جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

طرق عددية لإيجاد أَفضل تكامل عددي لبيانات معينة

بتحسين طريقة رومبركَ

بحث مقدم إلى مجلس أدارة قسم الرياضيات / كلية التربية للعلوم الصرفة/

جامعة بابل

هو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في قسم الرياضيات

من قبل الطالبة

حنان عبد الرضا علي الكشوان

بإشراف

الدكتورة إفتخار الشرع

1445هـ 2024م


بسم الله الرحمن الرحيم
﴿وأنزل الله عليك الكتاب والحكمة
وعلمك ما لم تكن تعلم
وكان فضل الله عليك عظيما﴾
صدق الله العلي العظيم
سورة النساء :الآية (١١٣)

الأهداء

إلى أَحب الأَشياء إلى روحي ..

أمي مصدر القوة والدعم والتفاؤل في هذه الحياة ..

أبي الرجل الطيب الذي يعطي بلا مقابل ..

أخواتي الرائعات هن السند والفخر الذي أتباهى فيه ..

زملائي في رحلة الدراسة والنجاح الذين كانوا لي العون رغم الغربة والوحدة التي مررت بها..

أساتذتي الأفاضل الذين لم يبخلو عليّ في أعطاء العلم والمعرفة بل كانوا قدوة لي في مسيرتي العلمية..

إلى كل هؤلاء أهدي تعبي المتواضع بعد سنين طويلة

من ملاحقة الحلم والطموح والخوض به ..

الفهرست

الخلاصة Abstract

يعّد موضوع التكاملات العددية من المواضيع الرياضية المهمة للحصول على نتائج بأخطاء مقبولة،

تناولنا في عملنا حساب التكاملات العددية بالطرق التالية :

1- طريقة شبه المنحرف
2- طريقة سمبسون
3- طريقة الثلاث أثمان

ثم اجرينا تحسين رومبركَ على طريقة سمبسون بعد أن كان معمول به فقط على طريقة شبه المنحرف للحصول على أقل خطأ ممكن .

المقدمة Introduction

يُعّد موضوع التكامل من المواضيع المهمة في علوم الرياضيات وتطبيقاتها، والذي يحوي على تطبيقات حياتية كثيرة ، لكن قد يعترض إيجاد التكامل مشاكل عدّة منها :

1-**عدم العلم بالدالة** كما لو حصلنا على بيانات معينة من تجربة ما ، فمن المهم أَن نوضح كيفية اجراء التكامل على دالة غير معلومة إلا عند عدد معين من النقاط .

2-**وفي حالة كون الدالة من التعقيد لا يمكن اجراء تكاملها بالطرق التحليلة التقليدية** ،لذلك نلجأ الى الطرق العددية، لكن ليس عند هذه الأَحوال فقط ؛ بل حتى في حالات كون الدالة يمكن إيجاد تكاملها بسهولة ، فأننا نحتاج إلى إيجاد تكاملها بالطرق العددية لسرعة ، وسهولة العمل ، ودقة النتائج بإستخدام البرمجيات البسيطة بأخطاء قليلة مقبولة.

حيث أن هناك طرق عددية لحساب التكامل العددي ، منها طريقة شبه المنحرف التي يحسب بها التكامل العددي لنقاط معلومة للدالة ، كذلك طريقة سمبسون وطريقة الثلاث أثمان وطريقة رومبركَ.

فلقد استخدم رومبركَ تحسينه على الحسابات التي أجريت بطريقة شبه المنحرف وخلال عملنا سوف نعمم طريقة رومبركَ على بيانات محسوبة بطريقة سمبسون ؛ للحصول على نتائج بأقل الأَخطاء.

قسمنا العمل الى ثلاث بنود ، تناول البند الأول التكامل العددي وطرقه ،

والبند الثاني تطوير طرق التكامل العددي و استخدام طريقة رومبركَ ،

ثم البند الثالث مقترح تحسين الخطأ في طريقة رومبركَ بإستخدام صيغة سمبسون .

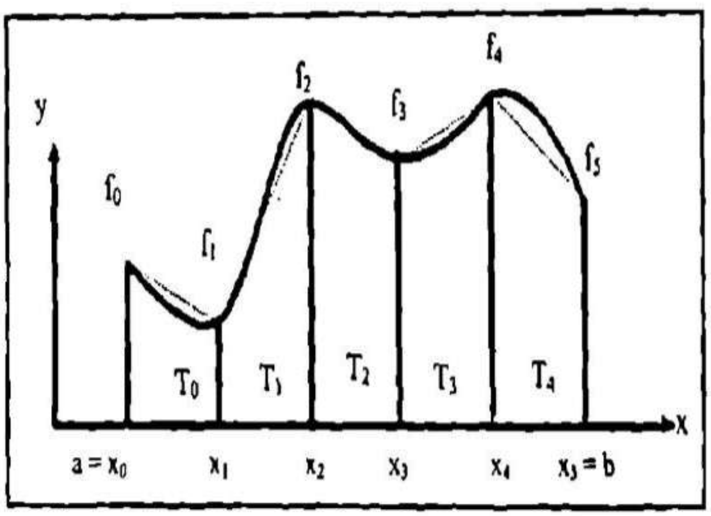
Section One البند الأول

التكامل العددي وطرقه

تعتمد الطرق العددية لحساب قيمة تقريبية لتكامل محدد على تجزئة مجال المكاملة الى أقسام صغيرة وحساب المساحات المحددة ثم جمع هذه المساحة للحصول على القيمة التقريبية للتكامل الكلي حيث سنتناول أوليات طرق التكامل العددي الثلاثة :

1- تعريف طريقة شبه المنحرف (1.1) [1]

ان صيغة شبه المنحرف يمكن أن تُحسن من حالة تَحمل خطأ كبير في قيمة التكامل التقريبية حيث يمكن تقليص مقدار الخطأ بزيادة عدد الفترات الجزئية إلا إنهُ يبقى ملحوظاً فبدلاً من إنشاء مستطيلات على كل فترة جزئية سنقيم أشباه منحرفات ، كما في الشكل (1).



شكل رقم (1)

ملاحظة (1.2) [1]

المعنى الهندسي لطريقة فمن المعلوم ان مساحة شبه المنحرف هي نصف حاصل ضرب مجموع القاعدتين في الارتفاع وبالتالي فأن مساحة شبه المنحرف الأول ستكون :

$T_0 = (X_1 - X_0) \left(\frac{f0+f1}{2}\right)$

وكذلك المساحة التالية $T_1=(X_2-X_1)\left(\frac{f1+f2}{2}\right)$

وهكذا فأن مجموع مساحات اشباه المنحرفات سيعطي تقريباً المساحة تحت المنحني بالتأكيد هناك فرق بين المساحتين يمكن بالحقيقة جعل هذا الفرق يتضائل تدريجياً بجعل النقاط Xi متقاربة اكثر، بعبارة اخرى ان تصغر المسافة بين

X_i ,X_{i+1} بنفس الوقت نزيد عدد النقاط وهذا يعني زيادة عدد أشباه المنحرفات بذلك يؤدي الى زيادة في العمليات

الحسابية اذا جزئنا الفترة $[a ,b]$ الى n من الفترات الجزئية $[X_i, X_{i+1}]$ حيث $a=X_0$ وأن $h=X_{i+1}-X_i$

حينها مساحة شبه المنحرف ستكون

$T_i =h\left(\frac{f_i+f_{i+1}}{2}\right)$ حيث $, i=0, 1 , 2 ,\ldots,n-1$

أما المساحة الكلية فهي

$$T_0 + T_1 +\ldots +T_n = \frac{h}{2}(f_0+f_1+\ldots +f_{n-1}+f_n) = \frac{h}{2}\left(f_0+f_n+2\sum_{i=1}^{n-1} fi\right) \quad \ldots\ldots\#$$

ملاحظة (1.3) [1]

المعنى التحليلي لطريقة نحصل عليه من الصيغة # التي يمكن استنتاجها من صيغة متعددة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية ،سنبدأ بإستنتاج صيغة شبه المنحرف البسيطة وذلك بأن نتعامل مع متعددة حدود خطية إذا كان لدينا دالة

معرفة على الفترة $[X_0,X_1]$ ونريد إيجاد التكامل عليها

$$\int f1(x)dx = \int \left(f1\big(x(m)\big)\right)\frac{dx}{dm}dm \ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

حيث لابد لنا أن نحول متغير التكامل من x الى m في الجهة اليمنى وأن $m=\frac{X-X0}{h}$ فأن

$h=\frac{dx}{dm} \leftarrow dm=\frac{dx}{h}$ أو $dx= h\,dm$

هنا نعوض قيمة h في المعادلة (1) لنحصل على :

$$\int f1(x)dx = h\int \left(f1\big(x(m)\big)\right)dm$$

نستخدم صيغة الفروق التقدمية لمتعددة الحدود لنيوتن ونكاملها على الفترة$[X_0,X_1]$ والتي تساوي

$X_0=0 ,X_1=1$ فتصبح الفترة البديلة هي $[0,1]$ لتكون حدود التكامل

$$\int_{X0}^{X1} f1(x)dx = h\int_0^1 [f0 + m\Delta f0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f0 + ..]dm$$

$$= h\int_0^1 [f0 + m\Delta f0 + (\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2})\Delta^2 f0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{3}\right)\Delta^3 f0 + \cdots]dm$$

$$= h\left[m\, f0 + \frac{m^2}{2}\Delta f0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)\Delta^2 f0 + \left(\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{6}\right)\Delta^3 f0 + \cdots\right]_0^1 \ldots\ldots (2)$$

حيث نقتطع حدودية نيوتن التقدمية بعد الحد الثاني في المعادلة (2) ونهمل بقية الحدود هذا يعطينا قيمة الخطأ لطريقة شبه المنحرف وبعدها نحصل على :

$$= h\left[m\, f0 + \frac{m^2}{2}\Delta\, f0\right]_0^1 = h\left[m\, f0 + \frac{m^2}{2}(f1 - f0)\right]_0^1 = \frac{h}{2}(f0 + f1) \quad \ldots\ldots. (3)$$

المعادلة (3) تمثل مساحة شبه المنحرف البسيطة وأن تقسم فترة التكامل من $a=X_0$ الى $b=Xn$ ، n من الفترات الجزئية المتساوية يعني تطبيق صيغة المعادلة (3) n من المرات لنحصل على :

$$\int_{X0}^{X1} f1(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f_{i-1} + f_i] = \frac{h}{2}(f0 + fn + 2\sum_{i=1}^{n-1} fi\,) \ldots\ldots.. (4)$$

او هذه الصيغة

$$= \frac{h}{2}(\,f0 + 2f1 + 2f2 + 2f3 + \cdots + 2f_{n-1} + fn)$$

تعتبر صيغة المعادلة (4) هي تعميم لكل فترة جزئية $[X_{i-1}, X_i]$ وتسمى صيغة شبه المنحرف المركبة .

وأن قيمة h هي :

$$h = \frac{X_1 - X_0}{n}$$

تعريف قيمة الخطأ (1.4) [2]

يمكن تخمين قيمة الخطأ المقتطع في التكامل العددي لطريقة شبه المنحرف من المعادلة (2) حيث نقتطع من حدودية نيوتن التقدمية بعد الحد الثاني ونهمل بقية الحدود فهذا يؤدي الى قيمة الخطأ لطريقة و هي كالتالي :

$$T_t = \frac{-h}{12}\Delta^2 f0 + \cdots = \frac{-h^2}{12} f``(\theta) \quad , \theta \in (X_0\,, X_1)$$

مثال (1.5)

أستخدم صيغة شبه المنحرف لإيجاد التكامل لدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة [1, 1.30] حيث h=0.05

وعدد الفترات n=6

الحل:

حيث $X_0= 1$, $X_1=1.30$ نتأكد من قيمة h $h = \frac{X_1-X_0}{n} \to \frac{1.30-1}{6} = 0.05$

x	1	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x)$	1	1.0247	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

نستخدم صيغة شبه المنحرف لإيجاد الحل

$$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\, dx = \frac{0.05}{2}[1 + 2(1.0247) + 2(1.04881) + 2(1.07238) + 2(1.09544) + 2(1.11803) + 1.14017] = 0.32147$$

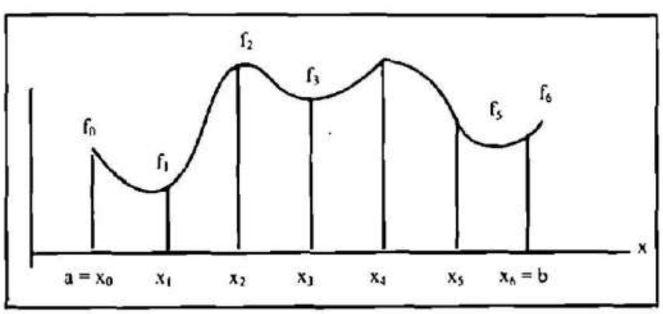
لكن يمكن إيجاد الحل الحقيقي بدون استخدام صيغة شبه المنحرف

$$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}X^{3/2}\right]_1^{1.30} = \frac{2}{3}(1.30)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} = 0.321485$$

2- تعريف طريقة سمبسون (1.6) [1]

نحتاج الى ثلاث نقاط في الفترة الجزئية الواحدة لكي نمرر P_2 بحدودية تربيعية f هي الطريقة التي تقرب الدالة بها حدودية تربيعية.

كما في الشكل (2)



الشكل (2)

نفرض أن لدينا النقاط التالية (X_0 , f_0) , (X_1 , f_1) , (X_2 , f_2) وأن $h=X_1-X_0=X_2-X_1$

نكون الحدودية التربيعية من صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية

$$P_2(x) = [f0 + m\Delta\, f0 + \frac{m(m-1)}{2!}\, \Delta^2 f0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \Delta^3 f0 + \cdots] \;...... *$$

بإجراء التكامل على الفترة $[X_0 , X_2]$ ← $\int_{X0}^{X2} P_2\,(x) dx$

حيث $dx = h\, dm$ و نستبدل الفترة $[X_0 , X_2] = [0, 2]$

$$\int_{X0}^{X2} P_2\,(x) dx = \int_0^2 [f0 + m\Delta\, f0 + \frac{m(m-1)}{2!} \Delta^2\, f0\,] dx$$

هنا يتم قطع المتسلسلة بعد الحد الثالث في الفروق التقدمية لحدودية نيوتن في المعادلة * لنحصل على هذه الصيغة :

$$\int_0^2 P_2\,(x) = h\, \int_0^2 [f0 + m\Delta\, f0 + \frac{m(m-1)}{2!} \Delta^2\, f0] dm$$

$$= h\, \left[m\, f0 + \frac{m^2}{2} \Delta\, f0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right) \Delta^2 f0\right]_0^2$$

$$= h\, \left[m\, f0 + \frac{m^2}{2} (f1 - f0) + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right) (f2 + 2\, f1 + f0)\right]_0^2$$

تعتبر المعادلة ** هي صيغة سمبسون البسيطة $= h\, [\, f0 + 4\, f1 + f2\,] \;.......**$

اما الصيغة المركبة لطريقة سمبسون تنتج عندما نقسم الفترة $[a, b]$ الى n من الفترات الجزئية

حيث n لابد أن يكون عدد زوجي .

لتكن النقاط $X_1 , X_2 ,..., X_n$ نطبق أولاً صيغة سمبسون البسيطة على الفترات الجزئية لنحصل على :

$$\int_{X0}^{X2} f(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} (\, f_{2i-2} + 4\, f_{2i-1} + \, f_{2i}\,)$$

$$= \frac{h}{3}\, (f_0 + 4\, f_1 + 2 f_2 + \cdots + 2 f_{n-2} + 4 f_{n-1} + \, f_n\,)$$

$$= \frac{h}{3}\, [\, f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-2/2} f_{2i} + 4\, \sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1}\,] \quad .... \#\#$$

بهذا نكون حصلنا من المعادلة ## على صيغة سمبسون المركبة التي على كل جزء من الفترة الجزئية (X_0, X_2)

تعريف قيمة الخطأ (1.7) [2]

يمكن أن نخمن قيمة الخطأ المقتطع في صيغة طريقة سمبسون لتكامل العددي التي حصلنا عليها من المعادلة * بعد أن اقتطعنا الحدودية لنيوتن التقدمية بعد الحد الثالث حيث تساوي صيغته :

$$T_S = -\frac{h\,\Delta^4 f0}{90} + \ldots = -\frac{h^5}{90} f^4(\theta) \qquad , \theta \in (X_0 , X_2)$$

مثال (1.8)

أستخدم طريقة سمبسون لإيجاد التكامل لدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة [1, 1.30] عندما h=0.05

و عدد الفترات n= 6

الحل :

x	1	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x)$	1	1.0247	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

$$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\, dx = \frac{0.05}{3}[1 + 4(1.0247) + 2(1.04881) + 4(1.07238) + 2(1.09544) + 4(1.11803) + 1.14017] = 0.32149$$

3- تعريف طريقة الثلاث أثمان (1.9) [1]

حينما نستخدم متعددة حدود من الدرجة الثالثة بتقريب الدالة f(x) على الفترة [a , b] فإننا نحتاج أربعة نقاط في هذه الفترة لتكوين هذه الحدودية ، ففي صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية وعندما n =3 على نقاط موزعة بأنتظام يكون :

$$P_3(x) = [\, f0 + m\Delta\, f0 + \frac{m\,(m-1)}{2!}\, \Delta^2\, f0 + \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!}\, \Delta^3 f0 + \cdots] \quad \ldots\ldots.\ 1$$

و بنفس الاسلوب السابق لطريقة سمبسون نحصل على صيغة التكامل على الفترة $[X_0 , X_3] = [0 , 3]$

فإننا نجري التكامل للحد الخامس من صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية وهذا يعني يتم قطع صيغة نيوتن كما في المعادلة 1 بعد الحد الرابع و نهمل بقية الحدود وبهذا يكون التكامل :

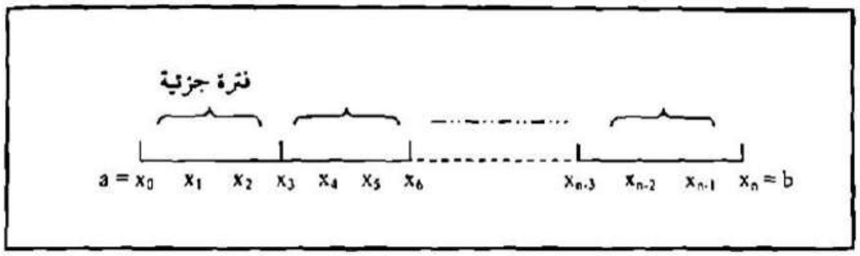
حيث أن dx= h dm

$$\int_{X0}^{X3} P_3\,(x)dx = h\int_0^3[\,f0 + m\,\Delta\,f0 + \frac{m\,(m-1)}{2!}\Delta^2\,f0 + \frac{m\,(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f0]dm$$

و بإجراء عملية التكامل نستنتج الصيغة :

$$\int_0^3 P_3(x)dx = \frac{3\,h}{8}\,[\,f0 + 3\,f1 + 3\,f2 + f3\,] \;.......\; 2$$

المعادلة 2 تسمى بصيغة طريقة الثلاث أثمان البسيطة ، لإيجاد الصيغة المركبة نقسم الفترة الجزئية [a , b] الى n من الفترات الجزئية بحيث أن n عدد يقبل القسمة على 3 ، كما في الشكل (3).



الشكل (3)

فتكون الصيغة :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{X0}^{X3} P_3\,(x)dx + \int_{X3}^{X6} P_3(x)dx + \cdots + \int_{Xn-3}^{Xn} P_3\,(x)dx$$

$$= \frac{3\,h}{8}\,(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + \frac{3\,h}{8}\,(f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6) + \cdots + \frac{3\,h}{8}\,(f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

ثم نضعها على صيغة مجموع فتصبح

$$= \frac{3\,h}{8}\left[f_0 + 3\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}(\,f_{3i+1} + f_{3i+2})\sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f_{3i} \;+ f_n\right] \;............\; 3$$

أو هذه الصيغة

$$= \frac{3\,h}{8}\,[\,f_0 + 2(f_3 + f_6 + f_9 + \cdots) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + \cdots) + f_n]$$

حيث المعادلة 3 تعتبر الصيغة المركبة لطريقة الثلاث أثمان ومن المتوقع أن تعطي قيمة مضبوطة لتكامل على متعددات الحدود من الدرجة الرابعة فما دون ذلك.

و أن قيمة h نحصل عليها من خلال $h=\frac{X3-X0}{3}$ حيث $n=3$

تعريف قيمة الخطأَ (1.10) [1]

يمكن أن نخمن قيمة الخطأ المقتطع في صيغة طريقة الثلاث أثمان لتكامل العددي التي حصلنا عليها من المعادلة 1 عندما نقتطع حدودية نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية بعد الحد الرابع حيث تساوي صيغته :

$$T_{\frac{3}{8}} = \frac{-3}{80}\, h^5 f^{(4)}(\theta) \qquad , \theta \in (X_0 , X_3)$$

مثال (1.11)

استخدم طريقة الثلاث أثمان $\frac{3}{8}$ لإيجاد قيمة التكامل لدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة الجزئية $(1, 1.30)$

و عدد الفترات n = 6

الحل :

نحصل على قيمة h $\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.30-1}{6} = 0.05 \quad \rightarrow h = 0.05 \quad \therefore$

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
x	1	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
f(x)	1	1.0247	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

$$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\, dx = \frac{3\,h}{8} [\, f_0 + 2(f_3) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5) + f_6 \,]$$

$$= \frac{3\,(0.05\,)}{8}\, [1 + 2(1.07238) + 3(1.0247 + 1.04881 + 1.09544 + 1.11803) + 1.14017]$$

= 0.321485

Section Two البند الثاني

تطوير طرق التكامل العددي وأستخدام طريقة رومبرك

استخدمت طريقة رومبركَ في المصادر فقط لتطوير النتائج المحسوبة بصيغة طريقة شبه المنحرف.

تعريف طريقة رومبركَ (2.1) [3]

قدم ويرنر- رومبرغ (1909-2003) هذه الطريقة عام 1955 م لتحسين دقة طريقة قاعدة شبه المنحرف عن طريق حذف الحدود المتتالية في التوسع التقاربي و استخدم تكامل رومبركَ طريقة قاعدة شبه المنحرف لإيجاد تقريبات إبتدائية ثم طبق عليها استكمال ريتشاردسون لتحسين التقريبات حيث طبق طريقة الاستكمال الخارجي لتقريب التكاملات المحدودة ، لنشرح طريقة تكامل رومبركَ علينا تذكرأن طريقة شبه المنحرف لتقريب تكامل

دالة ما f على الفترة [a, b] باستخدام n الفترة الجزئية هي :

$$\int_a^b f\,(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(Xi)] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f"(\mu)$$

حيث $h = \frac{(b-a)}{n}$, $a < \mu < b$, $X_i = a + i\,h$, i= 0 , 1, 2 , …, n

ليكن m عدداً صحيحاً موجباً وأن أول خطوة في عملية رومبرك هي التوصل الى تقريبات طريقة قاعدة شبه المنحرف بأخذ :

$$n_m = 2^{m-1}\ , n_1 = 1\ , n_2 = 2\ , n_3 = 4\ , \ldots$$

و أن الخطوة h_k المقابلة الى n_k هي

$$h_k = \frac{(b-a)}{n_k} = \frac{(b-a)}{2^{k-1}}$$

و بأستخدام هذه الرموز تصبح طريقة قاعدة شبه المنحرف :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}[\,f(a) + f(b) + 2(\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\,)\,] - \frac{(b-a)}{12}h^2{}_k f"(\mu_k)\ \ldots.(1)$$

حيث لكل k يكون μ_k عدداً ما في الفترة الجزئية (a , b)

إذا أستخدمنا الرمز $R_{k,1}$ الذي يعبر عن جزء الصيغة (1) المستخدم للتقريب بطريقة قاعدة شبه المنحرف فإن :

$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[\, f(a) + f(b)\,] = \frac{(b-a)}{2}\ [\, f(a) + f(b)\,]$

$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}\ [\, f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] = \frac{(b-a)}{4}\ [\, f(a) + f(b) + 2\, f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)]$

$= \frac{1}{2}\ [\, R_{1,1} + h_1\, f(a + h_2)\,]$

$R_{3,1} = \frac{1}{2}\ (\, R_{2,1} + h_2\, [\, f(a + h_3) + f(a + 3h_3)\,]\,)$

لذلك تكون الصيغة :

$R_{k,1} = \frac{1}{2}\ [\, R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k\,)\,]$, $\forall$ k= 1 , 2 ,3 ,…n

حيث بهذه الطريقة نحصل على العمود الأول من جدول طريقة رومبركَ ويمكن إيجاد باقي الأعمدة من خلال الاستكمال الخارجي لريتشاردسون لذا تكون الصيغة للعمود الثاني

$R_{2,2}$, $R_{3,2}$, $R_{4,2}$, … الخ

$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}\left(R_{k,1} - R_{k-1,1}\right)$, $\forall$ k= 2 , 3 ,…

نحصل على العمود الثالث هكذا $R_{3,3}$, $R_{4,3}$, $R_{5,3}$, …

$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}\ (R_{k,2} - R_{k-1,2})$, $\forall$ k= 3 , 4 , …

ثم نعمم الصيغة لتكون :

$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$, $\forall\, k = j\, , j+1\, , \dots$ حيث k للصف و j للعمود

ملاحظة (2.2) [3]

إن طريقة رومبركَ تحظى بميزة إضافية مرغوب فيها ألا وهي إمكانية حساب صف جديد كامل في الجدول عن طريق تطبيق قاعدة شبه المنحرف مرة إضافية واحدة فقط وبعد ذلك تستخدم لإيجاد بقية المدخلات .

البند الثاني

جدول تكامل طريقة رومبرك (2.3) [3]

إن الطريقة المستخدمة لإنشاء جدول من هذا النوع تحسب المدخلات صفاً صفاً إي على الترتيب التالي :

$R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}$, الخ ، كما في الشكل (4).

The Romberg Table

k	$O(h_k^2)$	$O(h_k^4)$	$O(h_k^6)$	$O(h_k^8)$	$\cdots$	$O(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$					
2	$R_{2,1}$	$R_{2,1}$				
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

الشكل (4)

مثال (2.4)

أستخدم طريقة رومبرك لإيجاد تكامل الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة (1,1.30) وعدد الفترات n =4

الحل :

	f_0	f_1	f_2
x	1	1.15	1.30
f(x)	1	1.07238	1.14017

عندما n=1 ← $h = \frac{1.30-1}{1} = 0.3$

$$R_{1,1} = \int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\ dx = \frac{h}{2}\left[f0 + f2 \right] = \frac{0.3}{2}\left[1 + 1.14017 \right] = 0.321026$$

عندما n=2 ← $h = \frac{1.30-1}{2}\ 0.15$

$$R_{2,1} = \frac{h}{2}\left[f0 + 2\,f1 + f2 \right] = \frac{0.15}{2}\left[1+2(1.07238) + 1.14017\right] = 0.321370$$

$h = \frac{1.30-1}{4} = 0.075$ ← n=4 عندما

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
X	1	1.075	1.15	1.225	1.30
f (x)	1	1.03682	1.07238	1.10679	1.14017

يكون الحل حسب الجدول

$$R_{3,1} = \frac{h}{2}\left[f0 + 2\,f1 + 2\,f2 + 2\,f3 + \ f4 \ \right]$$

$$= \frac{0.075}{2}\left[1 + 2(1.03682) + 2(1.07238) + 2(1.10679) + 1.14017 \right] = 0.321456$$

$$R_{2,2} = \frac{4(\ R_{2,1}) - R_{1,1}}{3} = 0.3214848$$

$$R_{3,2} = \frac{4(R_{3,1}) - R_{2,1}}{3} = 0.32148534$$

$$R_{3,3} = \frac{16(R_{3,2}) - R_{2,2}}{15} = 0.32148537$$

جدول نتائج التكامل لطريقة رومبركَ بإستخدام صيغة شبه المنحرف :

k	n	o($h^2{}_k$)	o($h^4{}_k$)	o($h^6{}_k$)
1	1	$R_{1,1}$ = 0.321026		
2	2	$R_{2,1}$ = 0.321370	$R_{2,2}$ = 0.3214848	
3	4	$R_{3,1}$ =0.321456	$R_{3,2}$ =0.32148534	$R_{3,3}$ = 0.32148537

يعتبرالناتج الاخير في جدول التكامل لطريقة رومبركَ بهذه الصيغة هو أفضل ناتج تقريبي للحل $R_{3,3}$ و الأقل خطأ.

$$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\ dx \approx \ R_{3,3} = 0.32148537$$

Section Three البند الثالث

مقترح لتحسين الخطأ في طريقة رومبرك بإستخدام صيغة سمبسون

مثال (3.1)

نطبق على المثال السابق (2.4) وهو استخدام طريقة رومبركَ لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة (1,1.30) ولكن نستخدم صيغة سمبسون بدل من صيغة قاعدة شبه المنحرف في سياق الحل لنحصل على النتائج التالية.

الحل :

عندما نستخدم صيغة سمبسون نبدأ عند n= 2 ← $h = \frac{1.30-1}{2} = 0.15$

	f_0	f_1	f_2
x	1	1.15	1.30
f(x)	1	1.07238	1.14017

$$R_{1,1}=\int_1^{1.30} \sqrt{x}\ dx = \frac{h}{3}\left[f0 + 4\,f1 + f2 \right] = \frac{0.15}{3}\left[1 + 4(1.07238) + 1.14017 \right]$$

= 0.32148487

عندما n=4 ← $h = \frac{1.30-1}{4} = 0.075$

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
X	1	1.075	1.15	1.225	1.30
f (x)	1	1.03682	1.07238	1.10679	1.14017

$$R_{2,1} = \frac{h}{3}\left[f0 + 4\,f1 + 2\,f\,2 + 4\,f3 + f4 \right]$$

$$= \frac{0.075}{3}\left[1+4(1.03682) + 2(1.07238) + 4(1.10679) + 1.14017 \right] = 0.32148533$$

$h = \frac{1.30-1}{8} = 0.0375$ ← n=8 عندما

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x	1	1.0375	1.075	1.1125	1.15	1.1875	1.225	1.2625	1.30
f(x)	1	1.01858	1.03682	1.05475	1.07238	1.08972	1.10679	1.12361	1.14017

$R_{3,1} = \frac{h}{3}\,[f0 + 4\,f1 + 2f2 + 4f3 + 2f4 + 4f5 + 2f6 + 4f7 + f8\,]$

$= \frac{0.0375}{8}$ [1 + 4(1.01858)+2(1.03682)+ 4(1.05475)+2(1.07238)+4(1.08972)+2(1.10679)+

4(1.12361)+1.14017] = 0.32148536

$R_{2,2} = \frac{4(R_{2,1}) - R_{1,1}}{3} = 0.32148549$

$R_{3,2} = \frac{4(R_{3,1}) - R_{2,1}}{3} = 0.32148537$

$R_{3,3} = \frac{16(R_{3,2}) - R_{2,2}}{15} = 0.32148536$

جدول نتائج التكامل لطريقة رومبركَ بإستخدام صيغة سمبسون :

k	n	o($h^2{}_k$)	o($h^4{}_k$)	o($h^6{}_k$)
1	2	$R_{1,1}$ = 0.32148487		
2	4	$R_{2,1}$ = 0.32148533	$R_{2,2}$ = 0.32148549	
3	8	$R_{3,1}$ =0.32148536	$R_{3,2}$ =0.32148537	$R_{3,3}$ = 0.32148536

يعتبر الناتج الاخير في جدول التكامل لطريقة رومبركَ بهذه الصيغة هو أفضل ناتج تقريبي للحل $R_{3,3}$و الأقل خطأ.

$\int_1^{1.30} \sqrt{x}\; dx \;\approx R_{3,3} = 0.32148536$

الأستنتاج

يمكن أن نستنتج مقدار نسبة الخطأ لتكامل الدالة المعطاة في الامثلة بين الحل الحقيقي والحل التقريبي بطريقة رومبركَ حيث مرة بإستخدام صيغة شبه المنحرف ومرة اخرى بإستخدام صيغة سمبسون لتكون النتائج كالتالي:

اذا كان الحل الحقيقي لتكامل الدالة هو

$$\int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\ dx = 0.321485$$

بينما الحل التقريبي لتكامل الدالة بطريقة رومبركَ بإستخدام صيغة شبه المنحرف هو

$$\int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\ dx \approx 0.32148537$$

ويكون الحل التقريبي لتكامل الدالة بطريقة رومبرك بإستخدام صيغة سمبسون هو

$$\int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\ dx \approx 0.32148536$$

لتكن نسبة الخطأ بين الحل الحقيقي والحل التقريبي لرومبركَ بإستخدام صيغة شبه المنحرف هي

$$E_t = |0.321485 - 0.32148537| = |-0.00000037| = 3.7\times 10^{-7}$$

بينما نسبة الخطأ بين الحل الحقيقي والحل التقريبي لرومبركَ بإستخدام صيغة سمبسون هي

$$E_s = |0.321485 - 0.32148536| = |-0.00000036| = 3.6 \times 10^{-7}$$

وهذا يدل على أن نسبة الخطأ بين استخدام الصيغتين يكون أقل عند تكامل الدالة بطريقة رومبركَ بإستخدام صيغة سمبسون و بهذا يكون الحل الافضل من حيث النتائج فيكون التحسين الذي أجريناه على طريقة رومبركَ يعطي نتائج أفضل وأقل نسبة خطأ ممكنة.

Appendices الملاحق

الملحق الأَول

برنامج الماتلاب لطريقة شبه المنحرف لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عندما a= 1 , b= 1.30

حيث h= 0.05 و عدد الفترات n=6

الحل :

```
 clc; close all ; clear all
f=@ (x) sqrt (x) ;
a=input('a=');
 b=input('b=');
 n=input('n=');
h=(b-a)/n;
s=f(a)+f(b);
 x=a+h;
for j=2:n
s=s+2*f(x);
x=x+h;
end
s=s*h/2;
s
```

النتائج بعد التنفيذ :

```
a=1
b=1.3
 n=6
s=0.321472563527613
```

الملحق الثاني

برنامج الماتلاب لطريقة سمبسون لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عندما $a= 1$, $b= 1.30$

حيث $h=0.05$ و عدد الفترات $n=6$

الحل :

```
clc ; close all ;clear all
f=@(x) sqrt (x);
a=input ('a=');    b=input('b=');    n=input('n=');    h=(b-a)/n;
s=f(a)+f(b);   x=a+h;
for j=2:n
if mod(j,2)==0 s=s+4*f(x);
else
s=s+2*f(x);
end
x=x+h;
end
s=s*h/3;
 s
```

النتائج بعد التنفيذ :

```
a=1
 b=1.3
 n=6
s=0.321485362179150
```

الملحق الثالث

برنامج الماتلاب لطريقة الثلاث أثمان لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عندما a= 1 , b= 1.30

حيث h=0.05 و عدد الفترات n=6

الحل :

```
f= @ （x） sqrt（x） ;
a=1;
b=1.30;
n=6 ;
h= (b-a) /n;
x= a+h : h : b-h ;
y=f（X） ;
y_a=f (a) ;
y_b=f (b) ;
integral_value= (h/3) * (y_a+4*sum (y (1:2 :end) ) +2*sum(y (2:2:end) ) +y_b) ;
disp (integral_value);
```

النتائج بعد التنفيذ :

≫ 0.321485

الملحق الرابع

برنامج الماتلاب لطريقة رومبركَ بصيغة شبه المنحرف لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

على الفترة (1,1.30) وعدد الفترات n=3

الحل :

```
% Romberg integration algorithm
 % Find the integral of y=sqrt (x)    from 1   to  1.30
 syms x
 f1 =input ('enter the function f1:');
 f=inline (f1);
 a = input ('Enter lower limit, a:  ');
 b = input ('Enter upper limit, b:  ');
 n = input ('Enter no. of subintervals, n:  ');
h = b-a;
 r = zeros (2,n+1);
 r(1,1) = (f(a)+f(b))/2*h;
 fprintf ('\n Romberg integration table:\n');
 fprintf ('\n %11.8f\n\n', r(1,1));
 for i = 2:n
    sum = 0;
    for k = 1:2^(i-2)
       sum = sum+f(a+(k-0.5)*h);
    end
    r(2,1) = (r(1,1)+h*sum)/2;
```

```
  for j = 2:i
    l = 2^(2*(j-1));
    r(2,j) = r(2,j-1)+(r(2,j-1)-r(1,j-1))/(l-1);
  end
  for k = 1:i
    fprintf(' %11.8f',r(2,k));
  end
  fprintf('\n\n');
  h = h/2;
  for j = 1:i
    r(1,j) = r(2,j);
  end
end
```

النتائج بعد التنفيذ :

```
>>  Romberg  integration  table :
0.32102631
0.32137024      0.32148488
0.32145656      0.32148534      0.32148537
```

الملحق الخامس

برنامج الماتلاب لطريقة رومبركَ بصيغة سمبسون لإيجاد تكامل الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

على الفترة (1,1.30) و عدد الفترات n=3

الحل :

```
format  long
syms x
f1=input ('enter  the function f:');
f=inline (f1);
a=input ('enter lower limit a:');
b=input ('enter upper limit b:');
n=input ('enter the n:');      Is = zeros (2,n);
for m=1:n
 i=1:2^m
 h=(b-a)/(2^m)
s=f(a+i.*h);
se=sum(s(2:2:(2^m)-1));
so=sum(s(1:2:(2^m)-1));
Is(m,1)=(h./3).*(f(a)+4.*so+2.*se+f(b))
for j=2:m
Is(m,j)=(4^(j-1)*Is(m,j-1)-Is(m-1,j-1))/(4^(j-1)-1)
end
end
```

تكملة الملحق الخامس

النتائج بعد التنفيذ بالبرنامج :

≫ Is =

0.321484877150229

0.321485336973828   0.321485490248361

0.321485366441631   0.321485376264232   0.32148536866529

المصادر References

1- د. نشاط إبراهيم العبيدي , التحليل العددي , دار المسيرة , الطبعة الأولى (1432هـ-2011 ف).

2- د. علي محمد صادق سيفي , د. إبتسام كمال الدين , مبادئ التحليل العددي , مطبعة جامعة الموصل (1986).

3- Rchardl .Burden , J. Douglas Faires ,التحليل العددي , ترجمة

أ. د. محمد صبحي أبوصالح , مكتبة العبيكان (1434هـ)