# المحاضرة الثامنة

## Harmonic conjugate                    المرافق التوافقي

Let $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ analytic then $V(x,y)$ Harmonic conjugate of $U(x,y)$

**Solution steps**

**هذه الخطوات إذا كان الجزء الحقيقي معلوم**

1.$u_{xx} + u_{yy} = 0$ is harmonic                    نثبت الدالة توافقية

2. $v_y = u_x$ Integration respect of $y$ and addition function of $x$ for example $h(x)$

3. Differential of $x$

4. $v_x = -u_y$ We substitute and then we find $h'(x)$

5. Integration $h'(x)$ and substitute in (*)

6. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

**خطوات الحل**

1. نثبت الدالة توافقية بتطبيق شروط الدالة التوافقية

2. بعد مساوات $v_y = u_x$ نكامل ( $u_x$ ) بالنسبة الى $y$ فتنتج دالة اختيارية بالنسبة الى $x$ ولتكن $h(x)$

3. نشتق بالنسبة الى $x$ فتصبح الدالة $v_x$ ستظهر $h'(x)$

4. بعد مساوات $v_x = -u_y$ نجد $h'(x)$

5. بعد تكامل $h'(x)$

6. نكتب الدالة الجديدة

**Ex.** Constrict an analytic function where real part is $u(x,y) = e^y sinx$

انشا دالة تحليلية يكون الجزء الحقيقي $u(x,y) = e^y sinx$

or

**Ex.** Find a harmonic conjugate of the function. $u(x,y) = e^y sinx$

اوجد المرافق التوافقي للدالة $u(x,y) = e^y sinx$

**Sol. 1**) $\boldsymbol{u_x} = e^y cosx \implies$ 1. نثبت ان الدالة توافقية

$u_{xx} = -e^y sinx$

$\boldsymbol{u_y} = e^y sinx$

$u_{yy} = e^y sinx$

$$-e^y sinx + e^y sinx = 0$$

$$\therefore f \ is \ harmonic \ function$$

2) $v_y = u_x = e^y cosx$ (Where $v_y$ not exists but $u_x$ exists)

$$\int v_y = \int (e^y cosx)\, dy$$

*عندما نكامل للمتغير y تظهر دالة اختيارية للمتغير x وبالعكس*

$$v = e^y cosx + h(x) ------- *$$

3. نشتق بالنسبة الى x

3) $v_x = -e^y sinx + h'(x)$

ولإيجاد $h'(x)$ والتي هي الجزء الثاني من معادلتي كوشي ريمان

4) $v_x = -u_y \implies -e^y sinx + h'(x) = -e^y sinx$

$h'(x) = 0$

5. نكامل بالنسبة الى x للتخلص من المشتقة الموجودة في الدالة الاختيارية

5) $\int h'(x) = \int 0\, dx \Longrightarrow h(x) = 0 + c \Longrightarrow h(x) = c$ Substitute in * نعوض في

$$v = e^y cosx + c$$

6) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z) = e^y sinx + i(e^y cosx + c)$

**Ex.** Find out the analytic function having the real part as $u(x,y) = 2x(1-y)$

**Sol.**

1) $u_x = 2(1-y) \Longrightarrow u_{xx} = 0$

$u_y = -2x \Longrightarrow u_{yy} = 0$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\therefore f \ is \ harmonic \ function$$

2) $v_y = u_x \Longrightarrow v_y = 2 - 2y \ \therefore v = \int (2-2y)\, dy + h(x) \Longrightarrow v = 2y - y^2 + h(x) \ldots\ldots *$

3) $v_x = h'(x)$

4) $v_x = -u_y \Longrightarrow h'(x) = 2x$

5) $\int h'(x)dx = \int 2xdx \Longrightarrow h(x) = x^2 + c$ Substitute in *

$$v = 2y - y^2 + x^2 + c$$

6) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Longrightarrow f(z) = 2x(1-y) + i(2y - y^2 + x^2 + c)$

H.w. Find a harmonic conjugate of the function. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$