جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة بابل - كلية العلوم الصرفة

قسم الرياضيات

بعض خصائص الدوال التحليلية في المستوي المركب

Some properties of analytic functions in the complex plane

بحث تخرج مقدم إلى مجلس كلية العلوم الصرافه-قسم الرياضيات -جامعة بابل

كجزء من متطلبات نيل درجة البكلوريوس في قسم الرياضيات

اعداد الطلاب

نورس ميثم سلمان

بأشراف

م. م. عدي حاتم

2024م

بسم الله الرحمٰن الرحيم

﴿وَلَسَوْفَ يُعْطِيكَ رَبُّكَ فَتَرْضَىٰ﴾.

صدق الله العلي العظيم

إهداء

إلى من أشتاق إليه بكل جوارحي.... وطني الغالي.

إلى مثال التفاني والإخلاص..... أبى الحبيب.

إلى من قدَّمت سعادتي وراحتي على سعادتها... أمي الفاضلة.

إلى من أمدَّوني بالنصح والإرشاد... أخواني واخواتي.

إلى كل من دعا لي بالخير

أهديكم ذلك العمل المتواضع.......

الباحث

الشكر والتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم، والحمد لله رب العالمين الذي وفقنا وأعاننا على إنهاء هذا البحث والخروج به بهذه الصورة المتكاملة، فبالأمس القريب بدأنا مسيرتنا التعليمية ونحن نتحسس الطريق برهبة وارتباك، فرأينا أن (رياضيات) هدفا ساميًا وحبا وغاية تستحق السير

لأجلها، وإن بحثنا يحمل في طياته طموح شباب يحلمون أن تكون أمتهم العربية كالشامة بين الأمم.

وانطلاقا من مبدأ أنه لا يشكر الله من لا يشكر الناس فإننا نتوجه بالشكر الجزيل للأستاذ (عدي حاتم صاحب) الذي رافقتني في مسيرتنا لإنجاز هذا البحث وكانت لها بصمات واضحة من خلال توجيهاتها وانتقاداتها البناءة والدعم كما نشكر عائلاتنا التي صبرت وتحملت معنا ورفدتنا بالكثير من الدعم على جميع الأصعدة، ونشكر الأصدقاء والأحباب وكل من قدم لما الدعم المادي أووأخيرا نتوجه بشكر خاص للدكتورة رئيس قسم الرياضيات ازل موسى جعفر وكذالك نشكر جميع أساتذة الرياضيات....

الخلاصة

في الفصل الاول تم تعريف الدالة التحليلية مع الأمثلة التي تحققها والنظريات والدالة الكلية والنقاط الشاذة وتم تناول شرطي كوشي ريمان وتم تناول اصفار الداله كذالك تم تناول مفكوك تايلر والرواسب الدالة (نظرية كوشي للرواسب)

في الفصل الثاني تم تناول صيغة كوشي التكاملية كذالك مبرهنة كوشي – كورسات ونضريات الأساسية في الجبر ونظرية ليوفيل ونظرية كروس والدالة التوافقية والتطبقات العملية

فهرست المحتويات

الفصل الأول

الفصل الأول

[1].(1).المقدمـــــــــــة

إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل نقاط D_0

يمكن تعريف الدالة هي أحد فروع الرياضيات Complex analysisالتحليل المركب أو التحليل العقدي (بالإنجليزية: التي تبحث في توابع (دوال) الأعداد المركبة والتي تعرف أيضا بالعقدية، للتحليل المركب استخدامات واسعة في الرياضيات التطبيقية وفي فروع متعددة من الرياضيات. الاهتمام الأساسي للتحليل المركب هو الدوال التحليلية ذات المتغيرات المركبة، أو ما يعرف بالدوال تامة الشكل.

[1].(1-1)الدالة التحليلية :

تعريف. الدالة العقدية $f(z)$ يقال انها دالة تحليلية(هلومرفية) عند النقطة

جوارما للنقطة z_0 وإذا كانت تحليلية عند كل نقاط المنطقة D فإنها تكون تحليلية ضمن المنطقة D.

وإذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند كل نقاط المستوي z فإنها يقال عليها دالة كلية (Entire Function).

مثال(1-$f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلية عند كل نقطة غير صفرية في المستوي المنتهي بينما الدالة $f(z) = |z|^2$ ليست تحليلية :(2

عند كل نقطة لأن مشتقتها موجودة فقط عندما $z = 0$الدالة وليس في أي مكان آخر.

الان إعطاء تعريفا $f(z)$ إذا كانت ليست تحليلية عند النقطة z_0 ولكنها تحليلية عند بعض نقاط أي جوار للنقطة عندئذٍ تسمى النقطة z_0 نقطة شاذة (Singular Point)حيث أن الدالة .

$$z_0$$

مثال(1-3)

جد النقاط الشاذة للدالة $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

<u>الحل</u>

بما أن $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{2}{(1-z)^2}$

أذاً الدالة تحليلية لجميع قيم z عدا $z = 1$ وهي النقطة التي عندها تكون المشتقة غير موجودة ، ان النقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة .

نظرية(1-4)

تكون دالة تحليلية في مجال D إذا وفقط إذا كان الجزء الحقيقي والتخيلي من $f(z)$ لهما مشتقات جزئية

$f(z)$

مستمرة من الرتبة الأولى وتحقق معادلتي كوشي-ريمان عند جميع نقاط D.

مثال (1-5)

برهن أن الدالة $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$ كلية (أي تحليلية في جميع نقاط المستوي) .

مثال(1-6

<u>الحل</u>/بما ان $z = x + iy$ فأن

إثبت أن

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i\,(2xy + 5x - 1)$$

الحل . ذ

أي أن

$$u = x^2 - y^2 - 5y + 3$$

$$v = 2xy + 5x - 1$$

وهذه الد

$$u_x = 2x = v_y$$

لكل قيم

$$v_x = 2y + 5 = -u_y$$

مثال(1-7

فالمعادلتين لكوشي ريمان متحققتان ولما كانت المشتقات الجزئية للدالتين u , v مستمرة عندئذ تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد وأن

$$f'(z) = 2x + i\,(2y + 5)$$

$$= 2z + 5i$$

وبذلك تكون الدالة $f(z)$ كلية .

وضح أن الدالة :

$$f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$$

تكون كلية.

الحل

يجب أن نختبر أولا اتصال المشتقات الجزئية :

$$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy \quad و \quad u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

وتحقق معادلتي كوشي - ريمان عند جميع نقاط C من الواضح أن :

$$u_x=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)=v_y$$

وأن

$$-u_y=2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy+x\sin 2xy)=v_x$$

دوال متصلة في C وعليه فإن $f(z)$ كلية.

مثال(8-1)حدد النقاط التي تكون الدالة $f(z)$ تحليلية عندها حيث

$$f(z)=\bar{z}e^{-|z|^2}$$

الحل . نعيد كتابة الدالة $f(z)$ كالاتي:

$$f(z)=(x-iy)e^{-(x^2+y^2)}$$

ومنها تكون الدوال الحقيقية v,u كالآتي:

$$u(x,y)=xe^{-(x^2+y^2)}\,,\quad v(x,y)=-ye^{-(x^2+y^2)}$$

الآن نجد مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى

$$u_x=e^{-(x^2+y^2)}-2x^2e^{-(x^2+y^2)}\,,\qquad u_y=-2xye^{-(x^2+y^2)}$$

$$v_x=2xye^{-(x^2+y^2)}\,,\qquad v_y=-e^{-(x^2+y^2)}+2y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

بالنظر إلى قيم المشتقات أعلاه غير أن

$$u_y=-v_x$$

بينما $u_x = v_y$ فقط عندما يكون

$$2e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2e^{-(x^2+y^2)} - 2y^2e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

أو

$$2e^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0$$

لذلك يكون لدينا $x^2 + y^2 = 1$

وبما أن جميع المشتقات v_y, u_y, v_x, u_x مستمرة لذلك نستنتج أن $f(z)$ تحليلية فقط على الدائرة $|z| = 1$ الجزئية [3]. مثال(1-9)

صف المنطقة التي تكون عندها الدالة f تحليلية:

$$f(x) = \frac{(x-1) - iy}{(x-1)^2 + y^2}$$

الحل

المشتقات الجزئية الأولى لكل من $u = \operatorname{Re} f$ و $v = \operatorname{Im} f$ تحقق:

$$u_x = \frac{y^2 - (x-1)^2}{\left[(x-1)^2 + y^2\right]^2} = v_y$$

$$u_y = \frac{-2y(x-1)}{\left[(x-1)^2 + y^2\right]^2} = -v_x$$

هذه الدوال متصلة لجميع $z \neq 1$. لاحظ أن $f(z)$ غير معرفة عند $z = 1$ وبالتالي فـإن $f(z)$ تحليلية لجميع $z \neq 1$.

نظرية(1-10).إذا كانت $f(z)$ تحليلية عند مجال D وأن $f'(z) = 0$ في هذا المجال فإن $f(z)$ تكون ثابتة. الدالة

البرهان . لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ فإذا كانت $|f(z)| = 0$ فإن $f = 0$, عكس هذا أي أن

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$$

بأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـ $y\,,x$ يكون $uu_x + vv_x = 0 \;\; , \;\; uu_y + vv_y = 0$

وبما أن الدالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي-ريمان لذلك نجد

$$vu_x + uu_y = 0 \qquad , \qquad uu_x - vu_y = 0$$

وعليه يكون $(x^2+y^2)u_y = 0 \;\; , \;\; (x^2+y^2)u_x = 0$

وهنا نستنتج أن $u_x = u_y = 0$

وكذلك بنفس الطريقة نستنتج أن $v_x = v_y = 0$

وبالتالي تكون الدالة f دالة ثابتة.

[4]مثال.(11-1) إثبت أن $\boldsymbol{f(z)}, \overline{\boldsymbol{f(z)}}$ كلاهما تحليلية عند المجال D فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة خلال المجال D إذا كانت

الحل . لتكن $\boldsymbol{f(z) = u(x,y) + iv(x,y)}$

فتكتب $\overline{\boldsymbol{f(z)}} = \boldsymbol{U(x,y) + iV(x,y)}$

حيث $$\boldsymbol{U(x,y) = u(x,y),\; V(x,y) = -v(x,y)} \qquad (5)$$

وبما أن الدالة $\boldsymbol{f(z)}$ تحليلية

إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان في المجال $\boldsymbol{D}$ أي أن

$$\boldsymbol{u_x = v_y \;\; ; \;\; u_y = -v_x} \qquad (6)$$

ومن كون الدالة $\overline{\boldsymbol{f(z)}}$ تحليلية , إذن نستنتج أن

$$\boldsymbol{U_x = V_y \;\; ; \;\; U_y = -V_x} \qquad (7)$$

بالنظر للعلاقات $(6), (7)$ نجد أن

$$\boldsymbol{u_x = -v_y \;\; ; \;\; u_y = v_x} \qquad (8)$$

بجمع المعادلتين $(6), (8)$ بما يقابلها نستنتج $\boldsymbol{u_x = 0}$ في المجال $\boldsymbol{D}$.

وكذلك بطرح المعادلتين $(6), (8)$ بما يقابلها نجد $\boldsymbol{v_x = 0}$

لذلك $\boldsymbol{f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0}$ وبإستخدام النظرية (2-10) فإن الدالة تكون ثابتة .

برهن ان الدالة(12-1)

$$w = f(z) = |z|^2$$
$$= x^2 + y^2$$

تحقق معادلتي كوشي – ريمان عند النقطة $z = 0$ ولكنها ليست تحليلية عند النقطة $z = 0$

__الحل__

بما أن $v = 0$; $u = x^2 + y^2$ ينتج

$u_x = 2x$; $u_y = 2y$ $\qquad$ $v_x = 0$; $v_y = 0$

أن معادلتي كوشي ريمان تتحققان عند النقطة $z = 0 + i0$ لكن الدالة $f(z) = |z|^2$

نظرية(13-1)

لتكن $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , ولتكن $g(z_o) \neq 0$, $m \geq 1$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_o)^m}$ فإن z_o قطب من الدرجة m للدالة $f(z)$.

(هذه النظرية توضح العلاقة بين الصفر للدالة من الدرجة m والقطب أيضاً من الدرجة m)

البرهان . لتكن $g(z)$ دالة تحليلية لذلك حسب مفكوك تايلور للدالة يكون

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_o) + c_2(z - z_o)^2 + \cdots$$

حيث $c_0 = g(z_o) \neq 0$

إذن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_o)^m} = \frac{c_0}{(z - z_o)^m} + \frac{c_1}{(z - z_o)^{m-1}} + \cdots + c_m + c_{m+1}(z - z_o) + \cdots$$

مثال(14-1)

جد أصفار وأقطاب الدالة $f(z) = \frac{\cot z}{z}$ ثم صنفها.

الحل . بما أن

$$f(z)=\frac{\cos z}{z\sin z}$$

وبفرض أن $\cos z=0$ يؤدي إلى أن $n=0,\mp1,\mp2,\dots$ $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

وبما أن $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\neq 0$

وهذه تمثل $\cos'\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\neq 0$

لذلك يكون لهذه الدالة صفراً بسيطا عند النقاط $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ ,\ n=0,\mp1,\mp2,\dots$

الآن بالنسبة للأقطاب $z\sin z=0$ وهذا يتحقق عندما تكون $n=0,\mp1,\mp2,\dots$, $z=n\pi$ و z=0 و وبما أن نضع

$\cos(n\pi)\neq 0$ الذي يمثل $\sin'(n\pi)\neq 0$ لذلك تكون لهذه الدالة قطباً بسيطاً عند $z=n\pi, n=0,\mp1,\mp2,\dots$

بالاضافة الى ذلك فان الدالة تحليلية عند الصفر وغايتها لاتساوي صفرا عندما$(z\to 0)$

مثال(1-15)

جد أصفار الدالة $f(z)=\sinh\left(\frac{1}{z}\right)$

الحل . لإيجاد أصفار هذه الدالة تكون

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right)=0$$

ومن العلاقة

$$\sin(iz)=i\sinh z$$

لذلك نجد أنه

$$\sin\left(\frac{i}{z}\right)=0\implies\frac{i}{z}=n\pi$$

وأن جذور (أصفار) هذه الدالة يكون $n=0,\mp1,\mp2,\dots$, $z_n=\frac{i}{n\pi}$

وبما أن المشتقة الأولى غير صفرية عند هذه الأصفار لذلك كلها تكون أصفار بسيطة.

نظرية (1-16)

لتكن fz دالة تحليلية ولها صفرمن الرتبة k عند $z=z_0$ فإن $\frac{1}{f(z)}$ لها قطب من الرتبة k عند $z=z_0$

أيضاً.

البرهان . بما أن $f(z)$ لها صفر من الرتبة k عند z_0 فإن

$$f(z) = (z - z_o)^k g(z) \qquad (6)$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o , $g(z_o) \neq 0$

لذلك يكون لدينا

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k} \cdot \frac{1}{g(z)} \qquad (7)$$

من (6) وبإستخدام ضرب كوشي فإن متسلسلة تايلور تكون

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

وعليه تكون

$$(a_0 + a_1(z - z_o) + \cdots)(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots) = 1$$

وبالتعويض في (7) تكون

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_o)^k}(b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots)$$

حيث $b_0 \neq 0$

لذلك $\frac{1}{f}$ لها قطب من الدرجة k.

نظرية (1-17)

. إذا كان $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإن

$\frac{1}{f}$ لها نقطة شاذة معزولة عند z_o وإذا عرفنا $\frac{1}{f(z_o)} \neq 0$ فإن $\frac{1}{f}$ لها صفر من الدرجة k عن النقطة z_o.

البرهان . بما ان $f(z)$ لها قطب من الدرجة k عند z_o فإنه يوجد دالة تحليلية $g(z)$ عند z_o وأن $g(z_o) \neq 0$ الدالة

حيث

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_o)^k} \qquad (8)$$

ومن العلاقة (8) يمكن إيجاد مفكوك تايلور للدالة $\frac{1}{g(z)}$ كالآتي

$$\frac{1}{g(z)} = b_0 + b_1(z - z_o) + \cdots$$

لذلك تكون

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_o)^k}\cdot\frac{1}{g(z)}$$

$$=(z-z_o)^k\cdot(b_0+b_1(z-z_o)+\cdots)$$

وبالتالي يكون z_o صفراً من الرتبة k للدالة $\frac{1}{f}$ بشرط $\frac{1}{f(z_o)}\neq 0$, z_o نقطة شاذة قابلة للإزالة .

نتيجة . إذا كانت $f(z)$ و $g(z)$ دوال تحليلية مع أصفارمن الرتبة n,m على الترتيب عند z_o فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ تكون كالآتي

1- إذا كان $m>n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o وتمثل صفراً من الدرجة $m-n$ للدالة $\frac{f(z)}{g(z)}$.

2- إذا كان $m<n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها قطب من الرتبة $n-m$ عند z_o .

3- إذا كان $m=n$ فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_o.

ونستطيع تعريفها لذلك $\frac{f(z)}{g(z)}$ تحليلية عند z_o بواسطة

$$\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(z_o)}{g(z_o)}$$

نظرية (1-18)

لتكن الدالة

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\sin z}{z\cos z}$$

ومن المعروف لدينا أن $\sin z=0$ عندما $z=n\pi$ حيث $n=0,\mp1,\mp2,\ldots$

$f'(n\pi)\neq$ فإن صفر الدالة f يكون بسيط وبنفس الطريقة يمكن أن نعرف بأنه $g(z)=z\cos z$ لها أصفار

وبما أن 0

بسيطة عند $z=0$ وكذلك $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ حيث $n=0,\mp1,\mp2,\ldots$

لذلك من النتيجة السابقة فإن $\frac{f(z)}{g(z)}$ لها السلوك الآتي:

1- لها أصفار بسيطة عند $z=n\pi$, $n=0,\mp1,\mp2,\ldots$

2- لها أقطار بسيطة عند $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $n=0,\mp1,\mp2,\ldots$

3- تحليلية عند 0 وأن $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{g(z)}$.

نتيجة. لتكن $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, حيث $P(z)$, $Q(z)$ تحليليتان عند z_o بحيث $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o بينما $P(z_o)\neq 0$ الدالة فإن

$$Res[f,z_o]=\frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

البرهان . الدالة التحليلية $Q(z)$ لها قطب بسيط عند z_o أي أن $Q'(z_o)=0$ لذلك فإن الراسب لهذه الدالة هو

$$Res[f,z_o]=\lim_{z\to z_o}(z-z_o)\frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{P(z)}{\left[\frac{Q(z)-Q(z_o)}{z-z_o}\right]}=\frac{P(z_o)}{Q'(z_o)}$$

مثال (1-19)/

جد الراسب للدالة $f(z)=co\ s$

الحل . يمكن إعادة كتابة الدالة $f(z)=\frac{\cos z}{\sin z}$

لذلك بما أن البسط والمقام دوال تحليلية وأن $sin\ z$ لها قطب بسيط عند $z=n\pi$ حيث n عدد صحيح وكذلك

$$\cos n\pi\neq 0$$

لذلك فإن الراسب لكل عدد صحيح n هو

$$Res[f,n\pi]=\frac{cos\ n\pi}{sin'\ n\pi}=1$$

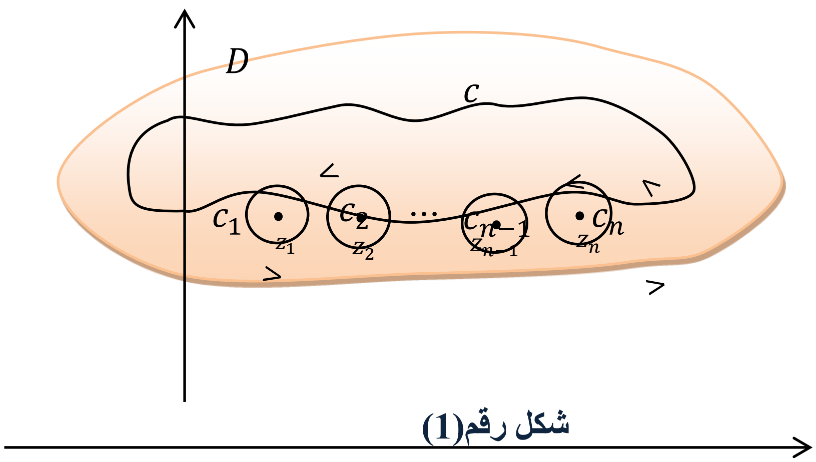
نتيجة . إذا كانت الدالة $f(z)$ لها قطب بسيط عند z_o وكانت $g(z)$ دالة تحليلية عند z_o فإن

$$Res[fg,z_o]=g(z_o)Res[f,z_o]$$

(1-20).[2] نظرية كوشي للرواسب Cauchy Residue Theorem

لتكن D منطقة بسيطة الإتصال وليكن cكنتورمغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس اتجاه عقرب الساعة) يقع داخل D تحليلية داخل وعلى حدود الكانتور حسب شكل c, باستثناء عدد منته من النقاط $z_n, \dots, z_2, z_1$ تقع داخل c فإن فإذا كانت الدالة fرقم(1)

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f, z_k] \qquad (3)$$



شكل رقم(1)

البرهان . لتكن المسارات c_k, حيث $k = 1, \dots, n$ دوائر بالإتجاه الموجب مركزها z_k ونصف قطرها r_k على الترتيب وكما في الشكل (1-6), لذلك فإن الصيغة الآتية متحققة

$$(4) \qquad \int_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_k} f(z)dz$$

الدالة $f(z)$ لها متسلسلة لورانت عند z_k حيث

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j$$

لذلك فإن

$$\int_{c_k} f(z)dz = \int_{c_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_k)^j \, dz$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \int_{c_k} (z - z_k)^j \, dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res[f, z_k]$$

بالتعويض في (4) نستنتج العلاقة (3)

مثال(1-21) جد قيمة التكامل:

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)}dz$$

حيث c هو المسار $|z-i| = \frac{1}{2}$ في الإتجاه الموجب

الحل .

$$\frac{z-1}{z(z^2+1)} = \frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطة شاذة واحدة وهي $z = i$ وعليه نجد الراسب للدالة عند $z = i$ وكما يلي

$$Res[f,i] = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z-1}{z(z-i)(z+i)}$$
$$= (-\frac{i-1}{2})$$

لذلك فإن

$$\int_c \frac{z-1}{z(z^2+1)}dz = 2\pi i Res[f,i]$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i-1}{2}\right) = \pi(i+1)$$

مثال:(1-22)

. جد قيمة التكامل $\int_c \frac{z}{z^2-1}dz$ حيث c هو المسار $|z| = \frac{3}{2}$ في الإتجاه الموجب [5]

الحل .

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على نقطتين شاذتين وهي $z = 1, z = -1$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقطة $-1, 1$ هو

$$Res[f,1] = \frac{1}{2} \ , \ Res[f,-1] = \frac{1}{2}$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{z}{z^2-1}dz = 2\pi i(Res[f,1] + Res[f,-1])$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i$$

مثال(23-1)

جد قيمة التكامل $\int_c \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}dz$ حيث c هو المسار $|z| = 2$ في الإتجاه الموجب

الحل:نفرض ان

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحتوي على نقطتين شاذتين وهي $z = 1, z = 0$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقطة 1,0 , هو

$$Res[f,1] = 1\,, \quad Res[f,0] = 1$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{\cos \pi z}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i(1+1) = 4\pi i$$

مثال(24-1)

جد قيمة التكامل $\int_c \frac{1}{z^4+z^2}dz$ حيث c هو المسار $\left|z-\frac{i}{2}\right| = 1$ في الإتجاه الموجب

الحل: نفرض ان

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحتوي على نقطتين شاذتين وهي $z = i, z = 0$ لذلك فإن الراسب للدالة عند النقاط $i, 0$, هو

$$Res[f,i] = -1/2i\,, \quad Res[f,0] = 0$$

وعليه فإن

$$\int_c \frac{1}{z^4+z^2}dz = 2\pi i(0 - 1/2i) = -\pi$$

مثال(25-1)

جد قيمة التكامل $\int_c \frac{z^5+z+1}{z^2(z^4-1)} dz$ حيث c هو المسار $|z| = 2$ في الإتجاه الموجب

الحل: نفرض ان

$$f(z) = \frac{z^5 + z + 1}{z^2(z^4 - 1)}$$

نلاحظ أن المنطقة الداخلية للمسار c تحوي على خمس نقاط شاذه وهي $z = 0, z = 1, -1, i, -i$

وجميعها تقع داخل المنحني وعليه

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^5} + \frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2}(\frac{1}{t^4} - 1)} = \frac{\frac{1 + t^4 + t^5}{t^5}}{\frac{1 - t^4}{t^6}} = (t + t^5 + t^6).\frac{1}{1 - t^4}$$

$$= (t + t^5 + t^6)[1 + t^4 + t^8 + t^{12} + \cdots]$$

ومنه يكون

$$Res(f(z), \infty) = -1$$

وعليه

$$\int_c \frac{z^5 + z + 1}{z^2(z^4 - 1)} dz = 2\pi i$$

الفصل الثاني

الفصل الثاني

خصائص الدوال التحليلية في المستوي المركب

[6].(1-2) -نظرية كوشي

نظرية. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال D وكان $a, z \in D$ عندئذٍ يكون

$$F(z) = \int_{a}^{z} f(u)du$$

تحليلية في المنطقة D ويكون $F'(z) = f(z)$

البرهان . من الممكن استعمال الترميز

$$\int_{C}^{u} f(u)du = \int_{a}^{z} f(u)du$$

وليكن C_2, C_1 كانتورين في D لهما نفس نقطة البداية a والنهاية z

لذلك سيكون لدينا $C = C_1 - C_2$ منحني بسيط مغلق وباستخدام نظرية كوشي-كورسات ينتج لنا

$$\int_{C_1}^{u} f(u)du - \int_{C_2}^{u} f(u)du = \int_{C_1 - C_2}^{u} f(u)du = 0$$

ولبرهنة الجزء الثاني , لتكن z نقطة ثابتة وليكن Δz صغيرة بما فيه الكفاية لذلك $z + \Delta z$ أيضاً تقع داخل D وبما ان z نقطة ثابتة فإن $f(z) = k$ حيث k ثابت وعليه يكون

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)du = \int_{z}^{z+\Delta z} kdu = k\Delta z = f(z)\Delta z$$

ومن الجهة الأخرى لدينا

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{a}^{z+\Delta z} f(u)du - \int_{a}^{z} f(u)du$$

$$= \int_{C_1}^{a} f(u)du - \int_{C_2}^{a} f(u)du = \int_{C}^{u} f(u)du$$

حيث C كانتور يربط النقطة z مع $z+\Delta z$, C_1 يربط a مع z, C_2 يربط a مع $z+\Delta z$

وبما ان f دالة مستمرة عند النقطة z, إذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

إذا كان $|u-z| < \delta$ فإن $|f(u)-f(z)| < \varepsilon$

ومن المعادلات اعلاه يكون لدينا $|\Delta z| < \delta$ يؤدي الى ان

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_C^u f(u)du - \int_C^z f(z)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_C^u |f(u)-f(z)|du$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon$$

وعليه يكون الطرف الأيسر يذهب إلى الصفر عندما $\Delta z \to 0$ وهذا يعني $F'(z) = f(z)$

وبهذا ينتهي البرهان .

نظرية(2-2)

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الإتصال D وكانت $F(z)$ هي أصل مشتقة لها عندئذٍ لأي منحني يصل بين النقطتين b, a حيث $a, b \in D$ يكون

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)|_a^b = f(b) - f(a)$$

البرهان . من النظرية السابقة نستنتج أن $\int_a^b f(z)dz$ مستقل عن الطريق لأن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du$$

تحليلية ولتكن G أصل مشتقة الدالة التحليلية f فإن

$$G(z) - F(z) = H(z)$$

تحليلية وأن $H'(z) = 0$ لكل $z \in D$ وعليه يكون $H(z) = k$ حيث k ثابت

و $G(z) = F(z) + k$

لذلك $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$

وبهذا ينتهي البرهان .

اثبت ان الدالة:(3-2)

$$\int_1^i \sin z\, dz = \cos 1 - i \cosh 1$$

الحل . أصل المشتقة للدالة $f(z) = \sin z$ هي $F(z) = -\cos z$

لذلك

$$\int_1^i \sin z\, dz = -\cos i + \cos 1 = \cos 1 - i \cosh 1$$

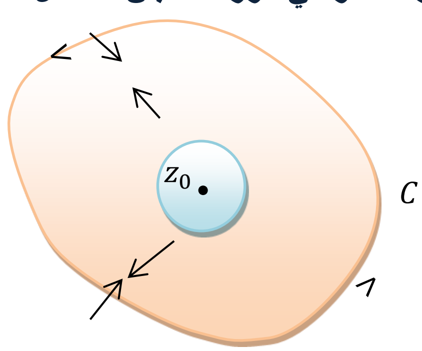
[7].(2-4) صيغة كوشي التكاملية (Cauchy Integral Formula)

ليكن C كانتور مغلق بسيط بالإتجاه الموجب ولتكن f دالة تحليلية على منطقة بسيطة الإتصال D تحوي C ولتكن z_0 أي نقطة داخلية تقع داخل C فإن

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C^z \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

البرهان . الدالة $\frac{f(z)}{z-z_0}$ دالة تحليلية في D ما عدا عند النقطة z_0 ومن نتيجة مبرهنة كوشي-كورسات بأن التكامل على المنحني C هو نفسه على المنحني C_r حيث كما في الشكل(2)

$$C_r: |z - z_0| = r$$



شكل رقم (2)

أي أن

$$\int_{C}^{z} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

من الممكن كتابة الطرف الأيمن كالآتي

$$\int_{C_r}^{z} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C_r}^{z} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz + \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

$$= f(z_0) \int_{C_r}^{z} \frac{dz}{z-z_0} + \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) 2\pi i + \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

إذا ما أخذنا $r \to 0$ فإن المعادلة أعلاه تكون

$$\int_{C}^{z} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) 2\pi i + \lim_{r \to 0^+} \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz$$

لتكن $M_r = \max\{\int |f(z)-f(z_0)| : z \in C_r\}$

وبما ان f دالة مستمرة ومن الواضح $M_r \to 0$ عندما $r \to 0$

لذلك نستنتج ان

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{z-z_0} \le \frac{M_r}{r}$$

إذن هذا يقابل

$$\left|\int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz\right| \le \frac{M_r}{r} L(C_r) = 2\pi M_r$$

وعليه

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{C_r}^{z} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = 0$$

وبهذا نستنتج أن

$$\int_C^z \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

وبهذا ينتهي البرهان

مثال(5-2)

إحسب $\int_C \frac{z^2+1}{z}dz$ حيث $C: z(t) = e^{it}$ وأن $0 \leq t \leq 2\pi$

الحل . الدالة $f(z) = z^2+1$ دالة تحليلية على المستوي العقدي $\mathbb{C}$

وأن $z_0 = 0$ نقطة تقع داخل الكانتور C

لذلك باستخدام صيغة كوشي التكاملية فإننا نستنتج

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C^z \frac{z^2+1}{z}dz$$

ومنه

$$\int \frac{z^2+1}{z}dz = 2\pi i[1] = 2\pi i$$

مثال(6-2)

إحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$ حيث C دائرة $|z-2| = 3$ بالإتجاه الموجب .

الحل . من الواضح $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ دالة تحليلية وأن $z_0 = 0$ تقع داخل C

لذلك باستخدام صيغة كوشي التكاملية فإننا نستنتج

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C^z \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

ومنه

$$\int \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 2\pi i\left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{-\pi i}{3}$$

مثال(2-7)

إحسب $\int_C^z \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz$ **حيث** $C: z(t) = e^{it} + \pi i$ **وأن** $0 \le t \le 2\pi$

الحل . الدالة $f(z) = z^2e^z$ **دالة تحليلية على المستوي العقدي** $\mathbb{C}$

وأن $z_0 = \pi i$ **نقطة تقع داخل الكانتور** C **كما في الرسم وحسب صيغة كوشي التكاملية فإن**

y

$$\int_C^z \frac{z^2e^z}{z-\pi i}dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$= 2\pi i f(\pi i)$$

$$= 2\pi^3 i$$

ملاحظه: من صيغة كوشي التكاملية يمكن أن نستنتج أنه إذا كانت الدالة تحليلية عند نقطة فإن جميع مشتقات الدالة عند تلك النقطة تكون أيضا تحليلية .

[8] .(2-8) (متراجحة)

(متراجحة-ML) دالة مستمرة معرفة على مجموعة مفتوحة تحتوي على الكانتور لتكن C وأن $|f(z)| < M$ **لكل** $z \in C$ **فإن**

$$\left|\int_C^z f(z)dz\right| \le ML$$

حيث L طول الكانتور C

البرهان . ليكن C منحني أملس حيث $z(t): [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\left|\int_C^z f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

$$\le M\int_a^b |z'(t)|dt = ML.$$

فإذا كان $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ حيث γ_1 ملساء فإن

$$\left|\int_C^z f\,(z)dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}^{z} f\,(z)dz\right| < \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{C_j}^{z} f\,(z)dz\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} ML(C_j) = \sum_{j=1}^{n} ML(C)$$

مثال(2-9)

كانتور معطى بالصيغة C ليكن من $z = 2$ الى $z = 2i$, $|z| = 2$ **إثبت أن**

$$\left|\int \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leq \frac{6\pi}{7}$$

الحل . بما أن

$$|z+4| \leq |z| + 4 = 6 \quad \text{و} \quad |z^3 - 1| \geq \left||z^3| - 1\right| = 7$$

فإن

$$\left|\frac{z+4}{z^3-1}\right| = \frac{|z+4|}{|z^3-1|} \leq \frac{6}{7}$$

حيث ان $L = \pi$ و $M = \dfrac{6}{7}$ اذن

$$\left|\int \frac{z+4}{z^3-1}dz\right| \leq \frac{6\pi}{7}$$

[8].(2-10) فرضيات01

نفرض أن C هو كانتور مغلق بسيط $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$

وبإتجاه عكس عقرب الساعة ولتكن f تحليلية عند كل نقطة من نقاط C داخل وعلى محيط C لذلك سيكون لدينا الدالة

$$\int_C^z f\,(z)dz = \int_a^b f\,\big(z(t)\big)z'(t)dt$$

وإذا فرضنا أن $z(t) = x(t) + iy(t)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

فإنه و بعد إجراء التكامل على القيمة الحقيقية t نستنتج

$$\int_C^z f(z)dz = \int_a^b \left(ux'(t) - vy'(t)\right) dt + i \int_a^b \left(vx'(t) + uy'(t)\right) dt$$

ولهذا يكون بعد وضع $f(z) = u + iv \;,\; dz = dx + idy$

$$\int_C^z f(z)dz = \int_c^z udx - vdy + i \int_c^z vdx + udy \qquad (3)$$

ومن نتائج التفاضل والتكامل فإننا نستطيع تحويل تكامل (3) إلى تكامل ثنائي باستخدام نظرية كرين والتي تنص على المسار

أنه إذا كانت الدوال $Q(x,y), P(x,y)$ مع مشتقاتها الجزئية الأولى مستمرة على جميع المنطقة المغلقة R التـي الحقيقية

تحوي على جميع النقاط الداخلية وعلى محيط الكانتور المغلق البسيط C فإنه

$$\int_C^d Pdx + Qdy = \iint_R^q \left(Q_x - P_y\right)dxdy$$

وبما أن الدالة f تحليلية في R لذلك تكون مستمرة داخل R ولهذا

$$\int_C^z f(z)dz = \iint_R^v \left(-v_x - u_y\right)dxdy + i \iint_R^u \left(u_x - v_y\right)dxdy$$

وحيث أن معادلتي كوشي-ريمان متحققة لذلك يكون لدينا

$$\int f(z)dz = 0$$

هذه النتيجة حصل عليها كوشي في القرن التاسع عشر وكما أسلفنا تعتبر من النتائج المهمة في التكامل العقدي.

مثال(11-2)

إذا كان C كانتور مغلق بسيط فإن

$$\int_C^z e^{z^3}\, dz = 0$$

وذلك لأن الدالة تحليلية في جميع النقاط بالإضافة إلى أن $f'(z) = 3z^2e^{z^3}$ مستمرة كذلك .

وهنا تجدر الإشارة إلى أن العالم Goursat أول من برهن أن شرط الاستمرارية لـ f' يمكن إلغاءه أي ان f'

كورسات

للدالة f لا يشترط أن تكون مستمرة وعليه تم تنقيح النتيجة التي حصل عليها كوشي بحذف شرط الإستمرارية

التحليلية

للمشتقة f' وهذه النتيجة سميت نظرية كوشي-كورسات والتي سنعرضا في النظرية القادمة .

مثال(12-2)

إذا كانت الدالة f تحليلية على المجال المتصل البسيط D , C (كانتور مغلق بسيط) يقع داخل D فإن

$$\int_C^z f(z)dz = 0.$$

البرهان . من نظرية كرين نجد أن

$$\int u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint (-v_x - u_y)dxdy = 0$$

وكذلك

$$\int_C^v v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D^u (u_x - v_y)dxdy = 0$$

لذلك ينتج لدينا

$$\int_C^z f\,(z)dz = \int_C^z (u+iv)\,(dx+idy)$$

$$= \int_C^u u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C^v v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$$

نظرية(13-2)

ليكن C منحني بسيط مغلق , ولتكن $f(z) = e^z$ لذلك وبما ان f دالة تحليلية على D فإنه حسب نظرية

كوشي-كورسات

$$\int_C^z e^z dz = 0$$

نتيجة (13-2)

إذا كان كل من C_2, C_1 كانتور مغلق بسيط وبالإتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) حيث C_2 يقع داخل C_1 والدالة $f(z)$ تحليلية على منطقة مغلقة تحتوي على C_2, C_1 وكل النقاط بينهما فإن

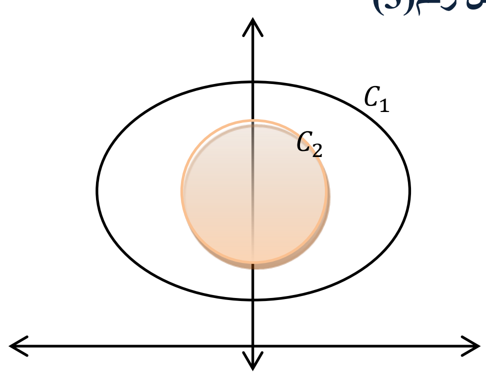
$$\int_{C_1}^{z} f(z)dz = \int_{C_2}^{z} f(z)dz$$

وهذه النتيجة تعطينا بأنه قيمة التكامل لا تتعلق بالطريق المسلوك مادام هذا الطريق هو مغلق وبسيط والدالة تحليلية على مجال يحتويه.

مثال(14-2)

إحسب التكامل $\int_{C_1}^{z} \frac{dz}{z}$ حيث C_1 هو القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

الحل . الدالة $f(z)$ غير تحليلية عندما $z = 0$ لذلك من الممكن أن نختار C_2 هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 أي أن $C_2: |z| = 1$ وكما هو موضح بالشكل رقم(3)



شكل رقم (3)

وهنا يمكن ملاحظة ما يلي:

1. **المنحني C_2 يقع بأكمله داخل القطع الناقص C_1.**
2. **الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين C_2, C_1 .**
3. **الدالة $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقطة من نقاط C_2, C_1 .**

لذلك حسب النتيجة السابقة يكون لدينا

$$\int_{C_1}^{z} f(z)dz = \int_{C_2}^{z} f(z)dz$$

وبما أن $C_2: |z| = 1$ لذلك ليكن $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

فإن

$$\int_{C_2}^{z} f(z)dz = \int_{0}^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = \int_{0}^{2\pi} id\theta$$

$$(i\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

ومنه يكون

$$\int_{C_1}^{z} f(z)dz = 2\pi i$$

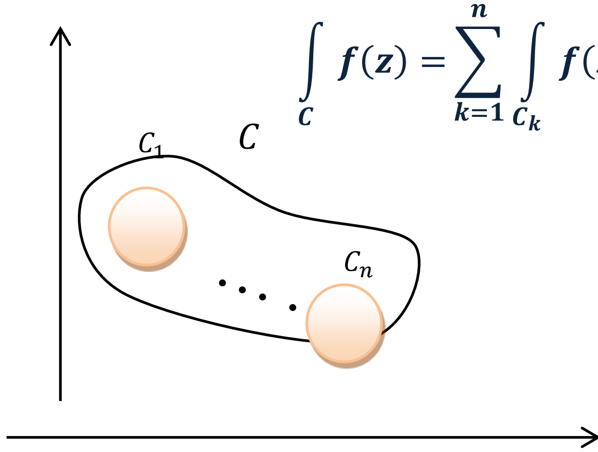
مثال(15-2)

. ليكن $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة الواقعة بين المنحنيات $C_1, \dots, C_n$ والمنحني C وبشترط ان تكون C_k , غير متقاطعة مع بعضها وجميعها منحنيات بسيطة مغلقة وكذلك حسب شكل $f(z)$ تحليليـــــــة على المنحنيات $(4)(k = 1, \dots, n)$

عندئذٍ يكون

$C_1, \dots, C_n$

$$\int_{C} f(z) = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$



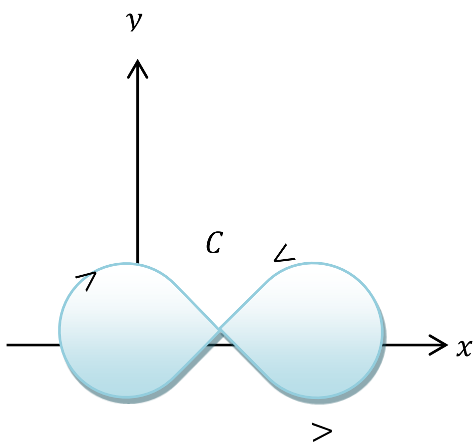
شكل رقم(4)

مثال (16-2)

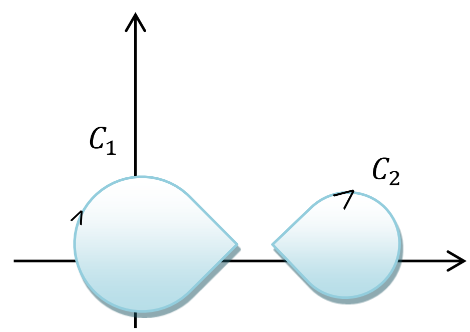
إثبت أن

$$\int_{c}^{z} \frac{z+3}{z^2-z} = 14\pi i$$

حيث C كانتور كما في الشكل(5-6)



شكل رقم (6)



شكل رقم (5)

الحل .

$$\int_{C}^{z} f(z)dz = -3\int_{C}^{z} \frac{1}{z}dz + 4\int_{C}^{z} \frac{1}{z-1}dz$$

لإيجاد التكامل الأول في الطرف الأيمن يكون

$$-3\int \frac{1}{z}dz = -3\int_{C_1}^{z} \frac{1}{z}dz + (-3)\int_{C_2}^{z} \frac{1}{z}dz = 3\int_{-C_1}^{z} \frac{1}{z}dz + 0 = 6\pi i$$

وبنفس الطريقة

$$4\int_{C}^{z} \frac{1}{z-1}dz = 4\int_{C_1}^{z} \frac{1}{z-1}dz + 4\int_{C_2}^{z} \frac{1}{z-1}dz = 0 + 8\pi i = 8\pi i$$

لذلك يكون الناتج

$$\int f(z)dz = 6\pi i + 8\pi i = 14\pi i$$

[9].(2-17) النظرية الأساسية في الجبر

ندعو الدالة التحليلي في جميع نقاط المستوى (المفتوح او المغلق) الدالة الكامل()

تقسم الدالة الكاملة إلى الدالة كاملة عادية، مثل كثيرة حدود والى دالة كاملة صماء
Sin z, conz ونبرهن على صحة نظرية هامة

كل معادلة متعددة الحدود لها معاملات ودرجات معقدة لها جذر مركب واحد على الأقل . تم إثبات هذه النظرية لأول مرة بواسطة غاوس. إنه يعادل العبارة التي تقول إن متعدد الحدود من الدرجة له قيم (بعضها ربما يتدهور) والتي . تسمى هذه القيم جذور متعددة الحدود .

(2-18)نظرية ليوفيل

نظرية ليوفيل (Liouvill's Theorem). إذا كانت الدالة f كلية ومقيدة فإن f دالة ثابتة .

البرهان . f دالة تحليلية ومقيدة بعدد حقيقي موجب M على المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وبواسطة متراجحة كوشي في حالة لتكن

$n = 1$ نستنتج أن $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ولكل $R > 0$

لندع $R \to \infty$ لذلك سنجد أن $f'(z) = 0$ لكل z وهذا يؤدي f دالة ثابتة.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = -\lambda w(x)y,$$

بالاعتماد على نظرية ليوفيل يمكننا الآن وبسهولة ، البرهان على صحة النظرية الأساسية في الجبر وهي:

(2-19)(Gauss نظرية غوص)

كل كثير حدود درجته اكبر من الصفر يملك ، على الأقل ، جذراً واحداً . البرهان . ليكن كثير الحدود

إذا لم يكن لكثير الحدود هذا أي جذر ، كان الدالة (2)/ تحليليا في جميع نقاط W(z) = a + a_1z+…+amzm, m>0

المستوي وبالتالي كاملاً . وهو محدود لأن :

$1/W(z) \quad 0.$

[11].(2-20) الدوال التوافقية

إذا كان له مشتقان (xإنه توافقي في النقطة (0 ,) Dالمعرف في المنطقة = (xتعريف . نقول عن الدالة ذي المتحولين (جزئيان مستمران من المرتبة الأولى والثانية في جوار ما لهذه النقطة وكان :

$$U_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

إذا كان D في كل نقطة من هذا الجوار. ونقول عن هذا الدالة إنه توافقي في المنطقة

توافقيا في كل نقطة من هذه المنطقة . تعرف المعادلة (13) بمعادلة لابلاس التفاضلية

Auويرمز لها اختصاراً بالرمز :$\Delta U=0$

المتحولين ، أحيانا بالكمون تلعب التوابع التوافقية دورا هاما في نظرية الكمون . لذلك تدعى الدالة التوافقية ذات اللوغاريتمي .

من التعريف ينتج مباشرة مايلي:

نتيجة (2-21)

أن كل دالة ثابت هو الدالة توافقي .

نتيجه(2-22)

توافقيا أيضا . an + b ثابتين كيفيين كان الدالة bو aإذا كان الدالة 4 توافقيا وكان

نتيجه (2-23)

$w=au+bu+c$ ثوابتاً كان الدالة c و b و a إذا كان 14 و 7 دوال توافقيين في منطقة مشتركة وكانت

توافقياً في هذه المنطقة

ليس بالتوافقي xy الدالة xy توافقي بينما مربعه (ليس من الضروري أن يكون جداء دوال توافقيين الدالة توافقيا فمثلاً
لأنه لا يحقق معادلة لابلاس

نظرية(2-24)

دالة توافقيا في هذه المنطقة. (x,y) كان قسمه الحقيقي (D إذا كان الدالة (2) تحليليا في المنطقة

$$f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$$

دالة تحليلياً في المنطقة لدينا بحسب قاعدة اشتقاق الدالة العقدي

$$f'(z)=ux+ivx,$$

$$f'(z)=(uy+ivy)$$

$$f''(z)=uxx+ivxx, f(2)=(xy + yy)$$

$$Uxx+ivxx -yy-iuyy$$

$$xx=-yy$$

$Uxx+4yy=0$

وبالمقارنة يكون

.D دالة توافقي في (x,y وهذا يعني أن معادلة لإبلاس التفاضلية محققة ولذلك :

بمحاكمة مشابهة يبرهن على صحة النظرية الآتية:

نظرية (2-25)
الدالة توافقي بينما xy ليس من الضروري أن يكون جداء الدوال توافقيين الدالة توافقيا فمثلاً

ليس بالتوافقي لأنه لا يحقق معادلة لابلاس (13) (xyمربعه)

كان قسمه الحقيقي (2) تابعا توافقيا في هذه المنطقة. D نظرية . إذا كان الدالة (2) تحليليا في المنطقة

$F(z) = u(x, y)+iv(x, y)$

الدالة تحليليا في المنطقة لدينا بحسب قاعدة اشتقاق الدالة العقدي

وبالمقارنة يكون

$F'(z)=ux+ivx \; f'(z)=(uy+ivy)$

$F''(z)=Uxx+iUxx, f(2)= (x + y)$

الدالة توافقي (x وهذا يعني أن معادلة لابلاس التفاضلية محققة ولذلك ($Uxx+ixx$ $-yy-yy$ $4xx+4yy = 0$ $Uxx=-yy$
بمحاكمة مشابهة يبرهن على صحة النظرية الآتية: .Dفي

كل دالة توافقي (في منطقة ما ، وحيدة الترابط، يصلح لأن يكون قسما حقيقيا لأحد الدالة التحليلية

مثال(26-2):اثبت ان الداله

$f(x,y) = e^x \cos y$ داله توافقيه

<u>البرهان</u>: بما ان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y + (-e^x \cos y) = 0$$

من الواضح ان المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة f مستمرة لأنها تركيب دالتين مستمرتين وبما ان الدالة f قد حققت معادلة لا بلاس

$\therefore$ f دالة توافقية.

التطبيقات العلمية

مثال (27-2)

اذا كانت $f(z) = u(x,y)iv(x,y)$ دالة تحليلية في المجال D وكانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لكل من v, u مستمرة فإن v, u دوال توافقية في D .

البرهان . بما أن $f(z)$ دالة تحليلية إذن تكون معادلتي كوشي-ريمان متحققة أي أن

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

فإذا قمنا باشتقاق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير x نحصل على

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx}$$

وبنفس الطريقة نشتق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير y لنحصل على

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}$$

وبما أن جميع المشتقات الجزئية v_{yx} , v_{xy} , u_{yx} , u_{xx} مستمرة , لذلك بإستخدام نظرية في التفاضل والتكامل للدوال

الحقيقية التي تتحدث عن تساوي المشتقات الجزئية , أي أن

$$u_{xy} = u_{yx}\,, \qquad v_{xy} = v_{yx}$$

لذلك ينبع من هذا أنه

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

وكذلك

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

وبهذا ينتهي البرهان.

مثال(2-28)

لتكن $f = u + iv$ واذا كانت u, v دوال توافقية في المجال D ومشتقاتهم الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق معادلتي كوشي-ريمان في D فإن v يسمى مرافق توافقي لـ u

مثال(2-33)

لتكن $u(x,y) = x^2 - y^2$ فإن $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ وعليه يكون u دالة توافقية وكذلك نجد أن $v(x,y) = 2xy$ هي أيضاً دالة توافقية وكذلك $u_x = v_y = 2x$ و $u_y = -v_x = 2y$ وبالتالي يكون v مرافق توافقي للدالة u والدالة $f(z)$ تعطى بالصورة الآتية

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

[10].نظريات(2-29) :

الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحليلية في المجال D إذا وفقط إذا كان v مرافق توافقي للدالة u.

البرهان . v مرافق توافقي للدالة u في المجال D , إذن باستخدام النظرية السابقة تكون f دالة تحليلية في D. إذا كان

ولبرهنة الإتجاه الثاني , إذا f دالة تحليلية في D إذن يكون v, u دوال توافقية حسب النظرية السابقة بالإضافة إلى كانت ذلك معادلتي كوشي-ريمان متحققة .

مثال (35-2)

إثبت أن الدالة الحقيقية $u(x,y) = ln(x^2+y^2)$. دالة توافقية لكل الأعداد z ما عدا $z=0$. ثم جد $f(z) = u+iv$

الحل . في البداية نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x,y)$ بالنسبة لكلا المتغيرين $y\,,x$ فيكون لدينا

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad , \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

وبالجمع نحصل على

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

إذن الدالة u دالة توافقية ,

ولإيجاد المرافق التوافقي لها , نفرض أن $v(x,y)$ هو المرافق التوافقي وعليه من معادلتي كوشي-ريمان نحصل على

$$u_x = v_y = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad (9)$$

$$u_y = -v_x$$

وبتكامل العلاقة (9) بالنسبة للمتغير y نحصل على

$$v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dy = 2\,tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير y.

لذلك يجب أن نجد قيمة $\varphi(x)$ وذلك باستخدام المعادلة الثانية من معادلتي كوشي-ريمان حيث أن

$$v_x(x,y) = \frac{2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)+\varphi'(x)$$

$$= \frac{2y}{x^2+y^2}+\varphi'(x)$$

ولكن

$$v_x = -u_y = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$

وبالمقارنة فإن قيمة $\varphi'(x) = 0$ لذلك تكون $\varphi(x)$ دالة ثابتة ولتكن قيمتها تساوي c

لذلك يكون المرافق v معرفة كالآتي

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

والدالة التحليلية المقابلة هي

$$f(z) = ln(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + c\right)$$

ولإيجادها بدلالة z نضع $y = 0$, $z = x$ نستنتج أن

$$f(z) = ln(z^2) + ic$$

وبصورة عامة لإيجاد المرافق التوافقي لأي دالة توافقية نستخدم النظرية القادمة .

نظريات (2-30)

نظرية: ليكن $u(x,y)$ دالة توافقية عند جوار النقطة التي مركزها (x,y) فإنه يوجد مرافق توافقي $v(x,y)$ معرف على هذا الجوار وأن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية .

البرهان . بما أن u, v دوال توافقية , إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

والآن نستطيع أن نجد المرافق التوافقي $v(x,y)$ بخطوتين رئيسيتين :

الخطوة الأولى , نكامل الدالة v_y والتي استنتجناها من u_x

نكاملها بالنسبة إلى y فيكون لدينا

$$v(x,y) = \int u_x(x,y)dy + c(x) \qquad (10)$$

حيث $c(x)$ دالة تعتمد على المتغير x فقط .

أما الخطوة الرئيسية الثانية فهي $c'(x)$ باشتقاق المعادلة (10) بالنسبة للمتغير x ونعوض قيمة v_x بقيمة $-u$ في إيجاد

الطرف الأيسر فنحصل على

$$-u(x,y) = \frac{d}{dx}\int u_x(x,y)dy + c'(x) \qquad (11)$$

وبما أن u دالة توافقية فإن جميع حدود (11) تحذف ما عدا الحدود التي تعتمد على المتغير x ثم نكامل الدالة $c'(x)$

ذات المتغير المفرد لإيجاد قيمة $c(x)$

(المرافق التوافقية).

وهذه الخطوات أساسية لإيجاد $v(x,y)$

مثال(2-31)جد مرافق توافقي

للدالة $v(x,y)$

نثبت أولا $u(x,y)$ دالة توافقية أي ان:-

الحل: $u_x = e^x \cos y$, $u_{xx} = e^x \cos y$, $u_y = -e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \cos y$

$$\therefore \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

باستخدام معادلتي كوشي – ريمان نحصل على:-

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$\therefore \quad V = \int v_y \, dy + \phi(x) = \int e^x \cos y dy + \phi(x) = e^x \int \cos y \, dy + \phi(x)$$

بأخذ التكامل بالنسبة لـــ y واعتبار x ثابتة

$$\therefore \quad v = e^x \sin y + \phi(x)$$

حيث ان $\phi(x)$ دالة اختيارية تعتمد على x فقط وقابلة للاشتقاق نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لـــ x بالنسبة لـــ x للمعادلة الأخيرة ونساوي الناتج مع $\frac{-\partial u}{\partial y}$ لأن $v_x = -u_y$ ينتج:

$$v_x = e^x \sin y + \phi'(x) = -u_y = -(e^x(-\sin y))$$

$$\therefore e^x \sin y + \phi'(x) = e^x \sin y$$

$$\therefore \phi'(x) = 0$$

$$\phi(x) = c_1$$

حيث c_1 ثابت معقد اختياري

$\therefore$ المرافق التوافقي هو $\qquad v = e^x \sin y + c_1$

وان الدالة

$$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + c_1)$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y) + i c_1$$

$$= e^x e^{iy} + c$$

$$= e^{x+iy} + c$$

المصادر

[1]. (وليام ر. دريك، كتاب التحليل المركب وتطبيقاته ،قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة الملك سعود ص. ب ٦٨٩٥٣ ـالرياض ١١٥٣٧،ترجمة سعدون إبراهيم عثمان ود .أبو بكر الصديق بيومي)

[2]. (د. احمد خالد العبد العالي ، التحليل المركب ،جامعة الملك فيصل كلية العلوم قسم الرياضيات والإحصاء)

[3].(الأستاذ محمود مسعود ،التحليل العقدي، المدرسة العليا للأساتذة)

[4].(د. حيدر مجيد ،تحليل الدوال المركبة، جامعة بغداد كلية التربيه للعلوم الصرفه قسم الفيزياء)

[5].(د. شحاده الاسدي، أسس التحليل العقدي(٦) و(٧) ،جامعة حلب، ١٩٨٨)

[6].(د. زكريا نوت، التحليل المركب (العقدي)،مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ٢٠١١م.)

[7]. (جامعة الانبار، مقالة حول الدالة التحليلية، موقع الجامعة)

[8].(الأستاذ محمود مسعود ،التحليل العقدي، المدرسة العليا للأساتذة)

[9].(د. حيدر مجيد ،تحليل الدوال المركبة، جامعة بغداد كلية التربيه للعلوم الصرفه قسم الفيزياء)

[10].(د.شحاده الاسدي، أسس التحليل العقدي(٦) و(٧) ،جامعة حلب، ١٩٨٨)

[11].(د. زكريا نوت، التحليل المركب (العقدي)،مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ٢٠١١م.)