7-3 سريان التيار في دائرة حثية (دائرة RL) Current in an inductance circuit

اذا كانت الدائرة تحتوي على ملف له حث ذاتي L، ومقاومة R فإن المجال المغناطيسي الذي ينشأ في الملف كما في الشكل 11، ينمو مع التيار ومن ثم تتولد قوة دافعة كهربائية مضادة تتوقف قيمتها على معامل الحث الذاتي ومعدل نمو التيار $\frac{dI}{dt}$ ، حيث I قيمة التيار المار في الدائرة عند اللحظة t اعتبارا من وقت قفل الدائرة. ويجب أن يكون للجهد ε في هذه الحالة مركبتان، إحداهما للتغلب على هبوط الجهد IR في المقاومة والأخرى لموازنة القوة الدافعة الكهربائية المضادة $L\frac{dI}{dt}$. ومن ثم فان معادلة توزيع الجهد هي:

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{26}$$

الحل الرياضي للمعادلة 26 يمثل التيار في الدائرة كدالة للزمن. لإيجاد الحل نفرض ان $x = (\varepsilon/R) - I$ ، لذلك $dx=-dI$. بهذا التعويض المعادلة 26 تصبح كالتالي:

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

بإعادة ترتيب وتكامل المعادلة الأخيرة ينتج ان:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \qquad \Longrightarrow \qquad ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}\,t$$

حيث ان x_0 هي قيمة x_0 عند t=0. وبأخذ اللوغاريتم لهذه النتيجة ينتج:

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

وبما ان I=0 عند t=0. لذلك يمكن كتابة المعادلة الأخيرة كالتالي:

$$\frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \tag{27}$$

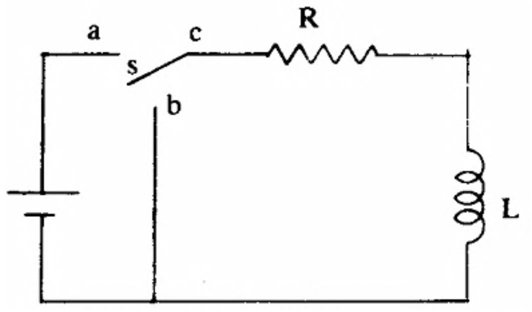
تبين المعادلة 27 كيف ان المحث يؤثر في التيار، حيث ان التيار يزداد بصورة أسيه. عند إزالة (استبعاد) المحث من الدائرة وهذا يستلزم وضع L مساوياً للصفر، ولذلك تصبح قيمة الحد الأسي صفر، وبهذا فان التيار سوف لا يعتمد على الزمن، أي ان التيار سوف يصل إلى قيمته الثابتة النهائية بغياب المحث.

ويمكن كتابة المعادلة 27 (معادلة نمو التيار) بصورة أخرى كالتالي:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (28)$$

حيث ان τ هي ثابت الزمن **(time constant)** لدائرة RL، أي ان:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (29)$$

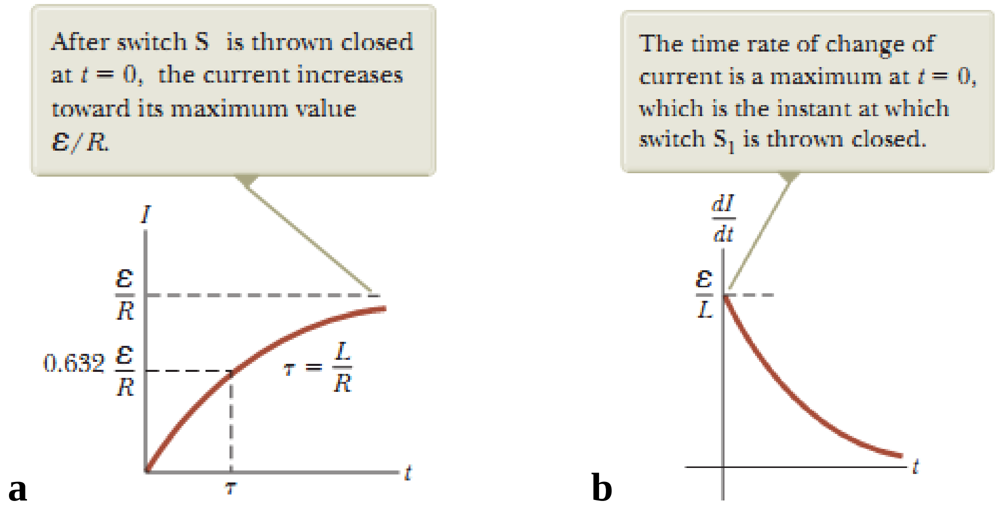


الشكل (12): دائرة تحتوي على ملف L ومقاومة R.

واذا عوض في المعادلة 28 بالقيمة $t = L/R$ يُحصل على قيمة التيار بعد زمن مقدارة L/R وتكون قيمة التيار المطلوبة هي:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = 0.632\frac{\varepsilon}{R}$$

ويعرف ثابت الزمن عندئذ بانه الزمن الذي يستغرقه التيار لكي يصل إلى 0.632 من قيمته النهائية الثابتة.



الشكل (13):(a) العلاقة بين التيار المار في الدائرة شكل 12 والزمن حسب العلاقة 28، (b) العلاقة بين المعدل الزمني لتغير التيار $\frac{dI}{dt}$ والزمن.

الشكل **13a** يمثل العلاقة بين التيار المار في الدائرة شكل 12والزمن حسب العلاقة 28، ويلاحظ ان القيمة الثابتة للتيار التي تحدث في زمن مقداره ما لانهاية أي t=∞ هي ε/R. هذا يمكن

ان يلاحظ من وضع $\frac{dI}{dt}$ مساوية للصفر في المعادلة 26 وإيجاد قيمة التيار (عند الاستقرار يكون التغير في التيار صفر) لذلك يزداد التيار الابتدائي بسرعة وصولا إلى قيمته الثابتة(ε/R) عندما تصل قيمة الزمن للصفر.

بمفاضلة المعادلة 28 بالنسبة للزمن للحصول على معدل تغير التيار يمكن الحصول على:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-t/\tau} \qquad (29)$$

أي ان المعدل الزمني لتغير التيار يصل إلى اعظم قيمة عند الزمن صفر ويصل للصفر عند زمن مقداره ما لانهاية كما في الشكل 13b.

بفرض انه بعد وصول التيار إلى قيمته الثابتة النهائية (ε/R) فتح المفتاح s كما في الشكل 12 من النقطة a إلى النقطة b، أي ان القوة الدافعة للبطارية أصبحت مستبعدة وبذلك تؤول المعادلة 26 إلى:

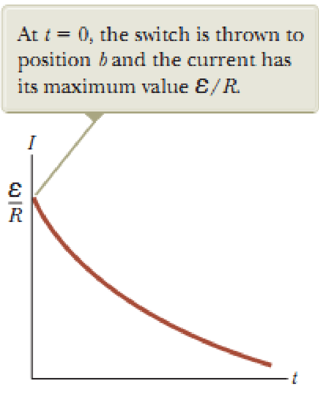
$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (30)$$

وبحل المعادلة التفاضلية 30 ينتج ان:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \qquad (31)$$

حيث ان ε هي القوة الدافعة للبطارية، و $I_i = \varepsilon/R$ هو التيار الابتدائي لحظة وجود يكون المفتاح عند النقطة b. والمعادلة 31 تمثل معادلة اضمحلال التيار في دائرة RL.

اذا كانت الدائرة لا تحتوي على محث، فان التيار يتناقص بسرعة للصفر عند أزاله البطارية. أما في حالة وجود المحث فانة يعاكس التناقص في التيار ويسبب تناقص التيار بشكل أسي والشكل 14 يوضح العلاقة بين التيار والزمن حيث يبين ان التيار يتناقص باستمرار مع الزمن.

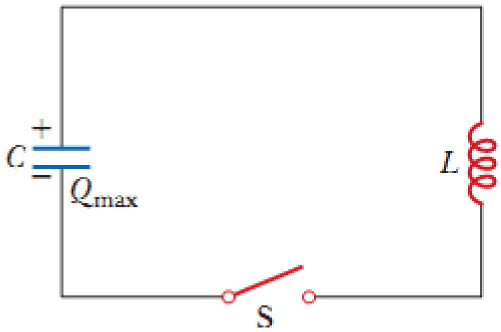


الشكل (14): العلاقة بين التيار والزمن.

8-3 التذبذبات في دائرة تحتوي على ملف ومكثف Oscillations in an LC circuit

عند توصيل مكثف مشحون بملف كما في الشكل 15 فإن الدائرة تسمى بدائرة LC. عند شحن المكثف وإغلاق المفتاح S فإن كلا من التيار في الدائرة والشحنة في المكثف يتذبذبان بين اعظم قيمة موجبة وسالبة. لنناقش ما يحدث في الدائرة وكما يلي:

1. على فرض ان الشحنة الكلية على المكثف في البداية تكون اكبر ما يمكن وتساوي Q_{max}. و هذا يعني ان طاقة مخزنة U في المكثف وتساوي $Q^2_{max}/2C$. عند هذا الزمن فإن التيار في الدائرة يساوي صفر، ولذلك لا توجد طاقة مخزنة في الملف.



الشكل (15): دائرة LC.

2. عند إغلاق المفتاح S يبدأ المكثف في تفريغ شحنته وتنتقل الشحنة في صورة تيار كهربائي إلى الملف وبهذا تقل الطاقة المختزنة في المكثف (في صورة مجال كهربائي) وتزداد الطاقة المخزنة في الملف الحلزوني (في صورة مجال مغناطيسي).
3. يستمر انتقال الطاقة من المكثف إلى الملف إلى أن يفقد المكثف شحنته وتصبح الطاقة بالكامل مخزنة في الملف الحلزوني.
4. تتكرر العملية السابقة ولكن في الاتجاه المعاكس وتستمر حتى تنتقل الطاقة من الملف إلى المكثف و هكذا....

تناظر هذه العملية حركة الكتلة المثبتة بزنبرك على سطح أفقي عديم الاحتكاك.

	في حالة المكثف و الملف	في حالة الكتلة و الزنبرك
طاقة الموضع (الكامنة)	$U = \frac{Q^2_{max}}{2C}$	$U = \frac{1}{2}kx^2$
الطاقة الحركية	$K = \frac{1}{2}LI^2$	$K = \frac{1}{2}mv^2$

باستعمال مبدأ حفظ الطاقة يمكن دراسة هذه الظاهرة عند أي زمن t وإيجاد علاقة بين شحنة المكثف والتيار في الملف، علما بأن الطاقة الابتدائية هي U وهذه الطاقة تبقى ثابتة (المقاومة مهملة) ولكن تتوزع على صورة طاقة حركية و طاقة كامنة.

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \qquad (32)$$

بوضع $dU/dt = 0$ وإجراء عملية التفاضل للمعادلة 32 بالنسبة للزمن مع الأخذ بنظر الاعتبار ان I و Q تتغير مع الزمن على ما يلي:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + \mathrm{LI}\frac{dI}{dt} = 0$$

بالتعويض عن التيار في المعادلة $I = \frac{dQ}{dt}$ وذلك لتبسيط المعادلة وجعلها في متغير واحد فقط

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}\,Q \qquad (33)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية وهي نفس صورة معادلة الحركة التوافقية البسيطة للكتلة المثبتة في زنبرك. المعادلة 32 لها حل يعطى بالمعادلة التالية:

$$Q = Q_{max}\cos(\omega t + \phi) \qquad (34)$$

حيث ان Q_{max} هي القيمة العظمى لشحنة المكثف و ω هو التردد الزاوي ويساوي:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (35)$$

وهذا يشير إلى أن التردد الزاوي يعتمد على كلا من سعة المكثف والحث الذاتي للملف.

أما التيار المار في الدائرة والناتج من انتقال الطاقة بين المكثف والملف فيمكن إيجاده بإجراء التفاضل للمعادلة 34 بالنسبة للزمن:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega\, Q_{max}\sin(\omega t + \phi) \qquad (36)$$

ويمكن إيجاد زاوي الطور (the phase angle) ϕ كما يلي، عند الزمن t=0 فإن التيار يساوي صفر، أي ان:

$$0 = -\omega\, Q_{max}\sin\phi \qquad (37)$$

هذا يعني ان $\phi = 0$ وعليه يمكن التعبير عن التغير في كلاً من الشحنة والتيار مع الزمن من خلال المعادلتين التاليتين:

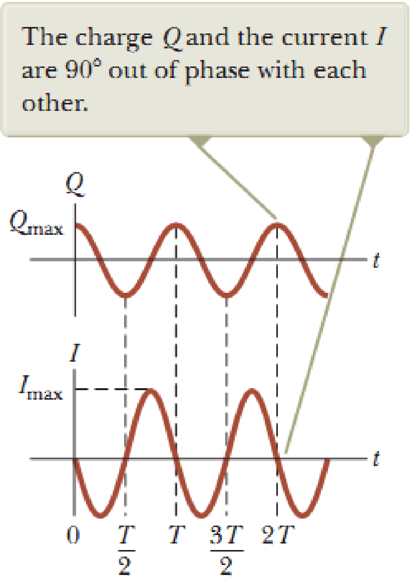
$$Q = Q_{max}\cos\omega t \qquad (38)$$

$$I = -\omega\, Q_{max}\sin\omega t = -I_{max}\sin\omega t \qquad (39)$$

يبين الشكل 16علاقة الشحنة Q مع الزمن t وعلاقة التيار I مع الزمن t، ويلاحظ أن الشحنة تتذبذب بين القيمة Q_{max} والقيمة $-Q_{max}$ والتيار يتذبذب بين القيمة I_{max} والقيمة $-I_{max}$ ، ولكن التيار يختلف في الطور مع الشحنة بزاوية قدرها 90 درجة، أي أن عندما تكون الشحنة قيمة عظمى يكون التيار صفراً وعندما تكون الشحنة صفراً يكون التيار قيمة عظمى.

بالتعويض عن كلا من الشحة والتيار في المعادلة 32 نحصل على المعادلة التالية:

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_{max}^2}{2C} cos^2 \omega t + \frac{1}{2} L I_{max}^2 \sin^2 \omega t \qquad (40)$$



الشكل (16): يبين علاقة الشحنة مع الزمن وعلاقة التيار مع الزمن

تصف معادلة الطاقة الكلية ماذا يحدث للشحنة والتيار كدالة في الزمن وبالرسم البياني لعلاقة كلاً من الطاقة المختزنة في المكثف والطاقة المختزنة في الملف مع الزمن نستنتج أن عندما تكون الطاقة المختزنة في المكثف أكبر ما يمكن تكون قيمة الطاقة المختزنة في الملف تساوي صفر والعكس صحيح. ولكن عند أي زمن t فإن الطاقة الكلية تبقى ثابتة وتساوي مجموع الطاقتين. وحيث أنه عند القيمة العظمى للشحنة والقيمة العظمى للتيار تكون الطاقتين متساويتين وهذا يعبر عنه كالآتي:

$$\frac{Q_{max}^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_{max}^2 \qquad (41)$$

وباستعمال المعادلة 41 تصبح المعادلة 40 كالتالي:

$$U = \frac{Q_{max}^2}{2C} (cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_{max}^2}{2C} \qquad (42)$$

وهذا متحقق فقط في حالة إهمال المقاومة، أي لا يوجد فقد في الطاقة على صورة طاقة حرارية.

مثال1: ملف حثه الذاتي 3H ومقاومته 6Ω متصل على التوالي ببطارية قوتها الدافعة 12V ومقاومتها الداخلية مهملة، احسب:

1- معدل نمو التيار بمجرد غلق الدائرة.
2- معدل نمو التيار عندما تصل قيمته إلى 1A
3- شدة التيار بعد انقضاء زمن 0.2s على غلق الدائرة.
4- الطاقة المخزونة في هذا الملف بعد وصول التيار إلى قيمته المستقرة.

الحل: 1- من المعادلة 26

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{RI}{L}$$

بمجرد غلق الدائرة التيار يساوي صفر، لذلك

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} = 4\ \mathrm{A/s}$$

-2

$$\frac{dI}{dt} = \frac{12}{3} - \frac{6\times1}{3} = 2\ A/s$$

3- من المعادلة 28

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) = \frac{12}{6}\left(1 - e^{-\frac{6\times0.2}{3}}\right) = 0.65\ A$$

4- من المعادلة 19

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = \frac{1}{2}\times 3\times\left(\frac{12}{6}\right)^2 = 6\ \mathrm{J}$$

س: ملف حثة الذاتي 3H يتصل على التوالي بمقاومة10Ω وبطارية قوتها الدافعة الكهربائية3V ومقاومتها الداخلية مهملة والمطلوب حساب مايلي بعد انقضاء زمن قدره 0.3s على غلق هذه الدائرة:

أ– القدرة المبذولة من البطارية.

ب– القدرة المستهلكة في المقاومة.

ج- القدرة اللازمة لبناء التيار في الملف.

<u>مثال 2: المصدر 3 ص 940</u>

In Figure 32.14, the battery has an emf of 12.0 V, the inductance is 2.81 mH, and the capacitance is 9.00 pF. The switch has been set to position *a* for a long time so that the capacitor is charged. The switch is then thrown to position *b*, removing the battery from the circuit and connecting the capacitor directly across the inductor.

(A) Find the frequency of oscillation of the circuit.

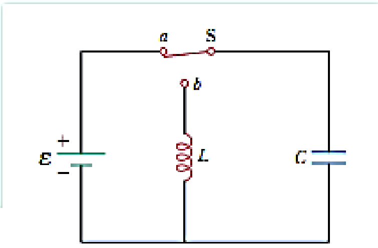


Figure 32.14 (Example 32.6) First the capacitor is fully charged with the switch set to position *a*. Then the switch is thrown to position *b*, and the battery is no longer in the circuit.

SOLUTION

Conceptualize When the switch is thrown to position *b*, the active part of the circuit is the right-hand loop, which is an *LC* circuit.

Categorize We use equations developed in this section, so we categorize this example as a substitution problem.

Use Equation 32.22 to find the frequency:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Substitute numerical values:

$$f = \frac{1}{2\pi[(2.81\times10^{-3}\ \mathrm{H})(9.00\times10^{-12}\ \mathrm{F})]^{1/2}} = 1.00\times10^{6}\ \mathrm{Hz}$$

(B) What are the maximum values of charge on the capacitor and current in the circuit?

SOLUTION

Find the initial charge on the capacitor, which equals the maximum charge:

$$Q_{max} = C\Delta V = (9.00\times10^{-12}\ \mathrm{F})(12.0\ \mathrm{V}) = 1.08\times10^{-10}\ \mathrm{C}$$

Use Equation 32.25 to find the maximum current from the maximum charge:

$$I_{max} = \omega Q_{max} = 2\pi f Q_{max} = (2\pi\times10^{6}\ \mathrm{s^{-1}})(1.08\times10^{-10}\ \mathrm{C})$$
$$= 6.79\times10^{-4}\ \mathrm{A}$$

مثال 3: المصدر ص 932

Consider the circuit in Active Figure 32.2 again. Suppose the circuit elements have the following values: $\mathcal{E} = 12.0$ V, $R = 6.00\ \Omega$, and $L = 30.0$ mH.

(A) Find the time constant of the circuit.

SOLUTION

Conceptualize You should understand the behavior of this circuit from the discussion in this section.

Categorize We evaluate the results using equations developed in this section, so this example is a substitution problem.

Evaluate the time constant from Equation 32.8:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3}\ \text{H}}{6.00\ \Omega} = 5.00\ \text{ms}$$

(B) Switch S_2 is at position a, and switch S_1 is thrown closed at $t = 0$. Calculate the current in the circuit at $t = 2.00$ ms.

SOLUTION

Evaluate the current at $t = 2.00$ ms from Equation 32.7:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0\ \text{V}}{6.00\ \Omega}(1 - e^{-2.00\ \text{ms}/5.00\ \text{ms}}) = 2.00\ \text{A}\ (1 - e^{-0.400})$$
$$= 0.659\ \text{A}$$

(C) Compare the potential difference across the resistor with that across the inductor.

SOLUTION

At the instant the switch is closed, there is no current and therefore no potential difference across the resistor. At this instant, the battery voltage appears entirely across the inductor in the form of a back emf of 12.0 V as the inductor tries to maintain the zero-current condition. (The top end of the inductor in Active Fig. 32.2 is at a higher electric potential than the bottom end.) As time passes, the emf across the inductor decreases and the current in the resistor (and hence the voltage across it) increases as shown in Figure 32.6. The sum of the two voltages at all times is 12.0 V.

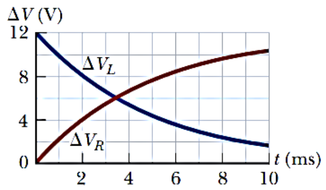


Figure 32.6 (Example 32.2) The time behavior of the voltages across the resistor and inductor in Active Figure 32.2 given the values provided in this example.

WHAT IF? In Figure 32.6, the voltages across the resistor and inductor are equal at 3.4 ms. What if you wanted to delay the condition in which the voltages are equal to some later instant, such as $t = 10.0$ ms? Which parameter, L or R, would require the least adjustment, in terms of a percentage change, to achieve that?

Answer Figure 32.6 shows that the voltages are equal when the voltage across the inductor has fallen to half its original value. Therefore, the time interval required for the voltages to become equal is the *half-life* $t_{1/2}$ of the decay. We introduced the half-life in the What If? section of Example 28.10 to describe the exponential decay in RC circuits, where $t_{1/2} = 0.693\tau$.

From the desired half-life of 10.0 ms, use the result from Example 28.10 to find the time constant of the circuit:

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{0.693} = \frac{10.0\ \text{ms}}{0.693} = 14.4\ \text{ms}$$

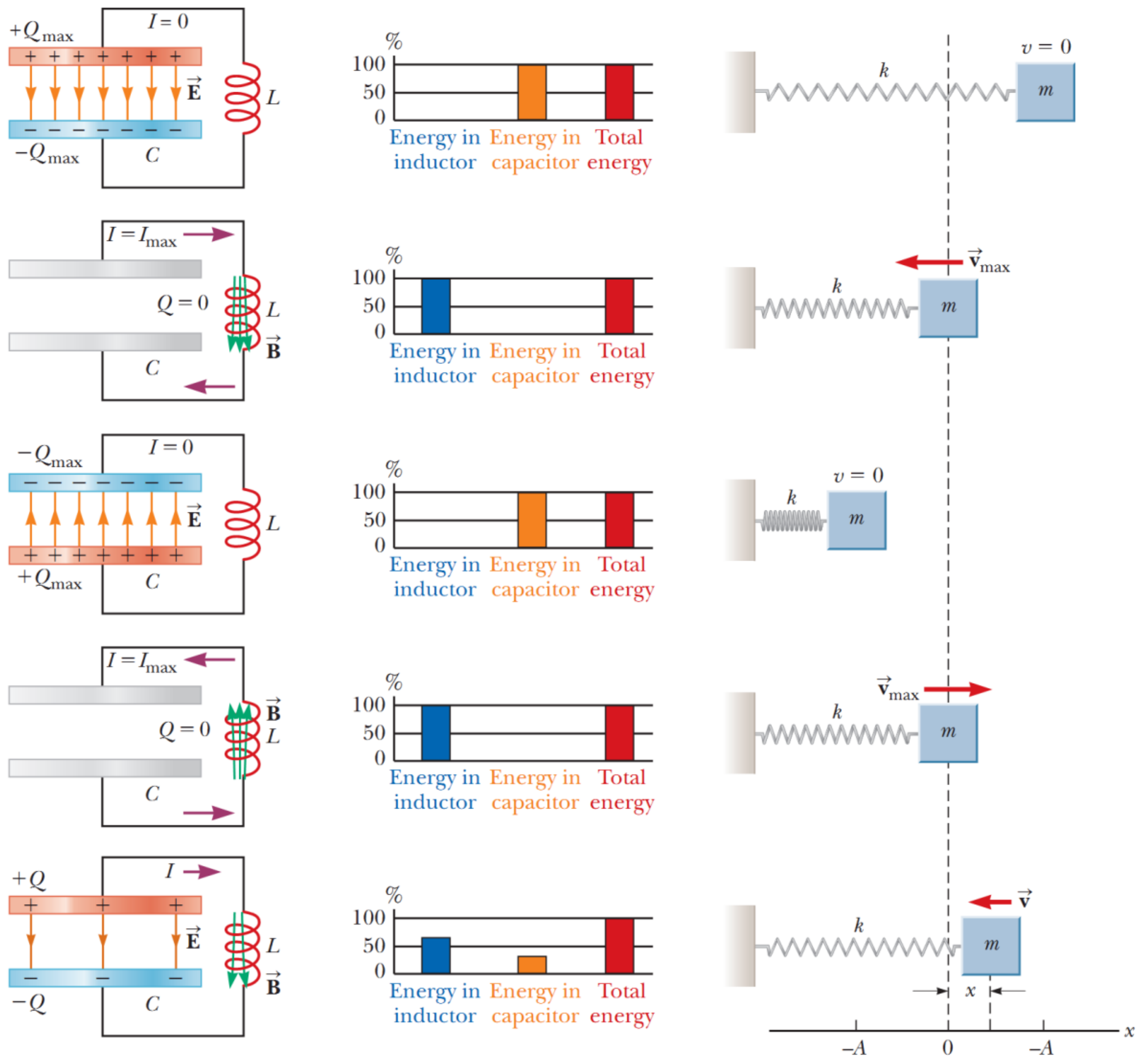
Hold L fixed and find the value of R that gives this time constant:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \rightarrow \quad R = \frac{L}{\tau} = \frac{30.0 \times 10^{-3}\ \text{H}}{14.4\ \text{ms}} = 2.08\ \Omega$$

Now hold R fixed and find the appropriate value of L:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \rightarrow \quad L = \tau R = (14.4\ \text{ms})(6.00\ \Omega) = 86.4 \times 10^{-3}\ \text{H}$$

The change in R corresponds to a 65% decrease compared with the initial resistance. The change in L represents a 188% increase in inductance! Therefore, a much smaller percentage adjustment in R can achieve the desired effect than would an adjustment in L.



Energy oscillations in the LC Circuit and the mass-spring system