3-3 قانون فاراداي والمجال الكهربائي الحثي

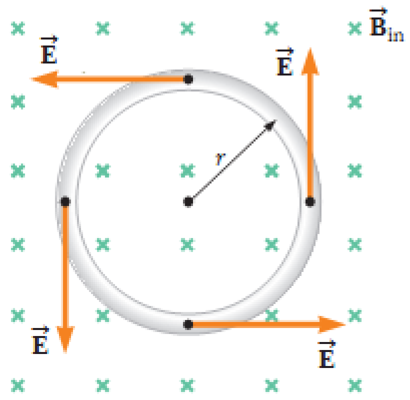
Faraday's Law and Induced - Electric Field

لاحظنا ان تغيير الفيض المغناطيسي يولد قوة دافعة كهربائية حثية وتيار حثي في الدائرة وهذا يؤكد على وجود مجال كهربائي حثي نتيجة لتغير في الفيض المغناطيسي. وكما نعلم من النظرية الكهرومغناطيسية ان مجال كهربائي يتنج من تغير الفيض المغناطيسي في الفراغ. وهنا سنقوم بحساب العلاقة بين المجال الكهربائي المستحث والتغير في الفيض المغناطيسي.

الشكل 8 يبين حلقة موصلة نصف قطرها r موضوعة في مجال مغناطيسي خارجي متغير مع الزمن عمودي على مستوى الحلقة. من قانون فاراداي فإن القوة الدافعة الكهربائية تعطى كالتالي:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

تعمل القوة الدافعة الكهربائية على توليد تيار كهربائي في الحلقة الموصلة وهذا بدوره يشير إلى وجود مجال كهربائي يتناسب مقداره والتيار المار في الحلقة وله اتجاه المماس على الحلقة كما في الشكل.



الشكل(8): يبين حلقة موصلة نصف قطرها r موضوعة في مجال مغناطيسي خارجي متغير مع الزمن عمودي على مستوى الحلقة.

بحساب الشغل المبذول لتحريك شحنة q في الحلقة الموصلة بواسطة كلاً من المجال الكهربائي الناشئ والقوة الدافعة الكهربائية، ومساواة المعادلتين ينتج ان:

$$q\varepsilon = qE(2\pi r) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\epsilon}{2\pi r}$$

وبصورة عامة يمكن ان تُكتب هذه المعادلة بالصورة:

$$\varepsilon = \oint E.dl \qquad (9)$$

$$\oint E.dl = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (10)$$

$$\oint E.dl = -\int_S \frac{dB}{dt}.ds \qquad (11)$$

وتسمى المعادلة التكاملية (11) بمعادلة ماكسويل المشتقة من معادلة فارادي.

ويمكن ايجاد معادلة ماكسويل التفاضلية المشتقة من قانون فاراداي كآلاتي:

حسب قاعدة ستوكس، فإن المعادلة 9 تصبح:

$$\oint_C E.dl = \int_S (\nabla \times E).dS \tag{12}$$

حيث S سطح مغلق محاط بمسار مغلق C. وبمساواة هذه المعادلة مع المعادلة 11 يُحصل على:

$$\int_S (\nabla \times E).dS = -\int_S \frac{dB}{dt}.ds \tag{13}$$

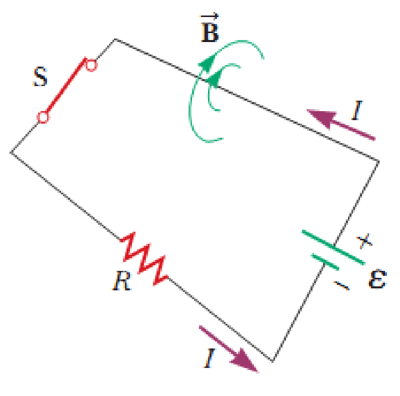
أو

$$(\nabla \times E) = -\frac{dB}{dt} \tag{14}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة ماكسويل التفاضلية المشتقة من قانون فاراداي.

3- 4 الحث الذاتي Self-Inductance

درسنا في المحاضرة السابقة ان التيار ينشئ في الدائرة الكهربائية عندما يتغير الفيض المغناطيسي خلال الدائرة مع الزمن. وفي هذه المحاضرة سندرس الحث الذاتي الذي ينشئ في الدائرة نفسها عند مرور تيار كهربائي فيها أو بمعنى آخر عند غلق او فتح الدائرة الكهربائية، وهذا التأثير (الحث الذاتي) يلعب دوراً اساسياً في دوائر التيار المتردد، حيث أن التيار يتغير باستمرار مع الزمن.



الشكل(9): الحث الذاتي في دائرة بسيطة.

اعتبر دائرة كهربائية مكونة من بطارية ومقاومة ومفتاح كهربائي كما في الشكل 9، عند غلق الدائرة فإن التيار المار في الدائرة سوف لن يصل إلى قيمته العظمى فور غلق المفتاح انما يستغرق بعضا من الوقت نتيجة لقانون فارادي. عند غلق المفتاح في الدائرة الكهربائية يحدث التالي:

1. يزداد التيار المار في الدائرة مع الزمن.
2. يزداد الفيض المغناطيسي خلال الدائرة نتيجة لازدياد التيار.
3. الفيض المتزايد يؤدي إلى توليد قوة دافعة كهربائية في الدائرة ليعاكس الزيادة في الفيض المغناطيسي حسب قانون لينز (Lenz's Law).

هذه القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في الدائرة تعمل في عكس اتجاه التيار الأصلي وهذا نتج عن الزيادة في الفيض المغناطيسي نتيجة لزيادة التيار عند غلق المفتاح، هذا التأثير في الدائرة يعرف باسم التأثير الحثي الذاتي (Self-Induction).

من قانون فارادي يمكننا من ايجاد صيغة رياضية للتعبير عن الحث الذاتي، حيث ان الفيض المغناطيسي يتناسب مع المجال المغناطيسي والاخير يتناسب مع التيار في الدائرة، لذا فإن القوة الدافعة الكهربائية للحث الذاتي تتناسب مع التغير في التيار الكهربائي:

$$\varepsilon = -\mathrm{N}\frac{d\Phi}{dt} = -\mathrm{L}\frac{d\mathrm{I}}{dt} \qquad (15)$$

حيث L هو ثابت التناسب ويسمى معامل الحث الذاتي أو باختصار الحث الذاتي وهو يعتمد على الخواص الهندسية للدائرة (شكلها ومساحتها وعدد لفاتها) وبعض الخواص الفيزيائية الاخرى.

الحث الذاتي L في المغناطيسية يناظر السعة الكهربائية C ويمكن التعبير عن الحث الذاتي L بالأبعاد الهندسية للدائرة. فإذا افترضنا ملف عدد لفاته N فإن L تعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{N}\Phi}{I} \qquad (16)$$

المعادلة 16 يمكن الحصول عليها من تكامل المعادلة 15.

كما يمكن التعبير عن الحث الذاتي بالمعادلة التالية:

$$\mathrm{L} = -\frac{\varepsilon}{dI/dt} \qquad (17)$$

المعادلة (17) تعطي قيمة الحث الذاتي للدائرة بغض النظر عن ابعادها الهندسية، وتعتمد على قياس الكميات الفيزيائية مثل القوة الدافعة الكهربائية والتغيير في التيار. ومن هذه المعادلة يتضح أن الوحدات في النظام العالمي (S.I) للحث الذاتي هي (V.s/A) أو ما يسمى بالهنري (Henry).

كما يمكن ايجاد الحث الذاتي من خلال قياس الابعاد الهندسية.

اعتبر ملف عدد لفاته N لفة وطوله l اكبر بكثير من نصف قطر الملف، ينشأ عنه مجالاً مغناطيسياً يعطى بالعلاقة التالية:

$$B = \mu_0\, nI = \mu_0\, \frac{N}{l} I$$

اما الفيض الكهربائي فيعطى بالعلاقة التالية:

$$\Phi = BS = \mu_0\, \frac{NS}{l} I$$

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{N}\Phi}{I} = \mu_0\, \frac{N^2 S}{l}$$

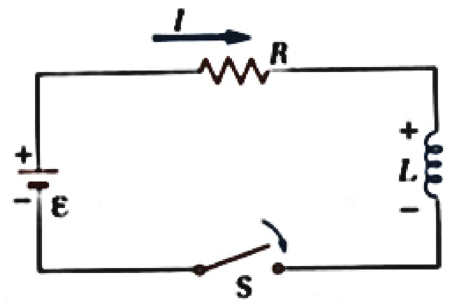
$$L = \mu_0 \frac{(nl)^2 S}{l} = \mu_0 n^2 S l = \mu_0 n^2 V$$

حيث ان$V = Sl$ هي الحجم. ومن هذا يتضح ان الحث الذاتي للملف يعتمد على خواصه الهندسية (الطول والمساحة) ومربع عدد اللفات حيث أن ($N = nl$).

5-3 الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي Energy Stored in a Magnetic Field

من المعلوم أن المجال الكهربائي في الفراغ هو عبارة عن طاقة كهربائية في صورة مجال. كذلك الحال بالنسبة للمجال المغناطيسي. ولإثبات علاقة الطاقة المختزنة بالمجال المغناطيسي افترض الدائرة الكهربائية الموضحة في الشكل 10، بتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على التغير في فرق الجهد على كل عنصر من عناصر الدائرة الكهربائية ينتج أن:

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$



الشكل(10)

بإعادة ترتيب المعادلة والضرب في التيار I ينتج أن:

$$I\varepsilon = I^2R + LI\frac{dI}{dt} \qquad (18)$$

تدل المعادلة السابقة على أن الطاقة التي تبذلها البطارية $I\varepsilon$ تساوي مجموع الطاقة المبددة على شكل طاقة حرارية في المقاومة I^2R والطاقة المختزنة في الملف $LI\frac{dI}{dt}$ ، وعليه يمكن التعبير عن التغير في الطاقة المختزنة في الملف بالصورة التالية:

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

ولإيجاد الطاقة الكلية المختزنة في الملف نجري عملية التكامل:

$$U = \int_0^U dU = \int_0^I LI dI$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (19)$$

و هذه المعادلة تعطي الطاقة الكلية المختزنة في الملف.

يمكن حساب الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي لكل وحدة حجوم و هو المقصود بكثافة الطاقة، اعتبر ملف حثه الذاتي والمجال المغناطيسي له يعطى بالمعادلتين:

$$\mathrm{L} = \mu_0 n^2 V$$

$$\mathrm{B} = \mu_0 n I$$

بالتعويض عن التيار I والحث الذاتي للملف L في المعادلة 19 ينتج ان:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} V \qquad (20)$$

بالقسمة على الحجم للحصول على كثافة الطاقة نصل إلى المعادلة التالية:

$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (21)$$

وحيث ان $B = \mu_0 H$ (شدة المجال المغناطيسي).

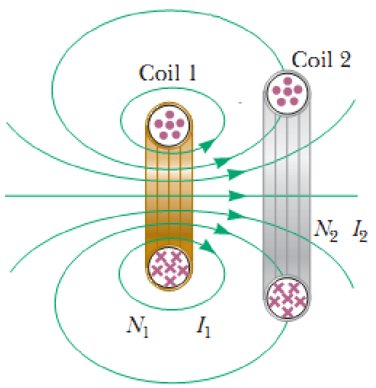
$$u_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} B H \qquad (22)$$

و هذه المعادلة تعطي كثافة الطاقة لكل وحدة حجوم لأي مجال مغناطيسي.

6-3 الحث المتبادل Mutual Inductance

نتيجة للتغير في التيار الكهربائي في دائرة يؤدي إلى تغيير في الفيض المغناطيسي في دائرة كهربائية مجاورة. و هذا بالتأكيد يولد قوة دافعة كهربائية في تلك الدائرة ويسمى هذا التأثير بالتأثير الحثي المتبادل لأنه نتج من تأثير دائرة كهربائية على اخرى.

في الشكل (11) توضيح للتأثير الحثي المتبادل بين ملفين متجاورين، يمر تيار كهربائي قيمته I_1 في الملف الأول وعدد لفاته N_1، ينشئ مجالا مغناطيسياً يؤثر على الملف الثاني وعدد لفاته N_2 بفيض مغناطيسي F_{21} يؤدي إلى تيار حثي في الملف الثاني وقيمته I_2.



الشكل (11)

يعرف التأثير الحثي المتبادل M_{21} في الملف الثاني نسبة للملف الأول من خلال المعادلة التالية:

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} \qquad (23)$$

إذا كان التيار I_1 في الملف الأول متغير مع الزمن، فيمكن ان نرى من قانون فارادي والمعادلة 23 ان القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في الملف الثاني نتيجة للملف الأول هي:

$$\varepsilon_2 = -N_2\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2\frac{d}{dt}\left(\frac{M_{12}I_1}{N_2}\right) = -\,M_{12}\frac{dI_1}{dt} \qquad (24)$$

وبنفس الفكرة، إذا كان التيار I_2 في الملف الثاني متغير مع الزمن، فيمكن ان نرى من قانون فارادي والمعادلة 23 ان القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في الملف الأول نتيجة للملف الثاني هي:

$$\varepsilon_1 = -\,M_{21}\frac{dI_2}{dt} \qquad (25)$$

أي ان القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في ملف تتناسب طردياً من معدل التغير في التيار الكهربائي في الملف الآخر.

في حالة ما يكون معدل التغير في التيار $\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt}$ فإن القوة الدافعة الكهربائية تكون $\boldsymbol{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$ وهذا يعني أن $M_{12}= M_{21}=M$ وتكون قيمة القوة الدافعة الكهربائية في المعادلتين 24 و 25 كالآتي:

$$\varepsilon_1 = -M\frac{dI_2}{dt} \qquad\qquad \varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$$

وتكون وحدة الحث المتبادل هي الهنري (Henry).

مثال1: احسب الحث الذاتي لملف حلزوني بداخله هواء طوله 1 متر ومساحة مقطعة 6×10^{-4} متر^2 وعدد لفاته 1000 لفة.

الحل:

$$L = \frac{\mu_0 . N^2 . S}{l}$$

$$\therefore L = 4\pi\times10^{-7}\times\frac{10^6\times6\times10^{-4}}{1} = 75.4\times10^{-5}\,H$$

مثال 2:

ملف حلزوني طويل طوله l ومساحة مقطعه S وعدد لفاته N_1 التف حول منتصفه ملف آخر صغير عدد لفاته N_2 كما في الشكل. احسب:

١ ـ الحث المتبادل بين الملفين إذا كان $N_1 = 10^3$ turns ، $N_2 = 20$ turns ، و $S = 10cm^2, l = 1m$.

٢ ـ ما قيمة القوة الدافعة الحثية في الدائرة الثانية نتيجة تغيير التيار في الدائرة (1) بمقدار ١٠ أمبير/ثانية.

الحـــل

١ ـ في الملف (1) تكون كثافة الفيض المغناطيسي في اتجاه محوره نتيجة مرور تيار قيمته I

$$B = \mu_0 \frac{N_1 I}{l} \text{ Wb/m}^2$$

عندئذ يساوي التدفق المار بالمقطع المركزي المقدار:

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N_1 IS}{l}$$

ولما كان هذا التدفق يتصل بالملف (2) فإن معامل الحث المتبادل:

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I} = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S}{l}$$

$$\therefore M = \frac{12.57 \times 10^{-7} \times 10^{-3} \times 10^{3} \times 20}{1} = 25.1\ \mu H$$

٢ ـ القوة الدافعة الحثية في الدائرة (2) تعطى بالمعادلة:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\therefore \varepsilon_2 = -25.1 \times 10^{-6} \times 10 = -251\ \mu V$$