{z \to -1} z + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{z \to -1} f(z) = \lim_{z \to -1} 2 = 3$$

بما ان الدالة موجودة

وان غاية اليمين =غاية اليسار

الدالة مستمر

المصادر العربية

١-د. شحفة الاسمي –اسس العقدي (٦)و(٧٩)جامعة حلب ١٩٨٨

٢- اسس التحليل المركب ،ترجمة د. ابو بكر بيومي و د.سعدوان ابراهيم ،كلية العلوم –قسم الرياضيات جامعة الملك سعود ٢٠٠٢م

٣-وليام دروبك –تحليل مركب وتطبيقاتة ترجمة د. ابو بكر بيومي و د. سعدون ابراهيم كلية العلوم –قسم الرياضيات – جامعة الملك سعود ٢٠٠١ م

٤-مواقع متنوعة من شبكة الحاسوب (الانترنت) بين عامي ٢٠٠٠ و ٢٠١١ م

المصادر الاجنبية

5-lllabar .B.B.Baezemea K.A.M.h .1969

6-LAUPEIMES ,am lllagrr B.B.meroam roopinit O.K.ll –M.H.1987

7-bintne A.B ,comia tropiut teets b.k.ll-MH 1972