Eigen Values and Eigen Vectors

شرح بسيط للقيم الذاتية Eigenvalues والمتجهات الذاتيه Eigenvectors

$$A_x = \searrow_x$$
 القانون العام :

قانون لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalues

$$|A - \times I| = 0$$

$$\int_{\mathcal{I}} |A - A| = 0$$

قانون لإيجاد المتجهات الذاتية Eigenvectors

$$|A - \times I| x = 0$$

Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

 λ I لإيجاد دلتا مع 1

خطوات الحل لإيجاد القيمة الذاتية Eigenvalue:

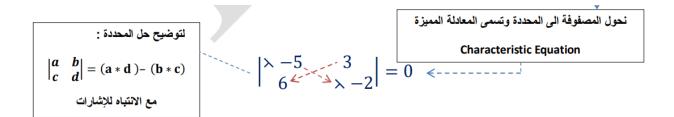
Identity تعني المتطابقة
$$I$$
 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} | \times I - A | = 0 \\ | \times I = \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}$$

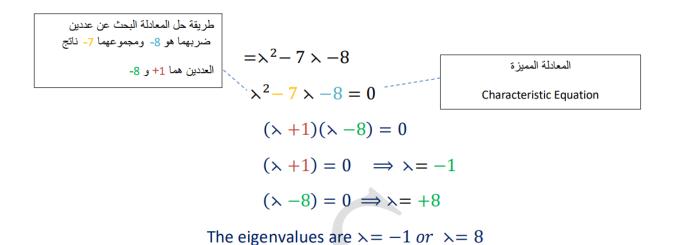
$$\begin{bmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times -5 & 3 \\ 6 & \times -2 \end{bmatrix}$$

Linear Algabra

Dr. Samah Alhashime – 5th Lecture



$$= (\lambda -5)(\lambda -2) - (6)(3)$$
$$= \lambda^2 - 2 \lambda -5 \lambda +10 - 18$$



قانون لإيجاد المتجهات الذاتية Eigenvectors

$$|x| - A|x = 0$$

Put $\lambda = -1$

نأخذ القيمة 1-= لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة :

Linear Algabra

Dr. Samah Alhashime – 5th Lecture

نأخذ القيمة الذاتية 8 = < لإيجاد المتجهات الذاتية لهذه النقطة:

Put $\lambda = 8$

$$|\lambda I - A| x = 0$$
 $(\lambda - 5 \quad 3 \atop 6 \quad \lambda - 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 8 نعوض بدل الدلقا

$$\binom{8-5}{6} \quad \frac{3}{8-2} \binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

 $3 \chi_2$ نقل $3 \chi_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 = -3x_2$$

نعوض في أحد المتغيرات χ_2 بأي رقم ماعدا 0

$$x_2 = -1$$

$$3x_1 = -3(1)$$

$$\frac{3x_1}{3} = \frac{-3}{3}$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x_1 = 1$$

An eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

❖ Find Eigenvalues and Eigenvectors of a 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - (2)(1)$$

Expanding:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Set the determinant to zero to find λ :

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Factorize:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Thus, the eigenvalues are:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

For $\lambda_1 = 5$:

$$A-5I=egin{bmatrix} 4-5 & 1 \ 2 & 3-5 \end{bmatrix}=egin{bmatrix} -1 & 1 \ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Solve $(A - 5I)\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This gives the system of equations:

$$-x + y = 0 \quad (1)$$

$$2x - 2y = 0 \quad (2)$$

From equation (1):

Thus an eigen vectors for $\lambda_1 = 5$ is

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_2 = 2$:

$$A-2I=egin{bmatrix} 4-2 & 1 \ 2 & 3-2 \end{bmatrix}=egin{bmatrix} 2 & 1 \ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solve $(A-2I)\mathbf{v}=0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This gives the system of equations:

$$2x + y = 0 \quad (1)$$

$$2x+y=0 \quad (2) \quad ({\rm redundant, \, same \, as \, above})$$

From equation (1):

$$y = -2x$$

Thus an eigen vectors for $\lambda_2 = 5$ is

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$