Eigen Values and Eigen Vectors

شرح بسيط للقيم الذاتية Eigenvalues والمتجهات الذاتيه Eigenvectors

قوانين الحل :

القانون العام $A_x = \lambda_x$

قانون لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalues

$$|A - \lambda I| = 0$$

أو

$$|\lambda I - A| = 0$$

قانون لإيجاد المتجهات الذاتيه Eigenvectors

$$|A - \lambda I|x = 0$$

❖ Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalue:

1- لإيجاد دلتا مع I λ

I تعني المتطابقة Identity

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda I = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

لتوضيح حل المحددة :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a * d) - (b * c)$$

مع الانتباه للإشارات

نحول المصفوفة الى المحددة وتسمى المعادلة المميزة

Characteristic Equation

$$\begin{vmatrix} \lambda -5 & 3 \\ 6 & \lambda -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda -5)(\lambda -2) - (6)(3)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 5\lambda + 10 - 18$$

طريقة حل المعادلة البحث عن عددين ضربهما هو -8 ومجموعهما -7 ناتج العددين هما +1 و -8

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 8$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$$

المعادلة المميزة

Characteristic Equation

$$(\lambda + 1)(\lambda - 8) = 0$$

$$(\lambda + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$(\lambda - 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = +8$$

The eigenvalues are $\lambda = -1$ *or* $\lambda = 8$

Eigenvectors قانون لإيجاد المتجهات الذاتيه

$$|\lambda I - A| x = 0$$

Put $\lambda = -1$

نأخذ القيمة $\lambda = -1$ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نعوض بدل الدلتا -1

$$\begin{pmatrix} (-1) - 5 & 3 \\ 6 & (-1) - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$-6x_1 + 3x_2 = 0$$

$$-6x_1 = -3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات x_1 بأي رقم ماعدا 0

$$x_1 = 1$$

$$(-6)(1) = -3x_2$$

بقسمة الطرفين على -3

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-3x_2}{-3}$$

$$x_2 = 2$$

An eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

نأخذ القيمة الذاتية 8 = λ لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

Put $\lambda = 8$

$$|\lambda I - A|x = 0$$

نعوض بدل الدلتا 8

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 6 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 - 5 & 3 \\ 6 & 8 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 = -3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات x_2 بأي رقم ماعدا 0

$$x_2 = -1$$

$$3x_1 = -3(1)$$

بقسمة الطرفين على 3

$$\frac{3x_1}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x_1 = 1$$

An eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

❖ Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - (2)(1)$$

Expanding:

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Set the determinant to zero to find λ:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Factorize:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Thus, the eigenvalues are:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

For $\lambda_1 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Solve $(A - 5I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This gives the system of equations:

$$-x + y = 0 \quad (1)$$

$$2x - 2y = 0 \quad (2)$$

From equation (1):

Thus an eigen vectors for $\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$ is

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

For $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solve $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This gives the system of equations:

$$2x + y = 0 \quad (1)$$

$$2x + y = 0 \quad (2) \quad \text{(redundant, same as above)}$$

From equation (1):

$$y = -2x$$

Thus an eigen vectors for $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$ is

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$