حلول المعادلات غير الخطية Solutions of Non-Linear Equations

هناك العديد من المسائل التي تتطلب إيجاد بعض أو جميع جذور معادلة غير خطية. حيث بشكل عام، يمكن كتابة المعادلة التي تحتوي على متغير واحد بالشكل الآتي:

$$f(x) = 0$$

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة (x^*) بحيث تكون قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر.

حساب التقريبات الأولية لجذور المعادلة

سنستعرض أسلوبين لتعيين تقريبات أولية لمواضع الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x) = 0$ ، حيث (f) هي دالة حقيقية مستمرة.

أولاً: تعيين مواقع الجذور بالرسم البياني

إذا رسمنا مخطط الدالة $y = f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور (x) تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة وبالتالي يمكن اعتبار هذه القيم كتقريبات أولية للجذور.

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

حيث $f_1(x)$ و $f_2(x)$ هما دالتين يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن (x^*) تعتبر جذراً للمعادلة.

مثال 1/ استخدم طريقة الرسم البياني لتعيين مواقع جذور المعادلة الآتية:

$$e^x \sin(x) - 1 = 0$$

الحل/ يمكن إعادة كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة الآتية:

$$e^{-x} = \sin(x)$$

لذلك يمكن رسم هاتين الدالتين باستخدام برنامج الماتلاب لتحديد مواقع الجذور وكما يلي:

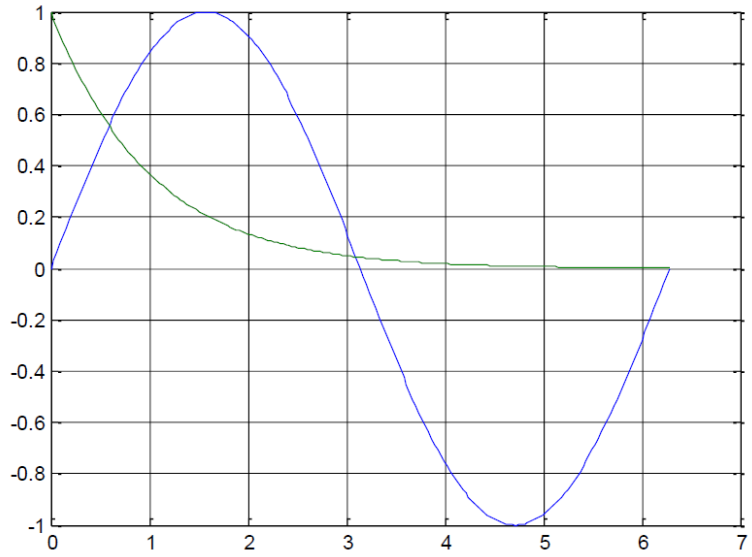
القيم التي يأخذها المتغير (x) من (0) إلى (2π) وبخطوة انتقال $(\frac{\pi}{100})$

```
1- x=0:pi/100:2*pi;
2- y=sin(x);
3- z=exp(-x);
4- plot(x, y, x, z)
5- grid
6- shg
```

ملاحظات

- وضعت الفارزة المنقوطة حتى لا تظهر قيمة الدالة في شاشة النتائج
- يجب أن تكون أسماء الدوال والإيعازات بالحروف الصغيرة
- plot: هي دالة في برنامج الماتلاب تستخدم لرسم الدوال
- grid: هي دالة في برنامج الماتلاب تستخدم لإضافة الشبكة للرسم البياني

بعد الضغط على خيار (Run) في الماتلاب سوف يتم تنفيذ البرنامج ويظهر الرسم بالشكل الآتي:



من الشكل الناتج سوف نلاحظ وجود تقاطع بين الدالتين الأول عند $(x = 0.6)$ والثاني عند $(x = 3.1)$ ويوجد عدد لا نهائي من التقاطعات الأخرى.

ثانياً: تعيين مواقع الجذور بطريقة مبرمجة

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

فإذا كانت قيمة $f(x_i).f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين (x_i) و (x_{i+1}).

مثال/2 استخدم الطريقة المبرمجة لتعيين مواقع الجذور في الفترة $[-8, 8]$ للمعادلة الآتية:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$$

الحل/ إذا أخذنا فترة تقسيم (h) مساوية إلى (4) فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
$f(x)$	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط، الجذر الأول واقع في الفترة $[-4, 0]$ والجذر الثاني واقع في الفترة $[4, 8]$.

أما إذا أخذنا فترة تقسيم (h) مساوية إلى (4) فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	+	+	+	+	-	+	-	+	+

هذا يعني إن هناك جذوراً في الفترات الآتية: $[-2, 0], [0, 2], [2, 4], [4, 6]$.

طريقة تنصيف الفترات Bisection Method

لنفرض أنه يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[a, b]$ أي أن:

$$f(a).f(b) < 0$$

في هذه الطريقة نحسب قيمة الدالة $f(x_i)$ في نقطة تقع في منتصف الفترة بين (a) و (b) كما في الشكل الآتي:

فإذا كانت إشارتها تختلف عن إشارة $f(a)$ فإن الجذر يقع بين (a) والمنتصف (x_i). أما إذا تشابهت الإشارتان فإنها بالتأكيد ستكون مختلفة عن إشارة $f(b)$ وعليه يكون الجذر واقعاً بين المنتصف (x_i) و (b) ويمكن تكرار هذه العملية عدة مرات للحصول على فترة ضيقة حول الجذر المطلوب.

خوارزمية طريقة تنصيف الفترات Algorithm of Bisection Method

لتكن f هي دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وبخطأ مقداره (ε) علماً أن $(a < b)$ لذلك فأن خطوات الخوارزمية سوف تكون كالآتي:

1) يجب أن يتحقق الشرط الآتي: $f(a).f(b) < 0$

أذا تحقق الشرط أعلاه هذا يعني يوجد جذر واحد على الأقل في الفترة $[a, b]$.

2) نستخرج الجذر المطلوب من خلال تطبيق قانون تنصيف الفترة كالآتي:

$$x_i = \frac{a+b}{2}$$

حيث أن $i = 1, 2, 3, \ldots$، و x_i: هو الجذر المطلوب الذي يقع في منتصف الفترة $[a, b]$.

3) نستخرج صورة الجذر (x_i) أي أن $f(x) = f(x_i)$

4) بعد استخراج كل من $f(x_i)$ و $f(a)$. سوف يكون لدينا ثلاث حالات هي كالآتي:

الحالة الأولى: إذا كان لدينا $f(a).f(x_i) = 0$

حيث أن $f(a) \neq 0$ هذا يعني أن $f(x_i) = 0$ لذلك فأن $(x_i = root)$ هو الجذر المطلوب.

الحالة الثانية: إذا كان لدينا $f(a).f(x_i) > 0$

هذا يعني أن إشارة كل $f(a)$ و $f(x_i)$ متشابهتان لذلك فأن:

$$a = x_i = root$$

لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[x_i, b]$ هذا يعني أن الجذر المطلوب يقع بالجزء الثاني من الفترة $[a, b]$

الحالة الثالثة: إذا كان لدينا $f(a).f(x_i) < 0$

هذا يعني أن إشارة كل $f(a)$ و $f(x_i)$ مختلفتان لذلك فأن:

$$b = x_i = root$$

لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[a, x_i]$ هذا يعني أن الجذر المطلوب يقع بالجزء الأول من الفترة $[a, b]$.

بتكرار الخطوات أعلاه نحصل على متتابعة من الفترات $[a, b]$ التي تحتوي على جذر المعادلة وتكون أطوالها أصغر كلما زادت قيمة (i).

5) **شروط التوقف**: بما أن المطلوب إيجاد قيمة تقريبية للجذر لا يتجاوز الخطأ فيها عن (ε)، لذلك نتوقف عندما يتحقق واحد من الشروط الثلاثة الآتية:

a) $|f(x_i)| \leq \varepsilon$

b) $|b_i - a_i| < \varepsilon$

c) $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$

ملاحظة/ الشروط الثلاثة أعلاه لا تطبق في الحالة الأولى أي عندما $f(a).f(x_i) = 0$

مثال3/ باستخدام طريقة تنصيف الفترات جد جذر المعادلة الآتية:

$$f(x) = x * log\,(x) - 1 = 0$$

خلال الفترة $[1, 3]$ وبخطأ مقداره $(\varepsilon = 0.006)$

الحل/ من السؤال $\therefore a = 1\ and\ b = 3$

$$f(a) = a * log\,(a) - 1$$

$$f(1) = 1 * log\ 1 - 1 = -1$$

$$f(b) = blog(b) - 1$$

$$f(3) = 3 * log\ 3 - 1 = 0.4314$$

1) $f(a) * f(b) = -1 * 0.4314 = -0.4314 < 0$
2) $x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$
3) $f(x_1) = f(2) = 2 * \log(2) - 1 = -0.3979$
4) $f(a) * f(x_i) = f(a) * f(x_1) = (-1) * (-0.3979) = 0.3979 > 0$

هذا يعني $a = x_1 = 2$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[2, 3]$.

5) نطبق شروط التوقف الثلاثة

$$|f(x_i)| = |f(x_1)| = |-0.3979| = 0.3979 > \varepsilon$$

بما أن شروط التوقف لم تتحقق لذلك نعيد تطبيق الخطوات من 2 الى 5

$$x_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$f(x_2) = f(2.5) = 2.5 * \log(2.5) - 1 = -0.0051$$

$$f(a) * f(x_i) = f(a) * f(x_2) = (-0.3979) * (-0.0051) = 0.00202929 > 0$$

هذا يعني $a = x_2 = 2.5$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[2.5, 3]$.

الآن نطبق شروط التوقف الثلاثة كالآتي:

$$|f(x_i)| = |f(x_2)| = |-0.0051| = 0.0051 < \varepsilon$$

هذا يعني أن $0.0051 < 0.006$

أي أن شرط التوقف تتحقق لذلك فأن جذر المعادلة هو $x_2 = 2.5$

مثال4/ أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$ بطريقة التنصيف وبخطأ $(\varepsilon = 0.05)$؟

الحل/ لم يذكر في السؤال الفترة لذلك نستخرج بالبداية الفترة من خلال التخمين وتغير الإشارة كالآتي:

x	$f(x)$ **إشارة الدالة**
-2	+
-1	+
0	+
1	-
2	-

بما أن التغير في شارة الدالة حدث بين (0) و (1) لذلك فأن الفترة هي $[0, 1]$ وهذا يعني أن $(a = 0$ و $b = 1)$

$$f(x) = x^3 - 9x + 1$$

1) $f(a) = a^3 - 9 * a + 1$

$$f(0) = (0)^3 - 9 * 0 + 1 = 1$$

$$f(b) = b^3 - 9 * b + 1$$

$$f(1) = (1)^3 - 9 * 1 + 1 = -7$$

2) $f(a).f(b) = 1 * (-7) = -7 < 0$

3) $x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$

4) $f(x_1) = f(0.5) = (0.5)^3 - 9 * 0.5 + 1 = -3.375$

5) $f(a).f(x_i) = f(a).f(x_1) = 1 * (-3.375) = -3.375 < 0$

6) نطبق شروط التوقف الثلاثة

$$|f(x_i)| = |f(x_1)| = |-3.375| = 3.375 > \varepsilon$$

هذا يعني $b = x_1 = 0.5$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[0, 0.5]$.

$$x_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$$

$$f(x_2) = f(0.25) = (0.25)^3 - 9 * 0.25 + 1 = -1.2344$$

$$f(a).f(x_i) = f(a).f(x_2) = 1 * (-1.2344) = -1.2344 < 0$$

$$|f(x_i)| = |f(x_2)| = |-1.234375| = 1.234375 > \varepsilon$$

هذا يعني $b = x_2 = 0.25$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[0, 0.25]$.

$$x_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.25}{2} = 0.125$$

$$\boldsymbol{f}(x_3) = \boldsymbol{f}(0.125) = (0.125)^3 - 9 * 0.125 + 1 = -0.1230$$

$$f(a).f(\boldsymbol{x_i}) = f(a).f(\boldsymbol{x_3}) = 1 * (-0.1230) = -0.1230 < 0$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_3})| = |-0.1230| = 0.1230 > \boldsymbol{\varepsilon}$$

هذا يعني $b = \boldsymbol{x_3} = 0.125$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[\mathbf{0}, \mathbf{0.125}]$.

$$x_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0.125}{2} = 0.0625$$

$$\boldsymbol{f}(x_4) = \boldsymbol{f}(0.0625) = (0.0625)^3 - 9 * 0.0625 + 1 = 0.4377$$

$$f(a).f(\boldsymbol{x_i}) = f(a).f(x_4) = 1 * (0.4377) = 0.4377 > 0$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})| = |\boldsymbol{f}(x_4)| = |0.4377| = 0.4377 > \boldsymbol{\varepsilon}$$

هذا يعني $a = x_4 = 0.0625$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[\mathbf{0.0625}, \mathbf{0.125}]$.

$$x_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.0625+0.125}{2} = 0.09375$$

$$\boldsymbol{f}(x_5) = \boldsymbol{f}(0.09375) = (0.09375)^3 - 9 * 0.09375 + 1 = 0.1571$$

$$f(a).f(\boldsymbol{x_i}) = f(a).f(x_5) = (0.4377) * (0.1571) = 0.0688 > 0$$

هذا يعني $a = x_5 = 0.09375$ لذلك سوف تكون لدينا فترة جديدة هي $[\mathbf{0.09375}, \mathbf{0.125}]$.

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})| = |\boldsymbol{f}(x_5)| = |0.4377| = 0.4377 > \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$|b-a| = |0.125 - 0.09375| = 0.03125 < \boldsymbol{\varepsilon}$$

هذا يعني أن $0.03125 < \mathbf{0.05}$

أي أن شرط التوقف تتحقق لذلك فأن جذر المعادلة هو $\boldsymbol{x_5 = 0.09375}$

واجبات

س1/ عين مواقع الجذور للمعادلة الآتية $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x - 4 = 0}$ بطريقة التنصيف على الفترة $[\mathbf{1}, \mathbf{3}]$ وبخطأ مقداره $\boldsymbol{\varepsilon = 0.04}$؟

س2/ أوجد جذر المعادلة الآتية $\boldsymbol{f(x) = x^2 + \sin(x) - 4 = 0}$ وبخطأ مقداره $\boldsymbol{\varepsilon = 0.6}$؟